

CONCOURS D'ACCÈS À L'ENSAM-MEKNÈS ET À L'ENSAM-CASABLANCA

Épreuve de Mathématiques : Filière Sciences Mathématiques A et B
Vendredi 24 juillet 2015 - Durée : 2 h

Partie I : Questions à réponses précises

Chaque réponse est notée sur 2 pts

	Questions	Réponses
Q1	Soit la proposition $P : \ll \forall a \in \mathbb{R}_+^*, a + \frac{1}{a} \geq 2 \gg$. Donner la négation et le tableau de vérité de la proposition P .	$\neg P : \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } a + \frac{1}{a} < 2.$ La proposition P est vraie, et sa négation est fausse.
Q2	Le code confidentiel d'une carte bancaire est constitué d'un nombre de 4 chiffres non nuls. Combien y a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 1 ?	2048
Q3	Soient les nombres complexes suivants : $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$. Sachant que $a + b = -1$ et $\bar{b} = a$, donner la valeur de la somme $S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.	$S = -\frac{1}{2}$
Q4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$. Donner la forme trigonométrique de $z = \frac{c-a}{b-a}$, et déduire l'angle θ de la rotation qui transforme B en C .	$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$
Q5	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3^{\cos(x)} + 3^{\cos(\pi-x)} + 1 \leq 2\sqrt{3}$.	$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([\beta + 2k\pi, \pi - \beta + 2k\pi] \cup [\pi + \beta + 2k\pi, 2\pi - \beta + 2k\pi])$
Q6	Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; où $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{2x^2}$.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{2x^2} = \frac{3}{4}$
Q7	Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} + 1$ si $x > 0$ et $g(0) = a \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de a pour que g soit continue sur $[0, +\infty[$.	$a = 1$
Q8	Soit $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer f^{-1} .	$D_{f^{-1}} =]0, +\infty[$ et $f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$.
Q9	Déterminer la primitive F de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ qui vaut 1 en e .	$F(x) = \ln(\ln x) + 1$, pour tout $x \in]1, +\infty[$.
Q10	Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$
Q11	Soient $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 1$ cm. Calculer l'aire A de la surface délimitée par C_f et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.	$A = \frac{\pi}{4} - \ln 2 \text{ cm}^2 \approx 0,0923 \text{ cm}^2$
Q12	Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$, $\forall n \geq 1$. Calculer $\lim_n I_n$.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
Q13	Sachant que $x \mapsto \sin^2(x)$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y - 2 = 0$, déterminer la solution particulière y_0 de (E) telle que sa courbe passe par $A(0, \sqrt{2})$ et ayant une tangente en A de coefficient directeur 1.	$y_0(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$
Q14	Soit S la sphère d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$. Déterminer l'équation (E) du plan tangent P à S au point $O(0, 0, 0)$.	$(E) : x + y = 0$
Q15	Sachant que $10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste r de la division euclidienne de $10^{100} + 100^{10}$ par 27.	$r = 2$
Q16	Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 2y^2 + xy + 2 = 0$.	$S = \{(0, 1), (-1, 1), (0, -1), (1, -1)\}$
Q17	Une usine produit des pièces dont 2% sont défectueuses. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces bonnes sont acceptées et 99% des pièces défectueuses sont rejetées. Quelle est la probabilité P d'avoir une pièce bonne et rejetée ?	$P = 0,0294 = 2,94\%$

Partie II : Questions à choix multiples

Une réponse correcte = 2 pts, aucune réponse = 0 pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1 pt

Q18. Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie :

$$A^3 \neq 2I$$

A non inversible

$\{I, A^3\}$ libre dans $M_3(\mathbb{R})$

A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$ ☒

Q19. Soient l'espace vectoriel réel $E = \{f : x \mapsto (ax + b)e^{2x}; a, b \in \mathbb{R}\}$ et f_1 et f_2 les deux éléments de E définis par : $f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$. Soit $B = \{f_1, f_2\}$ et $g : x \mapsto \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right) e^{2t} dt$. Alors

les vecteurs f_1 et f_2 sont liés

$g \notin E$

B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☒

B est une base de E et les coordonnées de g dans B sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q20. On considère le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et la proposition $P : \ll \exists A, B \subset \mathbb{R}; D = A \times B \gg$. Alors

$(1, 0) \in D$ et P est vraie

$(0, 1) \in D$ et P est vraie

P est fausse ☒

aucune des trois réponses

Q21. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. L'équation : $f(x) = 1 - x^n, n \geq 1$

n'a pas de solution

admet deux solutions distinctes

admet une solution unique

aucune des trois réponses ☒

Q22. Soit $f(x) = x - \ln |2e^x - 1|$. Alors

f bornée au voisinage de $-\infty$

f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$

f bornée au voisinage de $+\infty$ ☒

aucune des trois réponses

Q23. Soit $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x} + \ln(x)$. La courbe représentative C_f de f

admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = 0$

admet une asymptote oblique en $+\infty$

est au-dessus de la droite $y = 0$ ☒

aucune des trois réponses

Q24. L'équation $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$ admet dans $[-\pi, \pi]$

5 solutions.

une infinité de solutions

8 solutions

4 solutions

aucune solution

Q25. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors le nombre $N = a^4 + 4b^4$ vérifie :

$$N < (a - b)^2 + b^2$$

$$N < (a + b)^2 + b^2$$

N est premier

N n'est pas premier

Conclusion rigoureuse pour Q25. Aucune des quatre affirmations proposées n'est vraie pour tous les entiers naturels non nuls a et b . Le QCM contient donc une anomalie, sauf si l'énoncé voulait exclure le cas $(a, b) = (1, 1)$. Dans ce cas seulement, la réponse attendue serait « N n'est pas premier ».