

UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
CONCOURS D'ACCÈS À L'ENSAM-MEKNÈS ET À
L'ENSAM-CASABLANCA

Épreuve de Mathématiques - Filière Sciences Mathématiques A et B

Vendredi 24 juillet 2015 - Durée : 2 h

Correction détaillée des questions Q1, Q2 et Q3

Table des matières

1	Question Q1 - Logique et inégalité	2
2	Question Q2 - Dénombrement d'un code bancaire	4
3	Question Q3 - Nombres complexes et somme trigonométrique	6
	Résumé des réponses	9

1 Question Q1 - Logique et inégalité

Énoncé. Soit la proposition

$$P : \quad \ll \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \gg.$$

Donner la négation et le tableau de vérité de la proposition P .

1. Compréhension de la proposition

L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs :

$$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[.$$

La proposition P affirme donc que, pour tout réel $a > 0$, l'inégalité

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

est vérifiée.

2. Négation de la proposition

La règle logique fondamentale est :

$$\neg(\forall x \in E, Q(x)) \iff \exists x \in E \text{ tel que } \neg Q(x).$$

Ici,

$$Q(a) : \quad a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

La négation de l'inégalité $X \geq 2$ est $X < 2$. Par conséquent,

$$\neg P : \quad \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } a + \frac{1}{a} < 2.$$

Autrement dit, nier P consiste à affirmer qu'il existe au moins un réel strictement positif pour lequel la somme $a + 1/a$ est strictement inférieure à 2.

3. Détermination de la valeur de vérité de P

Pour $a > 0$, on a toujours

$$(a - 1)^2 \geq 0.$$

Développons :

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

Comme $a > 0$, nous pouvons diviser les deux membres par a sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 0.$$

Donc

$$a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0,$$

puis

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Cette démonstration est valable pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$. La proposition P est donc vraie.

L'égalité se produit exactement lorsque

$$(a - 1)^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$a = 1.$$

4. Tableau de vérité

Une proposition et sa négation ont toujours des valeurs de vérité opposées :

P	$\neg P$
Vraie	Fausse
Fausse	Vraie

Dans le cas présent, puisque P est vraie, on obtient :

P	$\neg P$
Vraie	Fausse

Réponse finale à Q1

$$\neg P : \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } a + \frac{1}{a} < 2.$$

La proposition P est **vraie**, et sa négation est **fausse**.

2 Question Q2 - Dénombrement d'un code bancaire

Énoncé. Le code confidentiel d'une carte bancaire est constitué d'un nombre de quatre chiffres non nuls. Combien y a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 1 ?

1. Chiffres autorisés

Chaque chiffre du code doit être non nul. Les chiffres possibles sont donc

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Il y a ainsi 9 chiffres possibles pour chaque position avant d'imposer la condition portant sur le chiffre 1.

Nous voulons que le chiffre 1 apparaisse **exactement une fois**.

2. Choix de la position du chiffre 1

Le code comporte quatre positions :

— — — —.

Le chiffre 1 peut être placé :

- en première position ;
- en deuxième position ;
- en troisième position ;
- en quatrième position.

Il y a donc

$$\binom{4}{1} = 4$$

façons de choisir la position occupée par l'unique chiffre 1.

3. Remplissage des trois autres positions

Une fois la position du chiffre 1 choisie, chacune des trois autres positions doit contenir un chiffre :

- non nul ;
- différent de 1, afin que le chiffre 1 n'apparaisse pas une seconde fois.

Les choix possibles sont donc

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

soit 8 possibilités par position.

Les répétitions sont autorisées. Par exemple, les codes 1222, 2321 ou 5551 respectent bien la condition. Les choix effectués aux trois positions sont indépendants ; leur nombre est donc

$$8 \times 8 \times 8 = 8^3.$$

4. Application du principe multiplicatif

Nous multiplions :

$$\underbrace{4}_{\text{position du chiffre 1}} \times \underbrace{8^3}_{\text{trois autres chiffres}} = 4 \times 512 = 2048.$$

On peut également vérifier le résultat en distinguant les quatre cas :

$$1abc, \quad a1bc, \quad ab1c, \quad abc1,$$

où chacun des symboles a, b, c peut prendre 8 valeurs. Chaque cas fournit $8^3 = 512$ codes, d'où

$$4 \times 512 = 2048.$$

Réponse finale à Q2

2048

Il existe exactement 2048 codes de quatre chiffres non nuls contenant une fois, et une seule, le chiffre 1.

3 Question Q3 - Nombres complexes et somme trigonométrique

Énoncé. On considère

$$z = e^{\frac{2i\pi}{7}}, \quad a = z + z^2 + z^4, \quad b = z^3 + z^5 + z^6.$$

Sachant que $a + b = -1$ et $\bar{b} = a$, déterminer

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

1. Mise en relation de S avec le nombre complexe a

La formule d'Euler donne, pour tout réel θ ,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Comme

$$z = e^{\frac{2i\pi}{7}},$$

on a successivement

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right),$$

$$z^2 = e^{\frac{4i\pi}{7}} = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right),$$

et

$$z^4 = e^{\frac{8i\pi}{7}} = \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

En additionnant ces trois égalités, nous obtenons

$$\begin{aligned} a &= z + z^2 + z^4 \\ &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) \right] \\ &\quad + i \left[\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \right]. \end{aligned}$$

La partie réelle de a est donc précisément la somme demandée :

$$S = \operatorname{Re}(a).$$

2. Utilisation de la relation de conjugaison

L'énoncé donne

$$\bar{b} = a.$$

En conjuguant les deux membres, on obtient

$$b = \bar{a}.$$

La relation $a + b = -1$ devient alors

$$a + \bar{a} = -1.$$

Or, pour tout nombre complexe $a = x + iy$,

$$\bar{a} = x - iy$$

et donc

$$a + \bar{a} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re}(a).$$

Ainsi,

$$2 \operatorname{Re}(a) = -1.$$

En divisant par 2, il vient

$$\operatorname{Re}(a) = -\frac{1}{2}.$$

Puisque $S = \operatorname{Re}(a)$,

$$\boxed{S = -\frac{1}{2}.$$

3. Vérification directe de la relation $a + b = -1$

Le nombre $z = e^{2i\pi/7}$ est une racine septième de l'unité :

$$z^7 = e^{2i\pi} = 1.$$

De plus, $z \neq 1$. La somme géométrique donne alors

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0.$$

Par conséquent,

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1.$$

Or

$$a + b = (z + z^2 + z^4) + (z^3 + z^5 + z^6),$$

donc

$$a + b = -1,$$

ce qui confirme la donnée de l'énoncé.

4. Vérification de la relation de conjugaison

Puisque $|z| = 1$, on a

$$\bar{z} = \frac{1}{z} = z^{-1} = z^6,$$

car $z^7 = 1$. Plus généralement,

$$\overline{z^k} = z^{-k} = z^{7-k}.$$

Ainsi,

$$\bar{b} = \overline{z^3 + z^5 + z^6} = z^4 + z^2 + z = a.$$

La seconde donnée est donc également cohérente.

Réponse finale à Q3

$$S = -\frac{1}{2}.$$

Résumé des réponses

Question	Réponse finale
Q1	$\neg P : \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } a + \frac{1}{a} < 2$. La proposition P est vraie.
Q2	Le nombre de codes est $4 \times 8^3 = \boxed{2048}$.
Q3	$S = \operatorname{Re}(a) = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

Document rédigé avec toutes les étapes de raisonnement et de démonstration.

Correction détaillée des questions Q4 à Q7

Concours d'accès à l'ENSAM-Meknès et à l'ENSAM-Casablanca
Épreuve de mathématiques - Filières Sciences Mathématiques A et B - 2015

Q4 - Nombres complexes et rotation

Énoncé. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A , B et C d'affixes

$$a = 2, \quad b = -1 + i\sqrt{3}, \quad c = -1 - i\sqrt{3}.$$

Donner la forme trigonométrique de

$$z = \frac{c - a}{b - a},$$

et en déduire l'angle θ de la rotation qui transforme B en C .

1. Calcul des différences d'affixes

On a

$$c - a = (-1 - i\sqrt{3}) - 2 = -3 - i\sqrt{3}$$

et

$$b - a = (-1 + i\sqrt{3}) - 2 = -3 + i\sqrt{3}.$$

Ainsi,

$$z = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}.$$

2. Calcul du module de z

Le module d'un quotient est le quotient des modules :

$$|z| = \frac{|c - a|}{|b - a|}.$$

Or

$$|c - a| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

et de même

$$|b - a| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

Par conséquent,

$$|z| = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$$

3. Calcul d'un argument de z

Le nombre $b - a = -3 + i\sqrt{3}$ se situe dans le deuxième quadrant. Son angle de référence vaut $\pi/6$, car

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left|\frac{\sqrt{3}}{-3}\right|.$$

Donc

$$\arg(b - a) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

Le nombre $c - a = -3 - i\sqrt{3}$ se situe dans le troisième quadrant. On peut choisir

$$\arg(c - a) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

Ainsi,

$$\arg(z) = \arg(c - a) - \arg(b - a) = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Comme $|z| = 1$, la forme trigonométrique de z est

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Donc également

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Interprétation géométrique

La relation

$$\frac{c - a}{b - a} = e^{i\theta}$$

signifie que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est obtenu à partir du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une rotation de centre A et d'angle θ , puisque le quotient a pour module 1.

Ici,

$$e^{i\theta} = e^{i\pi/3},$$

d'où

$$\theta = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

L'angle principal de la rotation est donc $\pi/3$, soit 60° .

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

Q5 - Résolution d'une inéquation trigonométrique exponentielle

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$3^{\cos x} + 3^{\cos(\pi-x)} + 1 \leq 2\sqrt{3}.$$

1. Utilisation d'une identité trigonométrique

On sait que

$$\cos(\pi - x) = -\cos x.$$

L'inéquation devient donc

$$3^{\cos x} + 3^{-\cos x} + 1 \leq 2\sqrt{3}.$$

Posons

$$t = 3^{\cos x}.$$

Comme une puissance de base positive est strictement positive, on a $t > 0$. De plus,

$$3^{-\cos x} = \frac{1}{3^{\cos x}} = \frac{1}{t}.$$

L'inéquation équivaut alors à

$$t + \frac{1}{t} + 1 \leq 2\sqrt{3},$$

soit

$$t + \frac{1}{t} \leq 2\sqrt{3} - 1.$$

2. Réduction à une inéquation du second degré

Puisque $t > 0$, on peut multiplier les deux membres par t sans changer le sens de l'inégalité :

$$t^2 + 1 \leq (2\sqrt{3} - 1)t.$$

Ainsi,

$$t^2 - (2\sqrt{3} - 1)t + 1 \leq 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (2\sqrt{3} - 1)^2 - 4.$$

Or

$$(2\sqrt{3} - 1)^2 = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = 13 - 4\sqrt{3},$$

donc

$$\Delta = 13 - 4\sqrt{3} - 4 = 9 - 4\sqrt{3}.$$

Les deux racines sont

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{2}, \quad t_2 = \frac{2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{2}.$$

Elles sont positives, avec $t_1 < t_2$. Le coefficient de t^2 étant positif, le trinôme est négatif ou nul entre ses deux racines. Par conséquent,

$$t_1 \leq t \leq t_2.$$

On remarque aussi que le produit des racines vaut 1, donc

$$t_1 t_2 = 1 \quad \text{et ainsi} \quad t_1 = \frac{1}{t_2}.$$

3. Retour à $\cos x$

Comme $t = 3^{\cos x}$ et que la fonction $u \mapsto 3^u$ est strictement croissante, on obtient

$$\log_3(t_1) \leq \cos x \leq \log_3(t_2).$$

Posons

$$\alpha = \log_3(t_2) = \log_3\left(\frac{2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{2}\right).$$

Puisque $t_1 = 1/t_2$, on a

$$\log_3(t_1) = -\log_3(t_2) = -\alpha.$$

L'inéquation est donc équivalente à

$$-\alpha \leq \cos x \leq \alpha.$$

Numériquement,

$$\alpha \approx 0.6087,$$

et on a bien $0 < \alpha < 1$.

4. Résolution trigonométrique complète

Posons

$$\beta = \arccos(\alpha).$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $0 < \beta < \pi/2$. Sur une période $[0, 2\pi]$:

- la condition $\cos x \leq \alpha$ donne $x \in [\beta, 2\pi - \beta]$;
- la condition $\cos x \geq -\alpha$ donne

$$x \in [0, \pi - \beta] \cup [\pi + \beta, 2\pi].$$

En intersectant ces deux ensembles, on obtient sur $[0, 2\pi]$:

$$x \in [\beta, \pi - \beta] \cup [\pi + \beta, 2\pi - \beta].$$

Par périodicité de la fonction cosinus, la solution générale est

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([\beta + 2k\pi, \pi - \beta + 2k\pi] \cup [\pi + \beta + 2k\pi, 2\pi - \beta + 2k\pi]),$$

où

$$\beta = \arccos\left[\log_3\left(\frac{2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{2}\right)\right].$$

En posant

$$\beta = \arccos\left[\log_3\left(\frac{2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{2}\right)\right],$$

on obtient

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([\beta + 2k\pi, \pi - \beta + 2k\pi] \cup [\pi + \beta + 2k\pi, 2\pi - \beta + 2k\pi]).$$

Q6 - Calcul d'une limite

Énoncé. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{2x^2}.$$

La substitution directe donne une forme indéterminée $0/0$. Nous allons transformer l'expression pour utiliser deux limites usuelles, sans recourir à un développement limité.

1. Décomposition du numérateur

On écrit

$$e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x).$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} + \frac{1 - \cos x}{2x^2}.$$

2. Limite du premier terme

Posons $u = x^2$. Lorsque $x \rightarrow 0$, on a $u \rightarrow 0$. Alors

$$\frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \frac{1}{2} \frac{e^u - 1}{u}.$$

Or la limite fondamentale de la fonction exponentielle est

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. Limite du second terme

On utilise l'identité

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Alors

$$\frac{1 - \cos x}{2x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{2x^2} = \frac{\sin^2(x/2)}{x^2}.$$

Écrivons

$$\frac{\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2.$$

Comme

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} = 1,$$

on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \frac{1}{4}.$$

4. Conclusion

Par somme des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{2x^2} = \frac{3}{4}$$

Q7 - Continuité en zéro

Énoncé. La fonction g est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} + 1 \quad \text{si } x > 0,$$

et

$$g(0) = a \in \mathbb{R}.$$

Déterminer a pour que g soit continue sur $[0, +\infty[$.

1. Principe de continuité en zéro

Pour $x > 0$, l'expression définissant $g(x)$ est composée de fonctions continues. La seule difficulté se situe donc au point $x = 0$.

Pour que g soit continue en 0, il faut et il suffit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = a.$$

Nous devons donc calculer la limite à droite de g en 0.

2. Simplification de l'expression

Pour $x > 0$,

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1).$$

Par conséquent,

$$g(x) = \ln x - \ln(x+1) - \frac{\ln x}{x+1} + 1.$$

Regroupons les termes contenant $\ln x$:

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \ln x - \ln(x+1) + 1.$$

Or

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Donc

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - \ln(1+x) + 1.$$

3. Étude de la limite de $x \ln x$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

La forme $x \ln x$ est indéterminée : $x \rightarrow 0$ tandis que $\ln x \rightarrow -\infty$. Posons

$$t = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $t \rightarrow +\infty$, et

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\ln t}{t}.$$

La croissance du logarithme est plus lente que celle de la fonction linéaire, donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Comme $x + 1 \rightarrow 1$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x + 1} = 0.$$

4. Calcul final de la limite

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + x) = \ln 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

Pour assurer la continuité en 0, il faut donc choisir

$$a = 1.$$

$$\boxed{a = 1}$$

Avec cette valeur, $g(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, donc g est continue en 0, et par conséquent sur tout $[0, +\infty[$.

Correction détaillée des questions Q8 à Q11

Épreuve de Mathématiques - Filière Sciences Mathématiques A et B

Concours d'accès à l'ENSAM, session 2015

Question Q8

Énoncé. Soit

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

Déterminer la fonction réciproque f^{-1} .

1. Domaine de définition et variations de f

Pour tout réel x , on a $e^{-x} > 0$, donc

$$1 + e^{-x} > 1 > 0.$$

Ainsi, le logarithme est toujours défini et

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Calculons la dérivée :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{1}{e^x + 1}.$$

Comme $e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f'(x) < 0.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Image de f

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $e^{-x} \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0.$$

Cette valeur n'est jamais atteinte, car $e^{-x} > 0$ implique $1 + e^{-x} > 1$, donc $f(x) > 0$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $e^{-x} \rightarrow +\infty$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Puisque f est continue et strictement décroissante, elle réalise une bijection de

$$\mathbb{R} \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[.$$

Par conséquent,

$$D_{f^{-1}} =]0, +\infty[.$$

3. Expression de la fonction réciproque

Soit $y > 0$. Posons

$$y = f(x) = \ln(1 + e^{-x}).$$

En exponentiant les deux membres :

$$e^y = 1 + e^{-x}.$$

Donc

$$e^{-x} = e^y - 1.$$

Comme $y > 0$, on a bien $e^y - 1 > 0$. En prenant le logarithme :

$$-x = \ln(e^y - 1),$$

d'où

$$x = -\ln(e^y - 1).$$

En remplaçant y par la variable usuelle x , on obtient

$$f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1), \quad x > 0.$$

$D_{f^{-1}} =]0, +\infty[\text{ et } f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1).$
--

Question Q9

Énoncé. Déterminer la primitive F de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

sur $]1, +\infty[$ qui vaut 1 en e .

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on a $x > 0$ et $\ln x > 0$. La fonction est donc bien définie.

On reconnaît une dérivée composée. En effet,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x}.$$

Or, pour toute fonction strictement positive u ,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

En prenant $u(x) = \ln x$, il vient

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) + C.$$

Ainsi, toute primitive sur $]1, +\infty[$ est de la forme

$$F(x) = \ln(\ln x) + C.$$

La condition $F(e) = 1$ donne

$$F(e) = \ln(\ln e) + C.$$

Comme $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$, on a

$$F(e) = C.$$

Donc

$$C = 1.$$

$$F(x) = \ln(\ln x) + 1, \text{ pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

Question Q10

Énoncé. Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

1. Mise sous la forme d'une somme de Riemann

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

La fonction φ est continue sur $[0, 1]$. On reconnaît alors la somme de Riemann associée à φ sur $[0, 1]$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

Par le théorème des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

2. Calcul de l'intégrale

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan x$. Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0).$$

Or

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \arctan(0) = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

Question Q11

Énoncé. Soit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x),$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé tel que l'unité graphique vaut 1 cm. Calculer l'aire A de la surface délimitée par C_f et les droites

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

1. Position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses

Pour calculer une aire géométrique, il faut d'abord déterminer le signe de f sur $[0, 1]$.

Posons

$$h(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}.$$

On a alors

$$f(x) = -h(x).$$

Calculons la dérivée de h :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{x}{1+x^2} \right)'.$$

Par la règle du quotient,

$$\left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{1+x^2 - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Donc

$$h'(x) \geq 0$$

pour tout $x \in [0, 1]$. La fonction h est croissante sur $[0, 1]$. De plus,

$$h(0) = \arctan(0) - 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$h(x) \geq 0 \quad \text{sur } [0, 1].$$

Ainsi,

$$f(x) = -h(x) \leq 0 \quad \text{sur } [0, 1].$$

La courbe C_f est donc située sous l'axe des abscisses entre 0 et 1.

2. Expression de l'aire

Puisque $f(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$, l'aire géométrique cherchée est

$$A = \int_0^1 |f(x)| dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

Ainsi,

$$A = \int_0^1 \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx.$$

3. Calcul de $\int_0^1 \arctan x dx$

Effectuons une intégration par parties avec

$$u = \arctan x, \quad dv = dx.$$

Alors

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Donc

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Or

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Ainsi,

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \arctan x dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Finalement,

$$A = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

Cette valeur est positive, puisque numériquement

$$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854 \quad \text{et} \quad \ln 2 \approx 0,6931.$$

Donc

$$A \approx 0,0923.$$

L'unité graphique étant 1 cm sur chaque axe, l'unité d'aire est le centimètre carré.

$$A = \frac{\pi}{4} - \ln 2 \text{ cm}^2 \approx 0,0923 \text{ cm}^2.$$

Correction détaillée des questions Q12 à Q17

Concours d'accès à l'ENSAM - Épreuve de mathématiques 2015

Q12 - Limite d'une suite d'intégrales

On considère

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx, \quad n \geq 1.$$

Nous cherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2.$$

De plus, $x^n \geq 0$. En multipliant l'inégalité par x^n , il vient

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq (\ln 2)x^n.$$

En intégrant membre à membre sur $[0, 1]$, on obtient

$$0 \leq I_n \leq \ln 2 \int_0^1 x^n dx.$$

Or

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Q13 - Équation différentielle avec conditions initiales

L'équation différentielle est

$$(E) : y'' + 4y - 2 = 0,$$

et l'on sait que $x \mapsto \sin^2 x$ est une solution particulière de (E) .

1. Vérification de la solution particulière donnée

Posons $y_p(x) = \sin^2 x$. Grâce à l'identité

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

on obtient

$$y_p'(x) = \sin(2x), \quad y_p''(x) = 2 \cos(2x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p - 2 &= 2 \cos(2x) + 4 \sin^2 x - 2 \\ &= 2 \cos(2x) + 2(1 - \cos(2x)) - 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $\sin^2 x$ est donc bien une solution de (E) .

2. Solution générale de l'équation homogène associée

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0,$$

d'où

$$r = \pm 2i.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y_h(x) = C \cos(2x) + D \sin(2x), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, toutes les solutions de (E) s'écrivent

$$y(x) = \sin^2 x + C \cos(2x) + D \sin(2x).$$

3. Utilisation des conditions géométriques

La courbe passe par $A(0, \sqrt{2})$, donc

$$y(0) = \sqrt{2}.$$

Or

$$y(0) = \sin^2(0) + C \cos(0) + D \sin(0) = C.$$

Ainsi

$$C = \sqrt{2}.$$

La tangente en A a pour coefficient directeur 1, ce qui signifie

$$y'(0) = 1.$$

Dérivons :

$$y'(x) = \sin(2x) - 2C \sin(2x) + 2D \cos(2x).$$

En $x = 0$,

$$y'(0) = 2D.$$

Donc

$$2D = 1 \quad \implies \quad D = \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$y_0(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Q14 - Plan tangent à une sphère

La sphère S a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0.$$

Nous allons déterminer le plan tangent sans utiliser la notion de gradient.

1. Détermination du centre de la sphère

Complétons les carrés dans l'équation de S :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 &= 0, \\ (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 &= 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, la sphère S a pour centre

$$C(1, 1, 0)$$

et pour rayon $\sqrt{2}$.

2. Direction normale au plan tangent

Le plan tangent à une sphère en un point est perpendiculaire au rayon passant par ce point.

Au point de tangence $O(0, 0, 0)$, le vecteur

$$\overrightarrow{CO} = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 0) = (-1, -1, 0)$$

est donc un vecteur normal au plan tangent P .

Une équation d'un plan passant par $O(0, 0, 0)$ et ayant pour vecteur normal $(-1, -1, 0)$ est de la forme

$$-1(x - 0) - 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0.$$

Cela donne

$$-x - y = 0.$$

En multipliant les deux membres par -1 , on obtient finalement

$$(E) : x + y = 0.$$

Q15 - Calcul d'un reste modulo 27

On sait que

$$10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous cherchons le reste de

$$10^{100} + 100^{10}$$

dans la division par 27.

Tout d'abord,

$$100 = 3 \times 33 + 1.$$

Donc

$$10^{100} = 10^{3 \times 33 + 1} = (10^3)^{33} \times 10.$$

Comme $10^3 \equiv 1 \pmod{27}$,

$$10^{100} \equiv 10 \pmod{27}.$$

Ensuite,

$$100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20}.$$

Or

$$20 = 3 \times 6 + 2,$$

donc

$$10^{20} = (10^3)^6 \times 10^2 \equiv 10^2 \pmod{27}.$$

Mais

$$10^2 = 100 \equiv 19 \pmod{27}.$$

Ainsi

$$10^{100} + 100^{10} \equiv 10 + 19 = 29 \equiv 2 \pmod{27}.$$

Le reste euclidien, compris entre 0 et 26, vaut donc

$$r = 2.$$

Q16 - Résolution d'une équation diophantienne

Nous devons résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$x^2 - 2y^2 + xy + 2 = 0.$$

Considérons cette équation comme une équation du second degré en x :

$$x^2 + yx + (2 - 2y^2) = 0.$$

Pour qu'elle admette une solution entière x , son discriminant doit être le carré d'un entier. Le discriminant vaut

$$\begin{aligned} \Delta &= y^2 - 4(2 - 2y^2) \\ &= y^2 - 8 + 8y^2 \\ &= 9y^2 - 8. \end{aligned}$$

Il existe donc un entier m tel que

$$m^2 = 9y^2 - 8.$$

D'où

$$9y^2 - m^2 = 8,$$

soit, par différence de deux carrés,

$$(3y - m)(3y + m) = 8.$$

Posons

$$A = 3y - m, \quad B = 3y + m.$$

Alors $AB = 8$. De plus,

$$A + B = 6y$$

est pair, donc A et B ont la même parité. Puisque leur produit vaut 8, ils doivent être tous les deux pairs.

Les couples de diviseurs de 8 ayant la même parité sont

$$(A, B) \in \{(2, 4), (4, 2), (-2, -4), (-4, -2)\}.$$

Or

$$y = \frac{A+B}{6}, \quad m = \frac{B-A}{2}.$$

On obtient alors $y = 1$ ou $y = -1$.

Cas 1 : $y = 1$

L'équation initiale devient

$$x^2 + x = 0,$$

soit

$$x(x+1) = 0.$$

Ainsi

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Cas 2 : $y = -1$

L'équation initiale devient

$$x^2 - x = 0,$$

soit

$$x(x-1) = 0.$$

Ainsi

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$S = \{(0, 1), (-1, 1), (0, -1), (1, -1)\}.$$

Q17 - Probabilité d'obtenir une pièce bonne et rejetée

Notons :

- B : « la pièce est bonne » ;
- D : « la pièce est défectueuse » ;
- R : « la pièce est rejetée » ;
- A : « la pièce est acceptée ».

L'usine produit 2 % de pièces défectueuses, donc

$$P(D) = 0,02.$$

Par conséquent,

$$P(B) = 1 - P(D) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

On sait que 97 % des pièces bonnes sont acceptées :

$$P(A | B) = 0,97.$$

Une pièce bonne est soit acceptée, soit rejetée. Donc

$$P(R | B) = 1 - P(A | B) = 1 - 0,97 = 0,03.$$

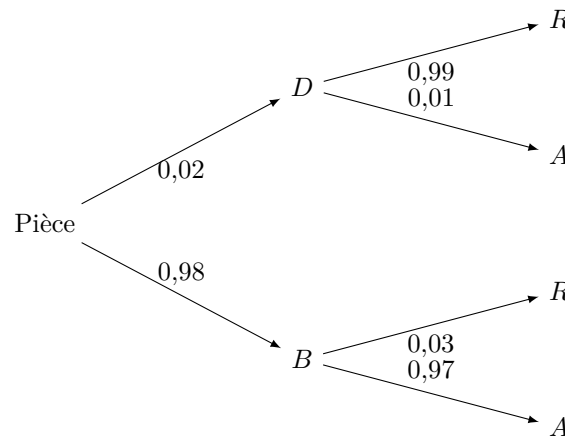
De même, 99 % des pièces défectueuses sont rejetées :

$$P(R | D) = 0,99,$$

d'où

$$P(A | D) = 1 - 0,99 = 0,01.$$

On peut représenter toutes les données par l'arbre pondéré suivant :



L'événement demandé est « obtenir une pièce bonne et rejetée ». Il correspond au chemin

$$B \longrightarrow R.$$

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches. Ainsi,

$$P(B \cap R) = P(B) P(R | B).$$

Donc

$$P(B \cap R) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294.$$

Sous forme de pourcentage,

$$0,0294 = 2,94 \, \%.$$

$P = 0,0294 = 2,94 \, \%.$

Résumé des réponses

Q12	$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$
Q13	$y_0(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x).$
Q14	$(E) : x + y = 0.$
Q15	$r = 2.$
Q16	$S = \{(0, 1), (-1, 1), (0, -1), (1, -1)\}.$
Q17	$P = 0,0294 = 2,94 \, \%.$

Partie II : Questions à choix multiples

Correction complète et détaillée des questions Q18 et Q19

Une réponse correcte : 2 points ; aucune réponse : 0 point ; plusieurs réponses ou une réponse fausse : -1 point.

Question 18

Énoncé. Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'affirmation correcte parmi les quatre propositions suivantes :

- 1) $A^3 \neq 2I$;
- 2) A est non inversible ;
- 3) la famille $\{I, A^3\}$ est libre dans $M_3(\mathbb{R})$;
- 4) A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$.

Méthode

Pour choisir la bonne réponse, il suffit de calculer successivement A^2 puis A^3 . La relation obtenue permettra à la fois de décider si A est inversible et d'examiner la liberté de la famille $\{I, A^3\}$.

1. Calcul de A^2

On multiplie A par elle-même :

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons chaque coefficient à l'aide du produit « ligne par colonne ».

Première ligne :

$$\begin{aligned} (A^2)_{11} &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0, \\ (A^2)_{12} &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2, \\ (A^2)_{13} &= 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Deuxième ligne :

$$\begin{aligned} (A^2)_{21} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \\ (A^2)_{22} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\ (A^2)_{23} &= 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

Troisième ligne :

$$(A^2)_{31} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$(A^2)_{32} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$(A^2)_{33} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Ainsi,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de A^3

On a

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons à nouveau les coefficients :

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3. \end{aligned}$$

Donc

$$A^3 = 2I_3.$$

3. Analyse des quatre propositions

Proposition 1 : $A^3 \neq 2I$.

Cette affirmation est fausse, puisque nous venons précisément d'établir que

$$A^3 = 2I_3.$$

Proposition 2 : A est non inversible.

La relation $A^3 = 2I_3$ donne

$$A \left(\frac{1}{2} A^2 \right) = \frac{1}{2} A^3 = \frac{1}{2} (2I_3) = I_3.$$

De même,

$$\left(\frac{1}{2} A^2 \right) A = \frac{1}{2} A^3 = I_3.$$

Ainsi, la matrice $\frac{1}{2} A^2$ est à la fois un inverse à droite et un inverse à gauche de A . Par conséquent, A est inversible. La proposition 2 est donc fausse.

Proposition 3 : $\{I, A^3\}$ est une famille libre.

Comme $A^3 = 2I_3$, les deux matrices I_3 et A^3 sont proportionnelles. En effet,

$$A^3 - 2I_3 = 0.$$

Il existe donc une relation linéaire non triviale entre elles : les coefficients 1 et -2 ne sont pas tous les deux nuls. La famille $\{I_3, A^3\}$ est donc liée, et non libre. La proposition 3 est fausse.

Proposition 4 : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$.

D'après le calcul précédent,

$$A \left(\frac{1}{2}A^2 \right) = \left(\frac{1}{2}A^2 \right) A = I_3.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2.$$

Cette proposition est vraie.

Réponse à Q18 : la quatrième proposition est la seule correcte :

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}A^2.$$

Plus explicitement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 19

Énoncé. On considère l'espace vectoriel réel

$$E = \left\{ f : x \mapsto (ax + b)e^{2x} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit deux éléments de E par

$$f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = xe^{2x},$$

et l'on pose $B = \{f_1, f_2\}$. Enfin,

$$g(x) = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2} \right) e^{2t} dt.$$

Déterminer l'affirmation correcte parmi les quatre propositions suivantes :

- 1) les vecteurs f_1 et f_2 sont liés ;
- 2) $g \notin E$;
- 3) B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
- 4) B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérification que $B = \{f_1, f_2\}$ est une base de E

Tout élément f de E s'écrit, pour certains réels a et b ,

$$f(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

Or

$$(ax + b)e^{2x} = axe^{2x} + be^{2x} = bf_1(x) + af_2(x).$$

Ainsi, tout élément de E est une combinaison linéaire de f_1 et f_2 . La famille B est donc génératrice de E .

Vérifions maintenant qu'elle est libre. Supposons que deux réels α et β vérifient

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0_E.$$

Cela signifie que, pour tout réel x ,

$$\alpha e^{2x} + \beta x e^{2x} = 0.$$

On factorise par e^{2x} :

$$(\alpha + \beta x)e^{2x} = 0.$$

Comme $e^{2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\alpha + \beta x = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, on trouve $\alpha = 0$. Puis, en prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = 0$.

La seule relation linéaire entre f_1 et f_2 est donc la relation triviale. La famille B est libre.

Puisque B est à la fois libre et génératrice de E , nous avons

$B = \{f_1, f_2\} \text{ est une base de } E.$

2. Calcul explicite de la fonction g

Nous devons calculer

$$g(x) = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2t} dt.$$

Cherchons une primitive de l'intégrande. Observons que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2} e^{2t} \right) = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{t}{2} \cdot 2e^{2t} = \left(t + \frac{1}{2} \right) e^{2t}.$$

Ainsi, une primitive de $\left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2t}$ est

$$F(t) = \frac{t}{2} e^{2t}.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[\frac{t}{2} e^{2t} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{0}{2} e^0 \\ &= \frac{x}{2} e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc

$$g(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} = \frac{1}{2} f_2(x).$$

Cette égalité montre immédiatement que $g \in E$.

3. Coordonnées de g dans la base B

Par définition, les coordonnées de g dans la base ordonnée $B = (f_1, f_2)$ sont les deux réels λ et μ tels que

$$g = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Or nous avons obtenu

$$g = 0 \cdot f_1 + \frac{1}{2} f_2.$$

Par conséquent,

$$[g]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Analyse des quatre propositions

Proposition 1 : les vecteurs f_1 et f_2 sont liés.

Elle est fausse : nous avons démontré que f_1 et f_2 sont linéairement indépendants.

Proposition 2 : $g \notin E$.

Elle est fausse, car

$$g(x) = \frac{1}{2} x e^{2x},$$

ce qui est bien de la forme $(ax + b)e^{2x}$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$.

Proposition 3 : B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Cette affirmation est vraie : les deux résultats ont été établis séparément.

Proposition 4 : B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Elle est fausse, car le coefficient de f_2 dans l'écriture de g vaut $\frac{1}{2}$, et non 1.

Réponse à Q19 : la troisième proposition est la seule correcte :

$$B \text{ est une base de } E \quad \text{et} \quad [g]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tableau récapitulatif

Question	Résultat essentiel	Bonne réponse
Q18	$A^3 = 2I_3$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$.	Proposition 4
Q19	$B = (f_1, f_2)$ est une base de E et $g = \frac{1}{2}f_2$, donc $[g]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.	Proposition 3

Correction détaillée des questions Q20 à Q23

Partie II – Questions à choix multiples

Q20 – Le disque unité est-il un produit cartésien ?

On considère

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et la proposition

$$P : \quad \ll \text{Il existe } A, B \subset \mathbb{R} \text{ tels que } D = A \times B \gg.$$

1. Ce que signifierait l'égalité $D = A \times B$

Si $D = A \times B$, alors, dès que deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartiennent à D , les coordonnées peuvent être combinées :

$$x_1 \in A, \quad y_2 \in B \quad \implies \quad (x_1, y_2) \in A \times B = D.$$

Or

$$(1, 0) \in D \quad \text{car} \quad 1^2 + 0^2 = 1,$$

et

$$(0, 1) \in D \quad \text{car} \quad 0^2 + 1^2 = 1.$$

Si $D = A \times B$, la première appartenance donnerait $1 \in A$ et la seconde donnerait $1 \in B$. On devrait donc avoir

$$(1, 1) \in A \times B = D.$$

Mais

$$1^2 + 1^2 = 2 > 1,$$

donc

$$(1, 1) \notin D.$$

Nous obtenons une contradiction.

Par conséquent, il n'existe pas de parties A, B de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.

P est fausse.

La bonne réponse est donc la **troisième proposition**.

Q21 – Étude de l'équation $f(x) = 1 - x^n$

On suppose que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone, avec

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1,$$

et $n \geq 1$.

1. Sens de variation de f

Puisque $0 < 1$ et $f(0) = 0 < f(1) = 1$, la fonction f ne peut pas être strictement décroissante. Elle est donc **strictement croissante** sur $[0, 1]$.

La fonction

$$\varphi(x) = 1 - x^n$$

est, quant à elle, strictement décroissante sur $[0, 1]$: si $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, alors $x_1^n < x_2^n$, donc

$$1 - x_1^n > 1 - x_2^n.$$

Ainsi, l'équation

$$f(x) = 1 - x^n$$

ne peut avoir **au plus qu'une solution**. En effet, si $x_1 < x_2$ étaient deux solutions, alors

$$f(x_1) < f(x_2)$$

par croissance stricte de f , tandis que

$$1 - x_1^n > 1 - x_2^n,$$

ce qui est incompatible avec $f(x_i) = 1 - x_i^n$.

2. L'existence n'est pas garantie

L'énoncé ne suppose pas que f est continue. On ne peut donc pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Construisons un exemple de fonction satisfaisant toutes les hypothèses mais pour laquelle l'équation n'a aucune solution :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4} + \frac{x}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a

$$f(x) \leq \frac{1}{8},$$

alors que, puisque $n \geq 1$,

$$1 - x^n \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$f(x) < 1 - x^n.$$

Pour $\frac{1}{2} < x \leq 1$, on a

$$f(x) > \frac{7}{8},$$

et

$$1 - x^n < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2}.$$

Donc encore

$$f(x) > 1 - x^n.$$

L'équation n'a donc aucune solution pour cet exemple. En revanche, pour $f(x) = x$, elle possède une unique solution, car $x = 1 - x^n$ admet une solution dans $(0, 1)$.

Les hypothèses permettent donc seulement d'affirmer qu'il y a *au plus* une solution, mais elles ne permettent pas de décider entre « aucune solution » et « une solution unique ».

Aucune des trois premières réponses n'est toujours vraie.

La bonne réponse est la **quatrième proposition : aucune des trois réponses**.

Q22 – Bornes de $f(x) = x - \ln|2e^x - 1|$

La fonction est définie lorsque

$$2e^x - 1 \neq 0 \iff x \neq -\ln 2.$$

1. Comportement au voisinage de $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a $e^x \rightarrow 0$, donc

$$2e^x - 1 \rightarrow -1 \quad \text{et} \quad |2e^x - 1| \rightarrow 1.$$

Par continuité du logarithme en 1,

$$\ln|2e^x - 1| \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = x - \ln|2e^x - 1| \rightarrow -\infty.$$

Donc f n'est pas bornée au voisinage de $-\infty$.

2. Comportement au voisinage de $+\infty$

Pour x suffisamment grand, $2e^x - 1 > 0$, et l'on factorise e^x :

$$2e^x - 1 = e^x(2 - e^{-x}).$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln[e^x(2 - e^{-x})] \\ &= x - (\ln(e^x) + \ln(2 - e^{-x})) \\ &= x - (x + \ln(2 - e^{-x})) \\ &= -\ln(2 - e^{-x}). \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc

$$f(x) \rightarrow -\ln 2.$$

Une fonction qui admet une limite réelle finie en $+\infty$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

f est bornée au voisinage de $+\infty$.

La bonne réponse est la **troisième proposition**.

Q23 – Étude de la courbe de $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} + \ln x$

Le domaine de définition est

$$D_f =]0, +\infty[.$$

1. Comportement en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{e^{x-1}}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \rightarrow +\infty,$$

donc

$$f(x) \rightarrow +\infty.$$

Pour connaître une éventuelle direction asymptotique, calculons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x^2} + \frac{\ln x}{x}.$$

Or

$$\frac{e^{x-1}}{x^2} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0,$$

d'où

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty.$$

La courbe n'a donc pas, en $+\infty$, une branche parabolique de direction asymptotique $y = 0$: une telle direction horizontale demanderait $f(x)/x \rightarrow 0$.

Elle n'admet pas non plus d'asymptote oblique $y = ax + b$, car une telle asymptote imposerait l'existence d'une limite réelle finie

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

ce qui n'est pas le cas.

2. Signe de f sur $]0, +\infty[$

Pour $x \geq 1$, les deux termes sont non négatifs :

$$\frac{e^{x-1}}{x} > 0, \quad \ln x \geq 0.$$

Donc $f(x) > 0$.

Considérons maintenant $0 < x < 1$ et posons

$$t = -\ln x > 0, \quad x = e^{-t}.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{e^{x-1}}{x} > -\ln x \\ &\iff e^{x-1+t} > t \\ &\iff x - 1 + t > \ln t. \end{aligned}$$

Puisque $x = e^{-t}$, il suffit d'étudier

$$t + e^{-t} - 1 - \ln t.$$

Or, pour tout $t > 0$, l'inégalité classique

$$\ln t \leq t - 1$$

donne

$$t + e^{-t} - 1 - \ln t = (t - 1 - \ln t) + e^{-t} > 0.$$

Ainsi

$$t + e^{-t} - 1 > \ln t,$$

et donc $f(x) > 0$ aussi pour $0 < x < 1$.

Finalement,

$$\forall x > 0, \quad f(x) > 0.$$

La courbe C_f est donc entièrement située au-dessus de la droite $y = 0$.

C_f est au-dessus de la droite $y = 0$.

La bonne réponse est la **troisième proposition**.

Tableau récapitulatif

Question	Réponse correcte	Choix
Q20	P est fausse.	3
Q21	Aucune des trois premières réponses n'est garantie.	4
Q22	f est bornée au voisinage de $+\infty$.	3
Q23	C_f est au-dessus de la droite $y = 0$.	3

Correction détaillée des questions Q24 et Q25

Partie II : Questions à choix multiples

Q24. Résolution de l'équation trigonométrique

Énoncé. Déterminer le nombre de solutions, dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, de l'équation

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1.$$

1. Transformation du membre de gauche

On part de l'identité fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

En élevant cette égalité au carré, on obtient

$$\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^2 = 1.$$

En développant :

$$\cos^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^4(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1 - 2\sin^2(x)\cos^2(x).$$

L'équation proposée devient donc

$$1 - 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1.$$

En retranchant 1 aux deux membres :

$$-2\sin^2(x)\cos^2(x) = 0.$$

Comme $-2 \neq 0$, cela équivaut à

$$\sin^2(x)\cos^2(x) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Par conséquent,

$$\sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = 0.$$

2. Résolution dans $[-\pi, \pi]$

Premier cas : $\sin(x) = 0$.

On sait que

$$\sin(x) = 0 \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, cela donne

$$x \in \{-\pi, 0, \pi\}.$$

Deuxième cas : $\cos(x) = 0$.

On sait que

$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, cela donne

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}.$$

Il y a donc exactement

5 solutions

.

Les choix proposés sont : une infinité de solutions, 8 solutions, 4 solutions, aucune solution. Aucun de ces choix ne correspond au résultat exact 5. La réponse correcte au QCM est donc : **aucune des réponses proposées n'est correcte**. Le dernier choix « aucune solution » ne signifie pas « aucune des propositions » : il est lui-même faux, car l'équation possède cinq solutions.

Q25. Étude du nombre $N = a^4 + 4b^4$

Énoncé. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose

$$N = a^4 + 4b^4.$$

On cherche laquelle des affirmations proposées est toujours vraie.

1. Factorisation de Sophie Germain

On remarque que

$$4b^4 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4b^4.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} N &= a^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4b^4 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une différence de deux carrés. On utilise

$$X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y).$$

Avec $X = a^2 + 2b^2$ et $Y = 2ab$, on obtient

$$\begin{aligned} N &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \\ &= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2). \end{aligned}$$

Or

$$a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2$$

et

$$a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2.$$

Par conséquent,

$$N = \left((a - b)^2 + b^2\right)\left((a + b)^2 + b^2\right).$$

Cette identité est connue sous le nom d'identité de Sophie Germain.

2. Analyse des deux inégalités proposées

Posons

$$A = (a - b)^2 + b^2, \quad B = (a + b)^2 + b^2.$$

La factorisation précédente donne

$$N = AB.$$

Comme $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on a

$$B = (a + b)^2 + b^2 \geq (1 + 1)^2 + 1^2 = 5.$$

Donc $B > 1$, et par conséquent

$$N = AB \geq A.$$

L'affirmation

$$N < (a - b)^2 + b^2$$

est donc fausse.

D'autre part,

$$A = (a - b)^2 + b^2 \geq b^2 \geq 1.$$

Il en résulte

$$N = AB \geq B.$$

L'affirmation

$$N < (a + b)^2 + b^2$$

est donc également fausse.

3. Le nombre N est-il toujours premier ?

Prenons par exemple

$$a = 1, \quad b = 2.$$

Alors

$$N = 1^4 + 4 \times 2^4 = 1 + 4 \times 16 = 65 = 5 \times 13.$$

Le nombre 65 n'est pas premier. L'affirmation « N est premier » n'est donc pas toujours vraie.

4. Le nombre N n'est-il jamais premier ?

Prenons maintenant

$$a = 1, \quad b = 1.$$

Alors

$$N = 1^4 + 4 \times 1^4 = 5,$$

et 5 est premier.

L'affirmation « N n'est pas premier » n'est donc pas toujours vraie non plus.

Plus précisément, grâce à la factorisation,

$$N = ((a - b)^2 + b^2)((a + b)^2 + b^2).$$

Le second facteur est toujours au moins égal à 5. Le premier facteur vaut 1 exactement lorsque

$$(a - b)^2 + b^2 = 1.$$

Puisque b est un entier naturel non nul, $b^2 \geq 1$. L'égalité impose donc

$$b = 1 \quad \text{et} \quad a - b = 0,$$

d'où

$$a = b = 1.$$

Ainsi :

- si $(a, b) = (1, 1)$, alors $N = 5$ est premier ;
- pour tout autre couple d'entiers naturels non nuls, les deux facteurs sont strictement supérieurs à 1, donc N est composé.

Conclusion rigoureuse pour Q25. Aucune des quatre affirmations proposées n'est vraie pour tous les entiers naturels non nuls a et b . Le QCM contient donc une anomalie, sauf si l'énoncé voulait exclure le cas $(a, b) = (1, 1)$. Dans ce cas seulement, la réponse attendue serait « N n'est pas premier ».

Tableau récapitulatif

Question	Conclusion
Q24	L'équation possède exactement 5 solutions dans $[-\pi, \pi]$. Aucun choix proposé ne convient.
Q25	Aucune proposition n'est toujours vraie. En particulier, $N = 5$ pour $(a, b) = (1, 1)$, tandis que N est composé pour tout autre couple.

Remarque concernant la question Q24

La question Q24 semble comporter une légère incohérence. On a :

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$$

ce qui équivaut à :

$$\sin(2x) = 0,$$

d'où $x = k\pi/2$, k entier. Sur l'intervalle fermé $[-\pi, \pi]$, les solutions sont : $-\pi$, $-\pi/2$, 0 , $\pi/2$ et π . Il y a donc exactement cinq solutions. Or aucune des réponses proposées ne correspond à cinq solutions. En revanche, si l'intervalle avait été $] -\pi, \pi]$ (ou encore $[-\pi, \pi[$), une seule des deux extrémités serait exclue et il resterait exactement quatre solutions, ce qui correspond à l'une des réponses proposées. Il est donc possible qu'une coquille typographique se soit glissée dans l'énoncé et que l'intervalle ait été recopié avec une extrémité fermée au lieu d'être ouverte. Cette remarque constitue une hypothèse plausible et non une certitude, faute de disposer de l'énoncé officiel original.