

Correction complète et très détaillée

Méthode du nombre dérivé

Énoncé

On suppose que

$$a_n \neq 1 \quad \text{pour tout entier } n$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

L'entier strictement positif k étant donné, calculer

$$Q_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + a_n^2 + a_n^3 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

1. Première lecture de l'expression

Nous commençons par étudier séparément le numérateur et le dénominateur. Puisque $a_n \rightarrow 1$, les règles usuelles sur les limites donnent, pour tout entier $j \geq 1$,

$$a_n^j \longrightarrow 1^j = 1.$$

Ainsi,

$$a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k \longrightarrow \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ termes}} = k.$$

Par conséquent,

$$a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k \longrightarrow k - k = 0.$$

D'autre part,

$$a_n - 1 \longrightarrow 1 - 1 = 0.$$

L'expression est donc, au premier regard, de la forme indéterminée

$$\frac{0}{0}.$$

Cette observation ne donne pas encore la limite, mais elle indique qu'il faut chercher une transformation plus fine du quotient.

2. Comment reconnaître un nombre dérivé ?

La définition du nombre dérivé d'une fonction f en un réel a est

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

lorsque cette limite existe.

Dans notre quotient, le dénominateur est $a_n - 1$. Il joue exactement le rôle de $x - a$ avec

$$x = a_n \quad \text{et} \quad a = 1.$$

Il faut alors vérifier si le numérateur peut s'écrire sous la forme

$$f(a_n) - f(1).$$

Idée directrice

On pose

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k.$$

Alors

$$f(a_n) = a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k$$

et

$$f(1) = 1 + 1^2 + \cdots + 1^k = k.$$

Le numérateur est donc exactement $f(a_n) - f(1)$.

Nous obtenons ainsi l'identité

$$\frac{a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1} = \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}.$$

Or

$$a_n - 1 = a_n - 1,$$

donc le membre de droite est bien le taux d'accroissement de f entre 1 et a_n :

$$\frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}.$$

3. Pourquoi a-t-on le droit de remplacer x par a_n ?

C'est le point de rigueur essentiel.

La fonction f est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1. Par définition,

$$\lim_{x \rightarrow 1, x \neq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1).$$

Posons, pour $x \neq 1$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = f'(1).$$

Comme $a_n \rightarrow 1$ et comme $a_n \neq 1$ pour tout n , la suite $g(a_n)$ est bien définie et, par composition d'une limite avec une suite convergente,

$$g(a_n) \longrightarrow f'(1).$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = f'(1).$$

Ainsi,

$$Q_1 = f'(1).$$

Remarque pédagogique

L'hypothèse $a_n \neq 1$ n'est pas décorative. Elle garantit que le dénominateur $a_n - 1$ n'est jamais nul, donc que le quotient est défini pour chaque n .

4. Calcul détaillé de $f'(1)$

Nous avons défini

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k.$$

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. De plus, pour tout entier $j \geq 1$,

$$(x^j)' = jx^{j-1}.$$

Donc

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1}.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient

$$f'(1) = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + \cdots + k \cdot 1^{k-1}.$$

Comme toute puissance de 1 vaut 1,

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k.$$

5. Calcul de la somme $1 + 2 + \cdots + k$

Posons

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k.$$

Écrivons la même somme dans l'ordre inverse :

$$S = k + (k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1.$$

En additionnant terme à terme les deux égalités, nous obtenons

$$2S = (k+1) + (k+1) + \cdots + (k+1).$$

Il y a exactement k termes égaux à $k+1$, donc

$$2S = k(k+1).$$

Par conséquent,

$$S = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ainsi,

$$f'(1) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Conclusion

On a montré que le quotient proposé est le taux d'accroissement de la fonction

$$f(x) = x + x^2 + \dots + x^k$$

entre 1 et a_n . Puisque $a_n \rightarrow 1$ et $a_n \neq 1$, ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé $f'(1)$. Finalement,

$$Q_1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

6. Rédaction complète, prête à recopier

Posons

$$f(x) = x + x^2 + \cdots + x^k.$$

Alors

$$f(1) = 1 + 1^2 + \cdots + 1^k = k.$$

Par conséquent,

$$\frac{a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1} = \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1}.$$

Or $a_n \rightarrow 1$ et $a_n \neq 1$ pour tout n . Comme f est un polynôme, elle est dérivable en 1. D'après la définition du nombre dérivé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n) - f(1)}{a_n - 1} = f'(1).$$

Ensuite,

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1},$$

donc

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ainsi,

$$Q_1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

7. Vérifications sur quelques valeurs de k

Cas $k = 1$

Le quotient devient

$$\frac{a_n - 1}{a_n - 1} = 1,$$

donc la limite vaut 1. La formule donne

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Cas $k = 2$

Le quotient devient

$$\frac{a_n + a_n^2 - 2}{a_n - 1}.$$

La formule annonce

$$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

En effet, avec $f(x) = x + x^2$, on a $f'(x) = 1 + 2x$, donc $f'(1) = 3$.

Cas $k = 3$

La formule annonce

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

Avec $f(x) = x + x^2 + x^3$, on a

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2,$$

et donc

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Ces vérifications confirment la cohérence du résultat général.

8. Pourquoi cette méthode est particulièrement élégante

La méthode par factorisation est possible, car chaque différence $a_n^j - 1$ est divisible par $a_n - 1$. Cependant, elle oblige à développer plusieurs sommes géométriques. La méthode du nombre dérivé est plus conceptuelle : elle reconnaît immédiatement une structure déjà connue,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

et transforme tout le calcul en une seule dérivation.

Le point-clé à retenir est donc le suivant : lorsqu'un quotient contient un dénominateur de la forme $u_n - a$ et que son numérateur peut s'écrire $f(u_n) - f(a)$, il faut penser à la définition du nombre dérivé de f en a .

Résultat final :

$$Q_1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Limite d'une expression polynomiale

Exercice entièrement corrigé et détaillé

Énoncé

On suppose que

$$a_n \neq 1 \text{ pour tout } n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

L'entier strictement positif k étant donné, calculer

$$Q_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + a_n^2 + a_n^3 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

1. Compréhension de la forme de la limite

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $a_n \rightarrow 1$. Par conséquent,

$$a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k \longrightarrow 1 + 1 + \cdots + 1 - k.$$

La somme $1 + 1 + \cdots + 1$ contient exactement k termes, donc elle vaut k . Ainsi,

$$1 + 1 + \cdots + 1 - k = k - k = 0.$$

D'autre part,

$$a_n - 1 \longrightarrow 1 - 1 = 0.$$

L'expression se présente donc sous la forme indéterminée

$$\frac{0}{0}.$$

On ne peut donc pas remplacer directement a_n par 1. Il faut d'abord transformer algébriquement le quotient.

L'hypothèse $a_n \neq 1$ pour tout n garantit que le dénominateur $a_n - 1$ n'est jamais nul, et que le quotient est bien défini pour chaque entier n .

2. Réécriture essentielle du numérateur

Le numérateur est

$$a_n + a_n^2 + a_n^3 + \cdots + a_n^k - k.$$

Comme k est la somme de k nombres égaux à 1, on peut écrire

$$k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ termes}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k &= (a_n - 1) + (a_n^2 - 1) + \cdots + (a_n^k - 1) \\ &= \sum_{j=1}^k (a_n^j - 1). \end{aligned}$$

Cette écriture est utile parce que chaque différence $a_n^j - 1$ contient le facteur $a_n - 1$.

3. Factorisation de chaque terme

Pour tout réel x et tout entier $j \geq 1$, on dispose de l'identité remarquable

$$x^j - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{j-1}).$$

Justification de cette identité. En développant le membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{j-1}) &= x(1 + x + \cdots + x^{j-1}) - (1 + x + \cdots + x^{j-1}) \\ &= (x + x^2 + \cdots + x^j) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{j-1}). \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux, et il reste seulement

$$x^j - 1.$$

L'identité est donc démontrée.

En prenant $x = a_n$, on obtient, pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$a_n^j - 1 = (a_n - 1)(1 + a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^{j-1}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k &= \sum_{j=1}^k (a_n^j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^k (a_n - 1)(1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1}) \\ &= (a_n - 1) \sum_{j=1}^k (1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1}). \end{aligned}$$

4. Simplification du quotient

Puisque $a_n \neq 1$, on a $a_n - 1 \neq 0$. On peut donc simplifier par le facteur $a_n - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1} &= \frac{(a_n - 1) \sum_{j=1}^k (1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1})}{a_n - 1} \\ &= \sum_{j=1}^k (1 + a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^{j-1}). \end{aligned}$$

Écrivons les premiers termes de cette somme afin de bien voir sa structure :

$$1 + (1 + a_n) + (1 + a_n + a_n^2) + \cdots + (1 + a_n + \cdots + a_n^{k-1}).$$

5. Passage à la limite

Le nombre k est fixé. Il s'agit donc d'une somme finie. Comme $a_n \rightarrow 1$, pour tout entier fixe $r \geq 0$, on a

$$a_n^r \rightarrow 1^r = 1.$$

Par conséquent, pour chaque entier fixe $j \geq 1$,

$$1 + a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^{j-1} \longrightarrow 1 + 1 + 1 + \cdots + 1.$$

Cette dernière somme contient exactement j termes, donc elle tend vers j :

$$1 + a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^{j-1} \longrightarrow j.$$

On peut alors passer à la limite dans la somme finie :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^k (1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k j. \end{aligned}$$

Or la somme des k premiers entiers strictement positifs est

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Donc

$$Q_1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Résultat final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + a_n^2 + a_n^3 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1} = \frac{k(k+1)}{2}$$

6. Pourquoi la somme $1 + 2 + \cdots + k$ vaut-elle $\frac{k(k+1)}{2}$?

Posons

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k.$$

Écrivons la même somme dans l'ordre inverse :

$$S = k + (k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1.$$

En additionnant les deux égalités terme à terme, chaque colonne vaut $k+1$:

$$2S = (k+1) + (k+1) + \cdots + (k+1).$$

Il y a exactement k termes égaux à $k+1$, donc

$$2S = k(k+1),$$

et par conséquent

$$S = \frac{k(k+1)}{2}.$$

7. Vérifications sur quelques valeurs de k

Cas $k = 1$.

$$\frac{a_n - 1}{a_n - 1} = 1,$$

et la formule donne

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Cas $k = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_n^2 - 2}{a_n - 1} &= \frac{(a_n - 1) + (a_n^2 - 1)}{a_n - 1} \\ &= 1 + (a_n + 1) \\ &= a_n + 2 \longrightarrow 3. \end{aligned}$$

La formule donne bien

$$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Cas $k = 3$.

$$\begin{aligned}\frac{a_n + a_n^2 + a_n^3 - 3}{a_n - 1} &= 1 + (1 + a_n) + (1 + a_n + a_n^2) \\ &= 3 + 2a_n + a_n^2 \\ &\longrightarrow 3 + 2 + 1 = 6.\end{aligned}$$

La formule donne bien

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

Ces vérifications confirment la cohérence du résultat général.

8. Lecture intuitive du résultat

Au voisinage de 1, la quantité $a_n^j - 1$ se comporte comme $j(a_n - 1)$. En effet, après division exacte,

$$\frac{a_n^j - 1}{a_n - 1} = 1 + a_n + \cdots + a_n^{j-1} \longrightarrow j.$$

Le numérateur étant la somme des quantités $a_n^j - 1$ pour $j = 1, \dots, k$, le quotient total tend naturellement vers

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Cette interprétation résume l'idée centrale de toute la démonstration.

Étude complète d'une suite définie par récurrence

Question Q2 - Détermination de $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$

Énoncé. Soit (u_n) une suite convergente telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} < u_n < 1.$$

On considère la suite (X_n) définie par

$$X_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}}.$$

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n.$$

1. Analyse préalable de l'expression de récurrence

La relation

$$X_{n+1} = \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}}$$

fait intervenir une fraction. Avant de chercher une limite, il faut donc vérifier trois points essentiels :

- 1) le dénominateur ne s'annule jamais ;
- 2) les termes X_n restent dans un intervalle simple ;
- 3) la suite (X_n) possède bien une limite.

L'idée naturelle est d'étudier, pour deux nombres x et u appartenant à $(0, 1)$, la quantité

$$\Phi(x, u) = \frac{x + u}{1 + xu}.$$

Nous allons montrer que si $0 < x < 1$ et $0 < u < 1$, alors

$$x < \Phi(x, u) < 1.$$

Cette propriété sera ensuite appliquée avec $x = X_n$ et $u = u_{n+1}$.

2. Encadrement fondamental de $\Phi(x, u)$

Supposons que $0 < x < 1$ et $0 < u < 1$.

2.1. Le dénominateur est strictement positif

Puisque $x > 0$ et $u > 0$, on a $xu > 0$, donc

$$1 + xu > 1 > 0.$$

La fraction $\Phi(x, u)$ est donc bien définie.

2.2. Preuve que $\Phi(x, u) < 1$

Calculons la différence entre 1 et $\Phi(x, u)$:

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x, u) &= 1 - \frac{x+u}{1+xu} \\ &= \frac{1+xu-x-u}{1+xu} \\ &= \frac{(1-x)(1-u)}{1+xu}. \end{aligned}$$

Or $0 < x < 1$ donne $1-x > 0$, et $0 < u < 1$ donne $1-u > 0$. De plus, $1+xu > 0$. Par conséquent,

$$1 - \Phi(x, u) > 0,$$

d'où

$$\boxed{\Phi(x, u) < 1.}$$

2.3. Preuve que $\Phi(x, u) > x$

Calculons maintenant la différence $\Phi(x, u) - x$:

$$\begin{aligned} \Phi(x, u) - x &= \frac{x+u}{1+xu} - x \\ &= \frac{x+u-x(1+xu)}{1+xu} \\ &= \frac{x+u-x-x^2u}{1+xu} \\ &= \frac{u(1-x^2)}{1+xu} \\ &= \frac{u(1-x)(1+x)}{1+xu}. \end{aligned}$$

Tous les facteurs du numérateur sont strictement positifs :

$$u > 0, \quad 1-x > 0, \quad 1+x > 0.$$

Le dénominateur est également strictement positif. Ainsi,

$$\Phi(x, u) - x > 0,$$

donc

$$\boxed{\Phi(x, u) > x.}$$

Nous avons donc établi la propriété fondamentale

$$\boxed{0 < x < 1, \quad 0 < u < 1 \quad \implies \quad x < \frac{x+u}{1+xu} < 1.}$$

3. Encadrement de la suite (X_n)

Nous démontrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} < X_n < 1.$$

3.1. Initialisation

Par définition,

$$X_0 = u_0.$$

Or l'hypothèse donne

$$\frac{1}{2} < u_0 < 1.$$

Donc

$$\frac{1}{2} < X_0 < 1.$$

La propriété est vraie au rang 0.

3.2. Hérédité

Supposons qu'à un certain rang n ,

$$\frac{1}{2} < X_n < 1.$$

En particulier, $0 < X_n < 1$. D'autre part, l'hypothèse sur (u_n) donne

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

En appliquant la propriété démontrée précédemment à $x = X_n$ et $u = u_{n+1}$, on obtient

$$X_n < X_{n+1} < 1.$$

Comme $X_n > \frac{1}{2}$, il vient aussi

$$\frac{1}{2} < X_{n+1} < 1.$$

La propriété est donc héréditaire.

3.3. Conclusion de la récurrence

Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} < X_n < 1.}$$

Cette conclusion garantit notamment que tous les dénominateurs

$$1 + X_n u_{n+1}$$

sont strictement positifs. La suite est donc bien définie à tous les rangs.

4. Monotonie et convergence de (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons $X_{n+1} - X_n$:

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} - X_n \\ &= \frac{X_n + u_{n+1} - X_n(1 + X_n u_{n+1})}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{u_{n+1} - X_n^2 u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{u_{n+1}(1 - X_n^2)}{1 + X_n u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Or

$$u_{n+1} > 0, \quad 0 < X_n < 1 \implies 1 - X_n^2 > 0, \quad 1 + X_n u_{n+1} > 0.$$

Il en résulte

$$X_{n+1} - X_n > 0.$$

Ainsi,

$$(X_n) \text{ est strictement croissante.}$$

Par ailleurs, nous avons démontré que $X_n < 1$ pour tout n . La suite est donc majorée par 1.

Une suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel L tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = L \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq L \leq 1.$$

5. Utilisation de la convergence de (u_n)

Puisque (u_n) est convergente, notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Comme

$$\frac{1}{2} < u_n < 1 \quad \text{pour tout } n,$$

le passage à la limite dans cet encadrement donne

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

En particulier,

$$\ell > 0.$$

La suite décalée (u_{n+1}) a la même limite que (u_n) , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Nous pouvons maintenant passer à la limite dans la relation de récurrence

$$X_{n+1} = \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}}.$$

En effet,

$$X_n \rightarrow L, \quad X_{n+1} \rightarrow L, \quad u_{n+1} \rightarrow \ell,$$

et

$$1 + L\ell > 0.$$

Par continuité des opérations usuelles, on obtient

$$L = \frac{L + \ell}{1 + L\ell}.$$

Résolvons cette équation soigneusement. Comme $1 + L\ell > 0$, nous pouvons multiplier les deux membres par ce nombre :

$$L(1 + L\ell) = L + \ell,$$

$$L + L^2\ell = L + \ell,$$

$$L^2\ell = \ell,$$

$$\ell(L^2 - 1) = 0.$$

Or $\ell > 0$, donc $\ell \neq 0$. Par conséquent,

$$L^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$L^2 = 1.$$

Ainsi,

$$L = 1 \quad \text{ou} \quad L = -1.$$

Mais $X_n > \frac{1}{2}$ pour tout n , donc sa limite vérifie $L \geq \frac{1}{2}$. La valeur -1 est impossible. Il reste donc uniquement

$$L = 1.$$

Conclusion finale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 1.$$

6. Deuxième méthode : transformation exacte de la récurrence

Cette seconde méthode confirme le résultat et donne même une estimation quantitative de la vitesse de convergence.

À partir de

$$X_{n+1} = \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}},$$

calculons $1 + X_{n+1}$ et $1 - X_{n+1}$.

D'une part,

$$\begin{aligned} 1 + X_{n+1} &= 1 + \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{1 + X_n u_{n+1} + X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{(1 + X_n)(1 + u_{n+1})}{1 + X_n u_{n+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 1 - X_{n+1} &= 1 - \frac{X_n + u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{1 + X_n u_{n+1} - X_n - u_{n+1}}{1 + X_n u_{n+1}} \\ &= \frac{(1 - X_n)(1 - u_{n+1})}{1 + X_n u_{n+1}}. \end{aligned}$$

En divisant ces deux égalités, on obtient

$$\frac{1 + X_{n+1}}{1 - X_{n+1}} = \frac{1 + X_n}{1 - X_n} \cdot \frac{1 + u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}.$$

Posons

$$Y_n = \frac{1 + X_n}{1 - X_n}.$$

Alors

$$Y_{n+1} = Y_n \frac{1 + u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}.$$

Par itération,

$$Y_n = Y_0 \prod_{j=1}^n \frac{1 + u_j}{1 - u_j}.$$

Or $u_j > \frac{1}{2}$, donc

$$\frac{1 + u_j}{1 - u_j} > \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Par conséquent,

$$Y_n > Y_0 3^n.$$

Ainsi,

$$Y_n \longrightarrow +\infty.$$

Comme

$$Y_n = \frac{1 + X_n}{1 - X_n},$$

on peut résoudre cette relation en X_n :

$$X_n = \frac{Y_n - 1}{Y_n + 1}.$$

Lorsque $Y_n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$X_n \rightarrow 1.$$

Cette méthode fournit aussi

$$1 - X_n = \frac{2}{Y_n + 1} < \frac{2}{Y_0 3^n},$$

ce qui montre que l'écart à 1 décroît au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Remarque pédagogique. La première méthode utilise pleinement l'hypothèse selon laquelle (u_n) est convergente. La deuxième méthode est plus forte : pour conclure que $X_n \rightarrow 1$, elle n'a même pas besoin de la convergence de (u_n) ; l'encadrement $\frac{1}{2} < u_n < 1$ suffit à lui seul.

7. Rédaction synthétique à retenir

On montre par récurrence que $\frac{1}{2} < X_n < 1$. En effet, si $0 < X_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$, alors

$$1 - X_{n+1} = \frac{(1 - X_n)(1 - u_{n+1})}{1 + X_n u_{n+1}} > 0,$$

donc $X_{n+1} < 1$.

De plus,

$$X_{n+1} - X_n = \frac{u_{n+1}(1 - X_n^2)}{1 + X_n u_{n+1}} > 0.$$

Ainsi, (X_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel $L \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell \geq \frac{1}{2} > 0$. En passant à la limite dans la récurrence,

$$L = \frac{L + \ell}{1 + L\ell},$$

d'où

$$\ell(L^2 - 1) = 0.$$

Comme $\ell > 0$ et $L > 0$, on obtient $L = 1$. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 1.$$

Correction très détaillée - Nombres complexes

Condition pour qu'un quotient complexe soit réel

Énoncé. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On pose

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Déterminer la relation entre x et y telle que

$$z \notin \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{z^2 + z + 1}{z - 1} \in \mathbb{R}.$$

1. Traduction des hypothèses

Puisque $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, on peut écrire

$$z = x + iy,$$

où x et y sont deux nombres réels.

L'hypothèse $z \notin \mathbb{R}$ signifie exactement que la partie imaginaire de z n'est pas nulle. Ainsi,

$$y \neq 0.$$

Par ailleurs, $z \neq 1$ garantit que le dénominateur $z - 1$ n'est pas nul, donc que le quotient proposé est bien défini.

2. Développement du numérateur

On calcule d'abord z^2 :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2.$$

Comme $i^2 = -1$, on obtient

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + (x + iy) + 1 \\ &= (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y). \end{aligned}$$

On factorise la partie imaginaire :

$$z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1).$$

Le dénominateur vaut

$$z - 1 = (x - 1) + iy.$$

Ainsi,

$$\frac{z^2 + z + 1}{z - 1} = \frac{(x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1)}{(x - 1) + iy}.$$

3. Rationalisation du dénominateur

Pour faire apparaître explicitement la partie réelle et la partie imaginaire du quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $(x - 1) + iy$, à savoir

$$(x - 1) - iy.$$

On a donc

$$\frac{z^2 + z + 1}{z - 1} = \frac{\left[(x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1) \right] [(x - 1) - iy]}{[(x - 1) + iy] [(x - 1) - iy]}.$$

Le dénominateur est

$$(x - 1)^2 + y^2.$$

Il est strictement positif puisque $z \neq 1$.

Pour alléger les calculs, posons temporairement

$$A = x^2 - y^2 + x + 1, \quad B = y(2x + 1).$$

Alors le produit au numérateur devient

$$\begin{aligned} (A + iB)((x - 1) - iy) &= A(x - 1) - iAy + iB(x - 1) - i^2By \\ &= (A(x - 1) + By) + i(B(x - 1) - Ay). \end{aligned}$$

Ainsi, la partie imaginaire du quotient est

$$\frac{B(x - 1) - Ay}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

4. Condition pour que le quotient soit réel

Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Il faut donc et il suffit que

$$B(x - 1) - Ay = 0.$$

En remplaçant A et B par leurs expressions, on obtient

$$y(2x + 1)(x - 1) - y(x^2 - y^2 + x + 1) = 0.$$

On met y en facteur :

$$y \left[(2x + 1)(x - 1) - (x^2 - y^2 + x + 1) \right] = 0.$$

Or l'hypothèse $z \notin \mathbb{R}$ donne $y \neq 0$. On peut donc diviser par y :

$$(2x + 1)(x - 1) - (x^2 - y^2 + x + 1) = 0.$$

Développons soigneusement :

$$(2x + 1)(x - 1) = 2x^2 - x - 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 - (x^2 - y^2 + x + 1) &= 0, \\ 2x^2 - x - 1 - x^2 + y^2 - x - 1 &= 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x^2 - 2x + y^2 = 2.$$

On complète le carré :

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1.$$

Il vient alors

$$(x - 1)^2 - 1 + y^2 = 2,$$

d'où

$$\boxed{(x - 1)^2 + y^2 = 3.}$$

5. Vérification du caractère nécessaire et suffisant

Nous avons montré que, sous l'hypothèse $y \neq 0$, si

$$\frac{z^2 + z + 1}{z - 1} \in \mathbb{R},$$

alors nécessairement

$$(x - 1)^2 + y^2 = 3.$$

Réciproquement, supposons que

$$y \neq 0 \quad \text{et} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 3.$$

Cette dernière égalité équivaut à

$$x^2 - 2x + y^2 - 2 = 0.$$

Or la partie imaginaire du quotient est proportionnelle à

$$y(x^2 - 2x + y^2 - 2).$$

Elle est donc nulle. Par conséquent,

$$\frac{z^2 + z + 1}{z - 1} \in \mathbb{R}.$$

La condition trouvée est donc bien nécessaire et suffisante.

6. Interprétation géométrique

L'équation

$$(x - 1)^2 + y^2 = 3$$

est l'équation du cercle de centre

$$\Omega(1, 0)$$

et de rayon

$$\sqrt{3}.$$

Cependant, l'énoncé impose $z \notin \mathbb{R}$, donc $y \neq 0$. Il faut par conséquent retirer les deux points du cercle situés sur l'axe réel, à savoir

$$(1 - \sqrt{3}, 0) \quad \text{et} \quad (1 + \sqrt{3}, 0).$$

Remarquons que le point $z = 1$, exclu dès le départ, n'appartient de toute façon pas à ce cercle, puisque

$$(1 - 1)^2 + 0^2 = 0 \neq 3.$$

Conclusion. La relation cherchée entre x et y est

$$(x - 1)^2 + y^2 = 3 \quad \text{avec} \quad y \neq 0.$$

Autrement dit, z décrit le cercle de centre 1 et de rayon $\sqrt{3}$, privé de ses deux points réels.

7. Rédaction condensée prête à recopier

Écrivons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $z \notin \mathbb{R}$, on a $y \neq 0$. On calcule

$$z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1)$$

et

$$z - 1 = (x - 1) + iy.$$

Après multiplication par le conjugué $(x - 1) - iy$, la partie imaginaire de

$$\frac{z^2 + z + 1}{z - 1}$$

est

$$\frac{y(x^2 - 2x + y^2 - 2)}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Le dénominateur étant non nul et $y \neq 0$, le quotient est réel si et seulement si

$$x^2 - 2x + y^2 - 2 = 0,$$

soit

$$(x - 1)^2 + y^2 = 3.$$

Avec $y \neq 0$, il s'agit du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$, privé de ses deux points situés sur l'axe réel.

Correction très détaillée de la question Q4

Détermination d'un lieu géométrique dans le plan complexe

Énoncé

Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer Γ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient

$$|z - a| = |2z - a|.$$

1. Traduction géométrique de l'équation

Dans le plan complexe, si A est le point d'affixe a et M le point d'affixe z , alors

$$|z - a| = AM.$$

Le premier membre représente donc la distance du point M au point A .

Pour le second membre, on cherche à le mettre sous la forme d'un nombre réel positif multiplié par une distance. On écrit

$$2z - a = 2 \left(z - \frac{a}{2} \right).$$

En utilisant la propriété $|\lambda w| = |\lambda| |w|$, on obtient

$$|2z - a| = \left| 2 \left(z - \frac{a}{2} \right) \right| = 2 \left| z - \frac{a}{2} \right|.$$

Si B est le point d'affixe $\frac{a}{2}$, alors

$$\left| z - \frac{a}{2} \right| = BM.$$

Ainsi, l'équation initiale devient

$$AM = 2BM.$$

Le lieu recherché est donc l'ensemble des points M dont la distance à A est le double de leur distance à B . Il s'agit d'un cercle d'Apollonius lorsque $A \neq B$, c'est-à-dire lorsque $a \neq 0$. Toutefois, pour déterminer précisément son centre et son rayon, et pour traiter correctement le cas $a = 0$, nous allons effectuer un calcul algébrique complet.

2. Étude du cas particulier $a = 0$

Si $a = 0$, l'équation devient

$$|z| = |2z|.$$

Or

$$|2z| = 2|z|.$$

Donc

$$|z| = 2|z|.$$

En soustrayant $|z|$ aux deux membres, on trouve

$$|z| = 0.$$

Un nombre complexe a un module nul si et seulement s'il est nul. Par conséquent,

$$z = 0.$$

Ainsi, lorsque $a = 0$, le lieu est réduit à un seul point : l'origine O .

$$a = 0 \implies \Gamma = \{O\}.$$

3. Étude du cas général $a \neq 0$

Supposons désormais $a \neq 0$.

Nous partons de

$$|z - a| = |2z - a|.$$

Les deux membres étant positifs ou nuls, cette égalité est équivalente à l'égalité de leurs carrés :

$$|z - a|^2 = |2z - a|^2.$$

Rappelons que, pour tout nombre complexe u ,

$$|u|^2 = u\bar{u}.$$

Ainsi,

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = (2z - a)(2\bar{z} - \bar{a}).$$

Développons soigneusement chaque membre.

D'une part,

$$\begin{aligned} (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + a\bar{a} \\ &= |z|^2 - z\bar{a} - a\bar{z} + |a|^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (2z - a)(2\bar{z} - \bar{a}) &= 4z\bar{z} - 2z\bar{a} - 2a\bar{z} + a\bar{a} \\ &= 4|z|^2 - 2z\bar{a} - 2a\bar{z} + |a|^2. \end{aligned}$$

L'égalité devient donc

$$|z|^2 - z\bar{a} - a\bar{z} + |a|^2 = 4|z|^2 - 2z\bar{a} - 2a\bar{z} + |a|^2.$$

Les termes $|a|^2$ s'éliminent. En regroupant tous les termes dans un même membre, on obtient

$$3|z|^2 - z\bar{a} - a\bar{z} = 0.$$

Or

$$z\bar{a} + a\bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z\bar{a}).$$

Par conséquent,

$$3|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{a}) = 0.$$

4. Mise sous la forme d'une équation de cercle

Nous voulons faire apparaître une expression de la forme

$$|z - z_0|^2 = R^2.$$

Calculons

$$\left| z - \frac{a}{3} \right|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| z - \frac{a}{3} \right|^2 &= \left(z - \frac{a}{3} \right) \left(\bar{z} - \frac{\bar{a}}{3} \right) \\ &= |z|^2 - \frac{1}{3}z\bar{a} - \frac{1}{3}a\bar{z} + \frac{|a|^2}{9} \\ &= |z|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z\bar{a}) + \frac{|a|^2}{9}. \end{aligned}$$

D'après l'équation obtenue précédemment,

$$3|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{a}) = 0,$$

donc, en divisant par 3,

$$|z|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z\bar{a}) = 0.$$

Ainsi,

$$\left| z - \frac{a}{3} \right|^2 = \frac{|a|^2}{9}.$$

Puisque les deux membres sont positifs ou nuls, on peut prendre la racine carrée :

$$\left| z - \frac{a}{3} \right| = \frac{|a|}{3}.$$

Cette dernière relation est exactement l'équation d'un cercle de centre le point C d'affixe

$$\frac{a}{3}$$

et de rayon

$$\frac{|a|}{3}.$$

$$3$$

Résultat final

On distingue deux cas :

$$\begin{cases} \text{si } a = 0, & \Gamma = \{O\}, \\ \text{si } a \neq 0, & \Gamma \text{ est le cercle de centre d'affixe } \frac{a}{3} \\ & \text{et de rayon } \frac{|a|}{3}. \end{cases}$$

De manière unifiée, l'équation du lieu peut s'écrire

$$\left| z - \frac{a}{3} \right| = \frac{|a|}{3}.$$

Lorsque $a = 0$, ce « cercle » a un rayon nul et se réduit au point O .

5. Vérification directe du résultat

Supposons que

$$\left| z - \frac{a}{3} \right| = \frac{|a|}{3}.$$

En élevant au carré et en développant, on retrouve

$$3|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{a}) = 0.$$

Cette relation est équivalente à

$$|z - a|^2 = |2z - a|^2.$$

Comme les modules sont positifs ou nuls, cela entraîne

$$|z - a| = |2z - a|.$$

La condition obtenue est donc bien nécessaire et suffisante.

6. Interprétation géométrique complémentaire

Lorsque $a \neq 0$, notons A le point d'affixe a , B le point d'affixe $a/2$ et C le point d'affixe $a/3$.

Les points O , C , B et A sont alignés, car leurs affixes sont des multiples réels de a . De plus,

$$OC = \frac{|a|}{3}.$$

Or le rayon du cercle est également $|a|/3$. Le cercle passe donc par l'origine O .

Il passe également par le point d'affixe $2a/3$, car

$$\left| \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} \right| = \frac{|a|}{3}.$$

Le segment reliant les points d'affixes 0 et $2a/3$ est donc un diamètre du cercle.

Remarque importante

Il ne faut pas oublier le cas $a = 0$. Dans ce cas, les deux points A et B coïncident avec l'origine et le lieu n'est plus un cercle de rayon strictement positif : il se réduit au seul point O .

7. Rédaction courte à retenir

On a

$$|z - a| = |2z - a|.$$

En élevant au carré :

$$\begin{aligned} (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= (2z - a)(2\bar{z} - \bar{a}), \\ |z|^2 - z\bar{a} - a\bar{z} + |a|^2 &= 4|z|^2 - 2z\bar{a} - 2a\bar{z} + |a|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$3|z|^2 - z\bar{a} - a\bar{z} = 0.$$

Or

$$\left| z - \frac{a}{3} \right|^2 = |z|^2 - \frac{1}{3}(z\bar{a} + a\bar{z}) + \frac{|a|^2}{9}.$$

Il vient alors

$$\left| z - \frac{a}{3} \right|^2 = \frac{|a|^2}{9},$$

d'où

$$\left| z - \frac{a}{3} \right| = \frac{|a|}{3}.$$

Ainsi, Γ est le cercle de centre d'affixe $a/3$ et de rayon $|a|/3$; pour $a = 0$, il est réduit à l'origine.

Exercice Q4 - Lieu géométrique dans le plan complexe

Correction complète par la méthode algébrique

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble Γ des points du plan complexe dont les affixes z vérifient

$$|z - \alpha| = |2z - \alpha|.$$

On demande ici une résolution par la **méthode algébrique**, en posant

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \alpha = a + ib,$$

où $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

1. Compréhension de l'objectif

Le nombre complexe α est fixé. Ainsi, a et b sont des constantes réelles. En revanche, z est variable : le point M d'affixe $z = x + iy$ possède pour coordonnées (x, y) .

Déterminer l'ensemble Γ revient donc à transformer l'égalité de modules donnée en une équation portant sur les coordonnées réelles x et y , puis à reconnaître la nature géométrique de cette équation.

2. Écriture algébrique des deux nombres complexes

Nous posons

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \alpha = a + ib.$$

2.1. Calcul de $z - \alpha$

On a

$$\begin{aligned} z - \alpha &= (x + iy) - (a + ib) \\ &= x + iy - a - ib. \end{aligned}$$

On regroupe les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part :

$$z - \alpha = (x - a) + i(y - b).$$

Rappelons que, pour tout nombre complexe $u + iv$, avec $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

En appliquant cette formule à $z - \alpha = (x - a) + i(y - b)$, nous obtenons

$$|z - \alpha| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{|z - \alpha|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

2.2. Calcul de $2z - \alpha$

Commençons par calculer $2z$:

$$2z = 2(x + iy) = 2x + 2iy.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2z - \alpha &= (2x + 2iy) - (a + ib) \\ &= 2x + 2iy - a - ib \\ &= (2x - a) + i(2y - b). \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la formule du module, on obtient

$$|2z - \alpha| = \sqrt{(2x - a)^2 + (2y - b)^2}.$$

Donc

$$\boxed{|2z - \alpha|^2 = (2x - a)^2 + (2y - b)^2.}$$

3. Traduction de l'égalité des modules

L'équation à résoudre est

$$|z - \alpha| = |2z - \alpha|.$$

Les deux membres sont des nombres réels positifs ou nuls. On peut donc les élever au carré sans introduire de solution supplémentaire et sans en perdre :

$$|z - \alpha| = |2z - \alpha| \iff |z - \alpha|^2 = |2z - \alpha|^2.$$

En remplaçant chaque carré de module par l'expression calculée précédemment, il vient

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (2x - a)^2 + (2y - b)^2.$$

4. Développement complet des deux membres

Développons d'abord le membre de gauche.

On a

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

et

$$(y - b)^2 = y^2 - 2by + b^2.$$

Par addition,

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Développons maintenant le membre de droite.

On a

$$(2x - a)^2 = (2x)^2 - 2(2x)a + a^2 = 4x^2 - 4ax + a^2$$

et

$$(2y - b)^2 = (2y)^2 - 2(2y)b + b^2 = 4y^2 - 4by + b^2.$$

Par addition,

$$\begin{aligned}(2x - a)^2 + (2y - b)^2 &= 4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2 - 4by + b^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 - 4ax - 4by + a^2 + b^2.\end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4ax - 4by + a^2 + b^2.$$

5. Simplification et obtention de l'équation cartésienne

Les termes $a^2 + b^2$ apparaissent identiquement dans les deux membres. On peut donc les supprimer :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 4x^2 + 4y^2 - 4ax - 4by.$$

Regroupons tous les termes dans le membre de droite, ou, de manière équivalente, soustrayons le membre de gauche aux deux membres :

$$\begin{aligned}0 &= (4x^2 - x^2) + (4y^2 - y^2) + (-4ax + 2ax) + (-4by + 2by) \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2ax - 2by.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$3x^2 + 3y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

En divisant toute l'équation par 3, on obtient

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{3}x - \frac{2b}{3}y = 0.$$

Cette équation n'est pas encore sous la forme canonique d'un cercle. Nous allons donc compléter les carrés.

6. Mise sous forme canonique par complétion des carrés

Nous partons de

$$x^2 - \frac{2a}{3}x + y^2 - \frac{2b}{3}y = 0.$$

6.1. Complétion du carré en x

On remarque que

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{a^2}{9}.$$

Par conséquent,

$$x^2 - \frac{2a}{3}x = \left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{9}.$$

6.2. Complétion du carré en y

De même,

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = y^2 - \frac{2b}{3}y + \frac{b^2}{9},$$

donc

$$y^2 - \frac{2b}{3}y = \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{9}.$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation, on obtient

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{9} + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 - \frac{b^2}{9} = 0.$$

On transpose les deux termes négatifs dans le membre de droite :

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{9}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{9}}.$$

Or, puisque $\alpha = a + ib$,

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{a^2 + b^2}{9} = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3}\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{3}\right)^2.$$

L'équation s'écrit donc

$$\boxed{\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{3}\right)^2}.$$

7. Interprétation géométrique

Dans un repère orthonormé, une équation de la forme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

représente un cercle de centre $C(x_0, y_0)$ et de rayon R , lorsque $R > 0$.

Ici,

$$x_0 = \frac{a}{3}, \quad y_0 = \frac{b}{3}, \quad R = \frac{|\alpha|}{3}.$$

Le centre C a donc pour affixe

$$\frac{a}{3} + i\frac{b}{3} = \frac{a + ib}{3} = \frac{\alpha}{3}.$$

Ainsi, lorsque $\alpha \neq 0$, l'ensemble Γ est le cercle de centre d'affixe $\alpha/3$ et de rayon $|\alpha|/3$.

8. Cas particulier $\alpha = 0$

Il est important de traiter ce cas explicitement.

Si $\alpha = 0$, l'équation initiale devient

$$|z| = |2z|.$$

Or

$$|2z| = 2|z|,$$

donc

$$|z| = 2|z|.$$

Ainsi,

$$|z| = 0,$$

ce qui entraîne

$$z = 0.$$

Par conséquent,

$$\Gamma = \{0\}.$$

On retrouve exactement le même résultat avec l'équation obtenue : si $\alpha = 0$, alors $a = b = 0$ et

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Comme $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, leur somme ne peut être nulle que si

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

Le cercle a alors un rayon nul : il est dégénéré et se réduit au point d'affixe 0.

9. Écriture finale sous forme complexe

L'équation cartésienne

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{3}\right)^2$$

est équivalente à

$$\left|z - \frac{\alpha}{3}\right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{3}\right)^2.$$

Les deux membres étant positifs ou nuls, on peut prendre les racines carrées :

$$\left|z - \frac{\alpha}{3}\right| = \frac{|\alpha|}{3}.$$

Conclusion

Si $\alpha \neq 0$:

$$\Gamma \text{ est le cercle de centre d'affixe } \frac{\alpha}{3} \text{ et de rayon } \frac{|\alpha|}{3}.$$

Si $\alpha = 0$:

$$\Gamma = \{0\}.$$

Ce deuxième cas peut aussi être considéré comme un cercle dégénéré de centre 0 et de rayon nul.

Remarque importante

La méthode est dite **algébrique** parce qu'elle consiste à écrire les complexes sous la forme $x + iy$, à calculer explicitement les modules, puis à transformer l'égalité donnée en une équation cartésienne en x et y .

Q5 – Domaine de définition d'une fonction composée

Correction complète et très détaillée

Énoncé

Déterminer le domaine de définition D de la fonction

$$f(x) = \tan\left(\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right).$$

1. Comprendre la structure de la fonction

La fonction étudiée est une composition de plusieurs fonctions :

$$x \mapsto \frac{\pi}{6}x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \mapsto \pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \mapsto \tan\left(\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right).$$

Pour déterminer le domaine de définition, il faut examiner chacune de ces étapes et repérer les valeurs de x qui pourraient rendre une expression impossible.

- L'expression $\frac{\pi}{6}x$ est définie pour tout réel x .
- La fonction sinus est définie pour tout nombre réel.
- La multiplication par π ne crée aucune restriction.
- La seule restriction vient donc de la fonction tangente.

2. Rappel sur le domaine de définition de la tangente

On sait que

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Cette expression n'est définie que lorsque son dénominateur est non nul, c'est-à-dire lorsque

$$\cos t \neq 0.$$

Or,

$$\cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent,

$$\tan t \text{ est définie} \iff t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans notre exercice, l'argument de la tangente est

$$t = \pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right).$$

La fonction f est donc définie exactement lorsque

$$\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Simplification de la condition interdite

Nous cherchons d'abord les valeurs interdites, c'est-à-dire celles qui vérifient

$$\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Comme $\pi \neq 0$, on peut diviser les deux membres par π :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2} + k.$$

À première vue, k peut être n'importe quel entier. Toutefois, le sinus d'un réel est toujours compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \sin u \leq 1.$$

Il faut donc nécessairement que

$$-1 \leq \frac{1}{2} + k \leq 1.$$

Résolvons cette double inégalité :

$$-1 \leq \frac{1}{2} + k \iff k \geq -\frac{3}{2},$$

et

$$\frac{1}{2} + k \leq 1 \iff k \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}.$$

Comme k est un entier, les seules possibilités sont

$$\boxed{k = -1 \quad \text{ou} \quad k = 0.}$$

On obtient donc seulement deux équations interdites :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Résolution de $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2}$

Posons provisoirement

$$u = \frac{\pi}{6}x.$$

Nous devons résoudre

$$\sin u = \frac{1}{2}.$$

Sur le cercle trigonométrique, le sinus vaut $\frac{1}{2}$ pour les angles

$$u = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad u = \frac{5\pi}{6}$$

modulo 2π . Par conséquent,

$$u = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ou} \quad u = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En remplaçant u par $\frac{\pi}{6}x$, on obtient :

$$\frac{\pi}{6}x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

ou

$$\frac{\pi}{6}x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

Pour la première équation, on multiplie par $\frac{6}{\pi}$:

$$x = 1 + 12n.$$

Pour la seconde :

$$x = 5 + 12n.$$

Ainsi,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2} \iff \boxed{x = 1 + 12n \quad \text{ou} \quad x = 5 + 12n, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

5. Résolution de $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -\frac{1}{2}$

Toujours avec

$$u = \frac{\pi}{6}x,$$

nous devons maintenant résoudre

$$\sin u = -\frac{1}{2}.$$

Sur le cercle trigonométrique, le sinus vaut $-\frac{1}{2}$ pour

$$u = \frac{7\pi}{6} \quad \text{et} \quad u = \frac{11\pi}{6}$$

modulo 2π . Donc

$$u = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ou} \quad u = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En remplaçant u par $\frac{\pi}{6}x$:

$$\frac{\pi}{6}x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{6}x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi.$$

Après multiplication par $\frac{6}{\pi}$, on obtient

$$x = 7 + 12n \quad \text{ou} \quad x = 11 + 12n.$$

Ainsi,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -\frac{1}{2} \iff \boxed{x = 7 + 12n \quad \text{ou} \quad x = 11 + 12n, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

6. Réunion de toutes les valeurs interdites

Les valeurs de x pour lesquelles la tangente n'est pas définie sont donc

$$x = 1 + 12n, \quad x = 5 + 12n, \quad x = 7 + 12n, \quad x = 11 + 12n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On peut conserver cette écriture. Cependant, ces quatre familles peuvent être regroupées de manière plus simple.

En effet, les nombres

$$1 + 12n \quad \text{et} \quad 7 + 12n$$

sont exactement de la forme

$$6m + 1, \quad m \in \mathbb{Z},$$

tandis que les nombres

$$5 + 12n \quad \text{et} \quad 11 + 12n$$

sont exactement de la forme

$$6m - 1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, l'ensemble de toutes les valeurs interdites est

$$\{6m - 1; m \in \mathbb{Z}\} \cup \{6m + 1; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Autrement dit, on doit exclure tous les réels de la forme

$$6m \pm 1.$$

7. Domaine de définition

Le domaine de définition est donc l'ensemble des réels privé de toutes les valeurs précédentes :

$$D = \mathbb{R} \setminus \{6m - 1, 6m + 1; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Une écriture équivalente est

$$D = \mathbb{R} \setminus (\{1 + 12n, 5 + 12n, 7 + 12n, 11 + 12n; n \in \mathbb{Z}\}).$$

8. Vérifications sur quelques valeurs

Ces vérifications ne remplacent pas la démonstration, mais elles permettent de confirmer le résultat.

Exemple 1 : $x = 1$

On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 1\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc l'argument de la tangente vaut

$$\pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2},$$

et $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'est pas définie. Ainsi, $1 \notin D$.

Exemple 2 : $x = 5$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

donc l'argument de la tangente est encore $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $5 \notin D$.

Exemple 3 : $x = 7$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

L'argument de la tangente vaut alors

$$-\frac{\pi}{2},$$

et la tangente n'est pas définie. Ainsi, $7 \notin D$.

Exemple 4 : $x = 0$

$$\sin 0 = 0, \quad f(0) = \tan(0) = 0.$$

La fonction est donc bien définie en 0, conformément au domaine obtenu.

9. Conclusion rédigée

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$. La seule restriction provient donc de la fonction tangente, qui n'est pas définie lorsque son argument est égal à $\frac{\pi}{2} + k\pi$. On doit ainsi exclure les réels x tels que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2} + k.$$

Comme le sinus prend uniquement des valeurs dans $[-1, 1]$, seuls $k = 0$ et $k = -1$ sont possibles. Cela conduit aux équations

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -\frac{1}{2},$$

dont les solutions forment l'ensemble des nombres $6m - 1$ et $6m + 1$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{6m - 1, 6m + 1; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice Q6 - Partie entière et polynôme

Correction très détaillée

Énoncé

Soit P un polynôme à coefficients strictement positifs. Calculer

$$Q_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(P(x))}{P(E(x))},$$

où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t .

1. Compréhension de la notation

Pour tout réel t , sa partie entière $E(t)$ est l'unique entier vérifiant

$$E(t) \leq t < E(t) + 1.$$

Cette double inégalité est équivalente à

$$0 \leq t - E(t) < 1.$$

Ainsi, la partie entière diffère toujours du nombre considéré d'une quantité comprise entre 0 et 1.

Nous supposons d'abord que P est non constant, ce qui est le cas visé habituellement dans cet exercice. Écrivons

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

avec $n \geq 1$ et

$$a_0, a_1, \dots, a_n > 0.$$

Comme le coefficient dominant a_n est strictement positif, on a

$$P(x) \longrightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty).$$

2. Idée générale

Le numérateur $E(P(x))$ est très proche de $P(x)$, car

$$P(x) - 1 < E(P(x)) \leq P(x).$$

De même, $E(x)$ est très proche de x . On s'attend donc à ce que

$$P(E(x)) \sim P(x).$$

Si ces deux approximations sont rigoureusement établies, alors

$$\frac{E(P(x))}{P(E(x))} = \frac{E(P(x))}{P(x)} \times \frac{P(x)}{P(E(x))} \longrightarrow 1 \times 1 = 1.$$

Nous allons démontrer séparément les deux limites.

3. Première limite : $\frac{E(P(x))}{P(x)} \rightarrow 1$

D'après la propriété de la partie entière appliquée au réel $P(x)$,

$$E(P(x)) \leq P(x) < E(P(x)) + 1.$$

La seconde inégalité donne

$$P(x) - 1 < E(P(x)).$$

On obtient donc

$$P(x) - 1 < E(P(x)) \leq P(x).$$

Pour x suffisamment grand, $P(x) > 0$. Nous pouvons alors diviser toute l'inégalité par $P(x)$:

$$1 - \frac{1}{P(x)} < \frac{E(P(x))}{P(x)} \leq 1.$$

Or $P(x) \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{1}{P(x)} \rightarrow 0 \quad \text{et par conséquent} \quad 1 - \frac{1}{P(x)} \rightarrow 1.$$

Les deux bornes tendent vers 1. Le théorème des gendarmes permet donc de conclure que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(P(x))}{P(x)} = 1.}$$

Autrement dit,

$$E(P(x)) \sim P(x).$$

4. Deuxième limite : $\frac{P(E(x))}{P(x)} \rightarrow 1$

Posons

$$m = E(x).$$

Alors

$$m \leq x < m + 1.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a aussi $m = E(x) \rightarrow +\infty$.

4.1. Comparaison de $E(x)$ et de x

La relation

$$0 \leq x - E(x) < 1$$

devient, après division par $x > 0$,

$$0 \leq 1 - \frac{E(x)}{x} < \frac{1}{x}.$$

Comme $1/x \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne

$$1 - \frac{E(x)}{x} \rightarrow 0,$$

donc

$$\boxed{\frac{E(x)}{x} \rightarrow 1.}$$

Ainsi, $E(x) \sim x$.

4.2. Comparaison des valeurs du polynôme

Écrivons

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

En divisant par x^n , nous obtenons

$$\frac{P(x)}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Tous les termes contenant une puissance de x au dénominateur tendent vers 0, donc

$$\boxed{\frac{P(x)}{x^n} \rightarrow a_n.}$$

De la même manière, puisque $E(x) \rightarrow +\infty$,

$$\boxed{\frac{P(E(x))}{E(x)^n} \rightarrow a_n.}$$

Décomposons maintenant le quotient recherché :

$$\frac{P(E(x))}{P(x)} = \frac{P(E(x))}{E(x)^n} \times \frac{E(x)^n}{x^n} \times \frac{x^n}{P(x)}.$$

Étudions les trois facteurs :

$$\frac{P(E(x))}{E(x)^n} \rightarrow a_n,$$

$$\frac{E(x)^n}{x^n} = \left(\frac{E(x)}{x} \right)^n \rightarrow 1^n = 1,$$

et, puisque $P(x)/x^n \rightarrow a_n > 0$,

$$\frac{x^n}{P(x)} \rightarrow \frac{1}{a_n}.$$

Par produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(E(x))}{P(x)} = a_n \times 1 \times \frac{1}{a_n} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{P(E(x))}{P(x)} \rightarrow 1.}$$

Puisque cette limite est non nulle, on peut inverser le quotient :

$$\boxed{\frac{P(x)}{P(E(x))} \rightarrow 1.}$$

5. Calcul de la limite demandée

Pour x suffisamment grand, les quantités $P(x)$ et $P(E(x))$ sont strictement positives. Nous pouvons écrire

$$\frac{E(P(x))}{P(E(x))} = \frac{E(P(x))}{P(x)} \times \frac{P(x)}{P(E(x))}.$$

D'après les deux résultats précédents,

$$\frac{E(P(x))}{P(x)} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{P(x)}{P(E(x))} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$Q_6 = 1 \times 1 = 1.$$

$$Q_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(P(x))}{P(E(x))} = 1$$

à condition que P soit un polynôme non constant à coefficients strictement positifs.

6. Une autre justification directe de $P(E(x)) \sim P(x)$

Comme tous les coefficients de P sont positifs, la fonction P est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En effet,

$$P'(t) = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1} t^{n-2} + \dots + a_1 > 0$$

pour tout $t \geq 0$.

Or

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Pour x assez grand, ces nombres sont positifs. La croissance de P donne alors

$$P(E(x)) \leq P(x) < P(E(x) + 1).$$

En divisant par $P(E(x)) > 0$,

$$1 \leq \frac{P(x)}{P(E(x))} < \frac{P(E(x) + 1)}{P(E(x))}.$$

Si l'on pose $m = E(x)$, alors $m \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{P(m+1)}{P(m)} \rightarrow 1,$$

car le numérateur et le dénominateur sont deux polynômes de même degré n et de même coefficient dominant a_n . Le théorème des gendarmes redonne donc

$$\frac{P(x)}{P(E(x))} \rightarrow 1.$$

Cette méthode est plus courte, mais la méthode précédente explique plus explicitement le rôle du terme dominant du polynôme.

7. Remarque importante sur le cas constant

L'énoncé ne précise pas explicitement que P est non constant. Si

$$P(X) = c \quad (c > 0),$$

alors

$$\frac{E(P(x))}{P(E(x))} = \frac{E(c)}{c},$$

qui est une constante et n'est pas toujours égale à 1.

Par exemple, si $c = 3/2$, alors

$$\frac{E(c)}{c} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la réponse 1 correspond au cas naturel et certainement visé par l'exercice : $\deg P \geq 1$.

Réponse complète :

$$\begin{cases} Q_6 = 1, & \text{si } \deg P \geq 1, \\ Q_6 = \frac{E(c)}{c}, & \text{si } P(X) = c > 0. \end{cases}$$

Q7 – Dérivée d'ordre n de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Correction très détaillée

Énoncé

Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Domaine de définition

La fonction logarithme népérien $\ln(x)$ n'est définie, dans $\mathbb{R}$, que pour

$$x > 0.$$

De plus, pour $x > 0$, le dénominateur x est non nul. Ainsi,

$$D_f =]0, +\infty[.$$

Toutes les dérivées calculées ci-dessous sont donc considérées pour $x > 0$.

2. Préparation du calcul

On écrit la fonction sous la forme d'un produit :

$$f(x) = \ln(x) x^{-1}.$$

Cette écriture est particulièrement utile, car la dérivée d'ordre n d'un produit peut être calculée à l'aide de la formule de Leibniz.

Formule de Leibniz. Si u et v sont n fois dérivables, alors

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Nous allons appliquer cette formule avec

$$u(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad v(x) = x^{-1}.$$

Il faut donc d'abord déterminer les dérivées successives de u et de v .

3. Dérivées successives de $\ln(x)$

On calcule les premières dérivées :

$$\begin{aligned}u'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1}, \\u''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \\u^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}, \\u^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} = -6x^{-4}.\end{aligned}$$

On reconnaît le schéma suivant : pour tout entier $k \geq 1$,

$$u^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

En effet, pour $k = 1$, cette formule donne

$$\frac{(-1)^{0}0!}{x} = \frac{1}{x},$$

ce qui est correct. Si elle est vraie à l'ordre k , alors

$$\frac{d}{dx} [(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}] = (-1)^{k-1}(k-1)!(-k)x^{-k-1},$$

donc

$$u^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}},$$

ce qui est exactement la formule attendue à l'ordre $k + 1$.

Attention toutefois : pour $k = 0$, on a simplement

$$u^{(0)}(x) = u(x) = \ln(x).$$

Ce terme devra être traité séparément dans la somme de Leibniz.

4. Dérivées successives de x^{-1}

On calcule également :

$$\begin{aligned}v(x) &= x^{-1}, \\v'(x) &= -x^{-2}, \\v''(x) &= 2x^{-3}, \\v^{(3)}(x) &= -6x^{-4}.\end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier $r \geq 0$,

$$v^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r r!}{x^{r+1}}.$$

En particulier, dans la formule de Leibniz, nous aurons

$$v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}.$$

5. Application détaillée de la formule de Leibniz

La formule de Leibniz donne

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Nous séparons le terme correspondant à $k = 0$ des autres termes :

$$f^{(n)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

5.1. Le terme correspondant à $k = 0$

On a

$$u(x) = \ln(x)$$

et

$$v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$u(x)v^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

5.2. Les termes correspondant à $1 \leq k \leq n$

Pour $k \geq 1$,

$$u^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$$

et

$$v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}}. \end{aligned}$$

Étudions séparément le signe, les factorielles et les puissances de x .

Signe :

$$(-1)^{k-1} (-1)^{n-k} = (-1)^{n-1}.$$

Le signe obtenu ne dépend donc plus de k .

Puissances de x :

$$x^k x^{n-k+1} = x^{n+1}.$$

Coefficient factoriel :

$$\binom{n}{k} (k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} (k-1)!(n-k)!.$$

On simplifie $(n-k)!$, puis on utilise $k! = k(k-1)!$:

$$\frac{n!(k-1)!}{k!} = \frac{n!(k-1)!}{k(k-1)!} = \frac{n!}{k}.$$

Ainsi,

$$\binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{k x^{n+1}}.$$

En sommant pour $k = 1, 2, \dots, n$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6. Apparition du nombre harmonique H_n

On appelle n -ième nombre harmonique le nombre

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Par convention, on pose également

$$H_0 = 0.$$

La somme précédente devient donc

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n! H_n}{x^{n+1}}.$$

En ajoutant le terme correspondant à $k = 0$, nous obtenons

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(x)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1} n! H_n}{x^{n+1}}.$$

On met le facteur commun $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ en évidence. Comme

$$(-1)^{n-1} = -(-1)^n,$$

on obtient

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} (\ln(x) - H_n).$$

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

avec la convention $\sum_{k=1}^0 \frac{1}{k} = 0$.

De manière équivalente,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} (H_n - \ln(x)).$$

7. Vérification sur les premiers ordres

Ordre $n = 0$

Comme $H_0 = 0$, la formule donne

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x} (\ln x - 0) = \frac{\ln x}{x},$$

ce qui redonne bien la fonction initiale.

Ordre $n = 1$

Puisque $H_1 = 1$,

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} (\ln x - 1) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Vérifions directement :

$$f'(x) = (\ln x x^{-1})' = \frac{1}{x} x^{-1} + \ln x (-x^{-2}) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Les deux résultats coïncident.

Ordre $n = 2$

On a

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

La formule donne

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

En dérivant $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, on retrouve effectivement

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

8. Deuxième démonstration par récurrence

La formule précédente peut également être démontrée par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$\frac{(-1)^0 0!}{x} (\ln x - H_0) = \frac{\ln x}{x} = f(x).$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1} (\ln x - H_n).$$

Dérivons cette expression :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n! \left[(-n-1) x^{-n-2} (\ln x - H_n) + x^{-n-1} \frac{1}{x} \right] \\ &= (-1)^n n! x^{-n-2} \left[1 - (n+1)(\ln x - H_n) \right]. \end{aligned}$$

Or

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1},$$

donc

$$(n+1)H_{n+1} = (n+1)H_n + 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 - (n+1)(\ln x - H_n) &= 1 - (n+1) \ln x + (n+1)H_n \\ &= -(n+1)(\ln x - H_{n+1}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n! x^{-n-2} \left[-(n+1)(\ln x - H_{n+1}) \right] \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-n-2} (\ln x - H_{n+1}). \end{aligned}$$

C'est exactement la formule au rang $n+1$. La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Conclusion

Pour tout $x > 0$ et tout entier naturel n ,

$$\boxed{\left(\frac{\ln x}{x} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right)}$$

avec, pour $n = 0$, une somme vide égale à 0.

Q8 - Détermination de toutes les solutions

Équation fonctionnelle multiplicative de Cauchy

Énoncé

Trouver l'ensemble de toutes les fonctions dérivables

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telles que, pour tous réels x et y ,

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Compréhension de l'équation

L'égalité

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

doit être vraie pour *tout* couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Le membre de gauche contient la valeur de la fonction au point $x+y$, tandis que le membre de droite est le produit des valeurs de la fonction aux points x et y . Cette relation rappelle la propriété fondamentale de la fonction exponentielle :

$$e^{c(x+y)} = e^{cx}e^{cy}.$$

Nous pouvons donc soupçonner que les fonctions exponentielles seront des solutions. Cependant, il faut démontrer rigoureusement qu'il n'existe aucune autre fonction dérivable, sans oublier l'éventuelle fonction nulle.

2. Première étape : déterminer la valeur de $f(0)$

Dans l'équation fonctionnelle, choisissons

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

On obtient

$$f(0+0) = f(0)f(0),$$

donc

$$f(0) = f(0)^2.$$

En ramenant tous les termes dans le même membre,

$$f(0)^2 - f(0) = 0.$$

On factorise :

$$f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

Par la règle du produit nul,

$$f(0) = 0 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1.$$

Cette distinction conduit naturellement à deux cas.

3. Premier cas : $f(0) = 0$

Prenons un réel arbitraire x . En choisissant $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, nous avons

$$f(x + 0) = f(x)f(0).$$

Puisque $x + 0 = x$, cela donne

$$f(x) = f(x)f(0).$$

Or, dans le cas présent, $f(0) = 0$. Ainsi,

$$f(x) = f(x) \times 0 = 0.$$

Cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

La fonction nulle est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Vérifions qu'elle satisfait l'équation :

$$f(x + y) = 0$$

et

$$f(x)f(y) = 0 \times 0 = 0.$$

Les deux membres sont égaux. La fonction nulle est donc effectivement une solution.

4. Deuxième cas : $f(0) = 1$

Nous supposons désormais

$$f(0) = 1.$$

Nous allons montrer que, dans ce cas, f ne s'annule jamais, puis utiliser la dérivabilité pour obtenir une équation différentielle simple.

4.1. La fonction ne s'annule jamais

Soit $x \in \mathbb{R}$. Choisissons $y = -x$. Alors

$$x + y = x - x = 0.$$

L'équation fonctionnelle devient

$$f(0) = f(x)f(-x).$$

Comme $f(0) = 1$, on obtient

$$f(x)f(-x) = 1.$$

Un produit égal à 1 ne peut avoir aucun facteur nul. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

4.2. Conséquence sur le signe de f

En prenant $y = x$, l'équation donne

$$f(2x) = f(x)^2 \geq 0.$$

Or tout réel t peut s'écrire sous la forme $t = 2x$ avec $x = t/2$. Donc

$$f(t) = f\left(2\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Comme nous avons déjà montré que $f(t) \neq 0$, nous obtenons même

$$f(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Cette positivité est cohérente avec la forme exponentielle que nous allons trouver.

5. Utilisation de la dérivabilité

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Fixons un réel y et considérons l'identité

$$f(x + y) = f(x)f(y),$$

comme une égalité entre deux fonctions de la variable x .

Puisque f est dérivable, nous pouvons dériver les deux membres par rapport à x .

Pour le membre de gauche, la dérivée de $x \mapsto f(x + y)$ est

$$f'(x + y),$$

car la dérivée de $x + y$ par rapport à x vaut 1.

Pour le membre de droite, $f(y)$ est une constante par rapport à x . La dérivée de $x \mapsto f(x)f(y)$ est donc

$$f'(x)f(y).$$

Nous obtenons ainsi, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f'(x + y) = f'(x)f(y).$$

Choisissons maintenant $x = 0$. Il vient

$$f'(0 + y) = f'(0)f(y),$$

c'est-à-dire

$$f'(y) = f'(0)f(y).$$

Posons

$$c = f'(0).$$

Le nombre c est un réel fixe. Nous obtenons alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f'(y) = cf(y).$$

En renommant la variable y en x ,

$$f'(x) = cf(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction recherchée vérifie donc une équation différentielle linéaire très simple, accompagnée de la condition initiale

$$f(0) = 1.$$

6. Résolution de l'équation différentielle

Nous devons résoudre

$$f'(x) = cf(x)$$

avec

$$f(0) = 1.$$

Définissons la fonction auxiliaire

$$g(x) = e^{-cx} f(x).$$

Elle est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Par la formule de dérivation d'un produit,

$$g'(x) = (e^{-cx})' f(x) + e^{-cx} f'(x).$$

Or

$$(e^{-cx})' = -ce^{-cx}.$$

Donc

$$g'(x) = -ce^{-cx} f(x) + e^{-cx} f'(x).$$

On factorise e^{-cx} :

$$g'(x) = e^{-cx} (f'(x) - cf(x)).$$

Mais $f'(x) = cf(x)$. Par conséquent,

$$g'(x) = e^{-cx} \times 0 = 0.$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une constante réelle K telle que

$$g(x) = K.$$

Autrement dit,

$$e^{-cx} f(x) = K.$$

En multipliant par e^{cx} ,

$$f(x) = Ke^{cx}.$$

Utilisons maintenant la condition $f(0) = 1$:

$$1 = f(0) = Ke^{c \cdot 0} = K.$$

Donc $K = 1$, et finalement

$$f(x) = e^{cx} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où c est un réel quelconque.

7. Vérification réciproque

Il ne suffit pas d'avoir trouvé des formes possibles : il faut vérifier qu'elles sont réellement solutions.

7.1. La fonction nulle

Pour

$$f(x) = 0,$$

on a

$$f(x + y) = 0$$

et

$$f(x)f(y) = 0 \times 0 = 0.$$

Donc

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

La fonction nulle est dérivable et convient.

7.2. Les fonctions exponentielles

Soit $c \in \mathbb{R}$ et définissons

$$f(x) = e^{cx}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels x et y ,

$$f(x + y) = e^{c(x+y)}.$$

Or

$$c(x + y) = cx + cy.$$

Donc, en utilisant la propriété de l'exponentielle,

$$f(x + y) = e^{cx+cy} = e^{cx}e^{cy}.$$

Ainsi,

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Toutes les fonctions $x \mapsto e^{cx}$ sont donc bien solutions.

8. Pourquoi la dérivabilité est importante

La dérivabilité nous a permis de dériver l'équation fonctionnelle et d'obtenir

$$f'(x) = cf(x).$$

Sans aucune hypothèse de régularité, certaines équations fonctionnelles peuvent posséder des solutions très irrégulières. Ici, l'hypothèse de dérivabilité garantit une grande régularité et conduit directement aux fonctions exponentielles.

On peut même remarquer qu'une hypothèse plus faible, comme la continuité en un point, suffirait déjà à éliminer les solutions pathologiques de l'équation multiplicative. Mais dans cet exercice, la dérivabilité donne la démonstration la plus directe.

Conclusion

Les seules fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}$$

sont :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et

$$f(x) = e^{cx} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{0\} \cup \{x \mapsto e^{cx}; c \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque

La fonction constante $f(x) = 1$ est incluse dans la famille exponentielle : elle correspond au choix $c = 0$, puisque $e^{0x} = 1$.

Q9 – Correction complète et très détaillée

Méthode fondée uniquement sur la définition de la dérivée

Énoncé

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$Q_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right).$$

1. Comprendre précisément la question

L'entier k est fixé et strictement positif. La somme contenue dans la limite possède donc un nombre fini de termes :

$$f(x), \quad f\left(\frac{x}{2}\right), \quad f\left(\frac{x}{3}\right), \quad \dots, \quad f\left(\frac{x}{k}\right).$$

On cherche la limite lorsque x tend vers 0 de cette somme divisée par x .

L'hypothèse essentielle est que f est dérivable en 0. Par définition,

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}.$$

Comme $f(0) = 0$, cette définition devient

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}.$$

C'est cette égalité qui sera utilisée. Aucune notation de type $o(t)$ ni aucun développement limité n'est nécessaire.

Point important

La variable utilisée dans la définition de la dérivée peut être appelée t , u ou autrement. L'important est qu'elle tende vers 0. Dans notre exercice, nous appliquerons cette définition à $t = x$, puis à $t = x/2$, $t = x/3$, etc.

2. Réécriture du quotient terme par terme

On commence par distribuer le facteur $1/x$ dans la somme :

$$\frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right) = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(x/2)}{x} + \cdots + \frac{f(x/k)}{x}.$$

Le premier terme, $f(x)/x$, est déjà exactement de la forme apparaissant dans la définition de $f'(0)$.

Pour les autres termes, par exemple

$$\frac{f(x/2)}{x},$$

il faut faire apparaître au dénominateur $x/2$ et non x . On écrit alors

$$\frac{f(x/2)}{x} = \frac{1}{2} \frac{f(x/2)}{x/2}.$$

En effet,

$$\frac{1}{2} \frac{f(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2} \times \frac{2f(x/2)}{x} = \frac{f(x/2)}{x}.$$

De même,

$$\frac{f(x/3)}{x} = \frac{1}{3} \frac{f(x/3)}{x/3},$$

et, plus généralement, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$,

$$\boxed{\frac{f(x/j)}{x} = \frac{1}{j} \frac{f(x/j)}{x/j}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right) &= \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} \frac{f(x/2)}{x/2} + \frac{1}{3} \frac{f(x/3)}{x/3} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{k} \frac{f(x/k)}{x/k}. \end{aligned}$$

3. Calcul de la limite de chaque terme

Fixons un entier $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, on a aussi

$$\frac{x}{j} \rightarrow 0,$$

car j est un nombre fixe non nul.

Posons temporairement

$$t = \frac{x}{j}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, alors $t \rightarrow 0$. D'après la définition de la dérivée en 0 et puisque $f(0) = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0).$$

En remplaçant t par x/j , on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x/j)}{x/j} = f'(0).}$$

En multipliant par la constante $1/j$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{j} \frac{f(x/j)}{x/j} \right) = \frac{1}{j} f'(0).$$

Ainsi, les limites des différents termes sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{f(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2} f'(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{f(x/3)}{x/3} = \frac{1}{3} f'(0),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{f(x/k)}{x/k} = \frac{1}{k} f'(0).$$

4. Passage à la limite dans la somme

La somme contient seulement k termes, et k est fixé. On peut donc utiliser la propriété suivante : la limite d'une somme finie est la somme des limites, lorsque chacune de ces limites existe.

On obtient donc

$$Q_9 = f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{3} f'(0) + \cdots + \frac{1}{k} f'(0).$$

On met le facteur commun $f'(0)$ en évidence :

$$Q_9 = f'(0) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \right).$$

En utilisant la notation de somme,

$$Q_9 = f'(0) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

La somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

est appelée le k -ième nombre harmonique et est souvent notée H_k . On peut donc aussi écrire

$$Q_9 = f'(0) H_k.$$

5. Justification complète à partir d'une fonction auxiliaire

On peut présenter la même idée d'une manière très structurée, sans aucune notation hors programme.

Pour $t \neq 0$, définissons

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Puisque f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, la définition de la dérivée donne

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = f'(0).$$

Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{j=1}^k f\left(\frac{x}{j}\right) &= \sum_{j=1}^k \frac{f(x/j)}{x} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \frac{f(x/j)}{x/j} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{x}{j}\right). \end{aligned}$$

Pour chaque j fixé, $x/j \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, donc

$$\varphi\left(\frac{x}{j}\right) \rightarrow f'(0).$$

La somme étant finie,

$$\begin{aligned} Q_9 &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} f'(0) \\ &= f'(0) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Cette présentation n'utilise que la définition de la dérivée et les propriétés usuelles des limites.

6. Vérifications sur quelques valeurs de k

Cas $k = 1$

L'expression devient

$$Q_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$$

La formule générale donne

$$f'(0) \sum_{j=1}^1 \frac{1}{j} = f'(0),$$

ce qui est correct.

Cas $k = 2$

On a

$$Q_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(x/2)}{x}.$$

Or

$$\frac{f(x) + f(x/2)}{x} = \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{2} \frac{f(x/2)}{x/2}.$$

Donc

$$Q_9 = f'(0) + \frac{1}{2}f'(0) = \frac{3}{2}f'(0).$$

La formule générale donne bien

$$f'(0) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}f'(0).$$

Cas $k = 3$

De même,

$$Q_9 = f'(0) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = f'(0) \frac{6 + 3 + 2}{6} = \frac{11}{6}f'(0).$$

7. Pourquoi l'hypothèse $f(0) = 0$ est-elle importante ?

La définition générale de la dérivée en 0 est

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Pour pouvoir remplacer directement ce quotient par $f(t)/t$, il faut exactement que $f(0) = 0$.

Si $f(0) \neq 0$, alors chaque terme $f(x/j)$ tendrait vers $f(0)$ et la somme tendrait vers $kf(0)$. En divisant par $x \rightarrow 0$, on n'obtiendrait en général pas une limite finie. L'hypothèse $f(0) = 0$ supprime donc le terme constant et permet à la dérivabilité de déterminer la limite.

8. Rédaction concise à recopier

Comme f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0).$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\frac{f(x/j)}{x} = \frac{1}{j} \frac{f(x/j)}{x/j}.$$

Or $x/j \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x/j)}{x} = \frac{1}{j} f'(0).$$

La somme comportant un nombre fini de termes,

$$\begin{aligned} Q_9 &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} f'(0) \\ &= f'(0) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Résultat final

$$Q_9 = f'(0) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \right) = f'(0) \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Q10 – Correction complète et détaillée

Équation différentielle à variables séparables

Énoncé

Soit $y : x \mapsto y(x)$ une solution de l'équation différentielle

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x))$$

et vérifiant la condition

$$y(0) = \pi.$$

Calculer

$$Q_{10} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x).$$

Remarque préliminaire sur le domaine

La présence de $\ln(y(x))$ impose

$$y(x) > 0.$$

D'autre part, $\tan x$ n'est pas définie lorsque

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On résout donc l'équation sur un intervalle ne contenant aucun de ces points. Pour étudier la limite lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, on peut travailler sur l'intervalle

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

1. Résolution de l'équation sans utiliser la condition initiale

On commence, comme demandé, par écrire

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation devient

$$\frac{dy}{dx} \tan x = y \ln y.$$

1.1. Séparation des variables

Lorsque $y \ln y \neq 0$, on peut diviser les deux membres par $y \ln y$ et par $\tan x$:

$$\frac{1}{y \ln y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}.$$

En multipliant par dx , on obtient

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\tan x}.$$

Or

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

donc

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{dy}{y \ln y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx.}$$

1.2. Intégration du membre contenant y

Calculons

$$\int \frac{dy}{y \ln y}.$$

On pose

$$u = \ln y.$$

Puisque $y > 0$, cette substitution est valable. On a

$$du = \frac{dy}{y}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C_1.$$

En revenant à la variable y ,

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \ln |\ln y| + C_1.$$

1.3. Intégration du membre contenant x

Calculons maintenant

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

On pose

$$v = \sin x.$$

Alors

$$dv = \cos x dx.$$

Donc

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dv}{v} = \ln |v| + C_2.$$

En revenant à x ,

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C_2.$$

1.4. Obtention de la famille de solutions

Après intégration, on obtient

$$\ln |\ln y| = \ln |\sin x| + C,$$

où C est une constante réelle.

En exponentiant,

$$|\ln y| = e^C |\sin x|.$$

Comme $e^C > 0$, et puisque les signes peuvent être absorbés dans une constante réelle, il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que

$$\ln y = A \sin x.$$

On applique ensuite la fonction exponentielle aux deux membres :

$$y = e^{A \sin x}.$$

La famille de solutions obtenue est donc

$$\boxed{y(x) = e^{A \sin x}, \quad A \in \mathbb{R}.}$$

1.5. Vérification du cas perdu lors de la division

Au cours de la séparation des variables, on a divisé par $\ln y$. Il faut donc examiner le cas

$$\ln y = 0.$$

Cela équivaut à

$$y = 1.$$

La fonction constante $y(x) = 1$ vérifie bien l'équation, car

$$y'(x) = 0$$

et

$$y(x) \ln(y(x)) = 1 \times \ln 1 = 0.$$

Cette solution est déjà contenue dans la famille précédente : elle correspond à $A = 0$.

2. Vérification directe de la famille obtenue

Soit

$$y(x) = e^{A \sin x}.$$

Sa dérivée vaut

$$y'(x) = A \cos x e^{A \sin x}.$$

Le membre de gauche de l'équation est

$$y'(x) \tan x = A \cos x e^{A \sin x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = A \sin x e^{A \sin x}.$$

D'autre part,

$$\ln(y(x)) = \ln(e^{A \sin x}) = A \sin x.$$

Ainsi,

$$y(x) \ln(y(x)) = e^{A \sin x} \times A \sin x = A \sin x e^{A \sin x}.$$

On a donc bien

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x)).$$

3. Étude de la condition $y(0) = \pi$

Pour toute solution de la forme

$$y(x) = e^{A \sin x},$$

on a, puisque $\sin 0 = 0$,

$$y(0) = e^{A \sin 0} = e^{A \times 0} = e^0 = 1.$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de la constante A ,

$$\boxed{y(0) = 1.}$$

Mais l'énoncé impose

$$y(0) = \pi.$$

Or

$$\pi \neq 1.$$

La condition initiale est donc incompatible avec l'équation différentielle.

4. Deuxième preuve immédiate de l'incompatibilité

Supposons que l'équation différentielle soit satisfaite en $x = 0$. On remplace alors x par 0 dans

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x)).$$

On obtient

$$y'(0) \tan 0 = y(0) \ln(y(0)).$$

Comme

$$\tan 0 = 0,$$

le membre de gauche est nul :

$$y'(0) \tan 0 = 0.$$

Si $y(0) = \pi$, le membre de droite vaut

$$\pi \ln \pi.$$

Or $\pi > 1$, donc $\ln \pi > 0$, et par conséquent

$$\pi \ln \pi > 0.$$

L'équation imposerait alors

$$0 = \pi \ln \pi,$$

ce qui est impossible.

5. Que vaudrait la limite pour une solution quelconque ?

Même si la condition $y(0) = \pi$ est impossible, on peut calculer la limite d'une solution quelconque

$$y(x) = e^{A \sin x}.$$

Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin x \longrightarrow 1.$$

Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{A \sin x} = e^A.$$

Donc, pour une solution quelconque de paramètre A ,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x) = e^A.}$$

Cependant, la condition donnée dans l'énoncé ne permet pas de déterminer A : elle est impossible, car toute solution vérifie nécessairement $y(0) = 1$.

Conclusion définitive

Il n'existe aucune fonction y qui vérifie simultanément

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x))$$

et

$$y(0) = \pi.$$

Par conséquent, la fonction annoncée par l'énoncé n'existe pas et la quantité Q_{10} n'est pas définie dans les conditions données.

L'énoncé est incompatible : aucune solution ne vérifie $y(0) = \pi$.

Q_{10} ne peut donc pas être calculé à partir de ces données.

Q10 - Correction très détaillée

Étude de la cohérence de l'énoncé et calcul demandé

Énoncé

Soit $y : x \mapsto y(x)$ une solution de l'équation différentielle

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x)),$$

telle que

$$y(0) = \pi.$$

Calculer

$$Q_{10} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x).$$

1. Première vérification indispensable : peut-il exister une telle solution ?

Avant de chercher à résoudre une équation différentielle, il faut toujours vérifier que les conditions données sont compatibles avec l'équation.

L'énoncé affirme que y est une fonction dérivable en 0 et que l'équation

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x))$$

est satisfaite, notamment pour $x = 0$.

Remplaçons donc x par 0.

On sait que

$$\tan 0 = 0.$$

Le membre de gauche devient alors

$$y'(0) \tan 0 = y'(0) \times 0 = 0.$$

D'autre part, la condition initiale donne

$$y(0) = \pi.$$

Le membre de droite vaut donc

$$y(0) \ln(y(0)) = \pi \ln \pi.$$

Or $\pi > 1$, donc

$$\ln \pi > 0,$$

et par conséquent

$$\pi \ln \pi > 0.$$

En particulier,

$$\pi \ln \pi \neq 0.$$

Si l'équation était satisfaite en 0, nous devrions donc avoir simultanément

$$0 = \pi \ln \pi,$$

ce qui est impossible.

Première conclusion : il n'existe aucune fonction dérivable en 0 vérifiant à la fois l'équation différentielle en 0 et la condition $y(0) = \pi$.

2. Pourquoi ce n'est pas seulement un problème de substitution en 0

On pourrait se demander si l'équation est peut-être destinée à être satisfaite seulement pour $x \neq 0$, avec une valeur imposée séparément en 0.

Nous allons montrer que même cette interprétation ne permet pas d'obtenir une fonction continue en 0 telle que $y(0) = \pi$.

Considérons donc l'équation sur un intervalle situé à droite de 0, par exemple

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Sur cet intervalle, on a

$$\tan x > 0.$$

Comme l'expression $\ln(y(x))$ apparaît, il faut nécessairement que

$$y(x) > 0.$$

L'équation s'écrit

$$y'(x) \tan x = y(x) \ln(y(x)).$$

Puisque $\tan x \neq 0$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on peut écrire

$$y'(x) = y(x) \ln(y(x)) \frac{1}{\tan x}.$$

Or

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ainsi,

$$y'(x) = y(x) \ln(y(x)) \frac{\cos x}{\sin x}.$$

3. Résolution élémentaire de l'équation sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Posons

$$u(x) = \ln(y(x)).$$

Cette substitution est permise puisque $y(x) > 0$.

La dérivée de u est

$$u'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

En divisant l'équation par $y(x) > 0$, on obtient

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \tan x = \ln(y(x)).$$

Par définition de u , cela donne

$$u'(x) \tan x = u(x).$$

Sur l'intervalle étudié, $\tan x \neq 0$, donc

$$u'(x) = u(x) \frac{1}{\tan x} = u(x) \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Nous devons distinguer deux cas.

Cas 1 : u est identiquement nulle

Si

$$u(x) = 0$$

pour tout x , alors

$$\ln(y(x)) = 0,$$

donc

$$y(x) = 1.$$

Cette fonction satisfait bien l'équation sur l'intervalle, mais sa limite en 0 vaut 1, et non π .

Cas 2 : u n'est pas identiquement nulle

Sur tout sous-intervalle où $u(x) \neq 0$, on peut diviser par $u(x)$:

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Or

$$\frac{d}{dx}(\ln |u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

et

$$\frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

puisque $\sin x > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Par intégration, il existe donc une constante réelle C_1 telle que

$$\ln |u(x)| = \ln(\sin x) + C_1.$$

En exponentiant,

$$|u(x)| = e^{C_1} \sin x.$$

Le signe peut être incorporé dans une constante réelle C . On obtient alors

$$u(x) = C \sin x.$$

Comme $u(x) = \ln(y(x))$, nous avons

$$\ln(y(x)) = C \sin x.$$

En appliquant la fonction exponentielle,

$$y(x) = e^{C \sin x}.$$

Cette formule inclut également le cas $C = 0$, qui donne $y(x) = 1$.

Ainsi, toutes les solutions positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme

$$\boxed{y(x) = e^{C \sin x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Comportement de ces solutions lorsque $x \rightarrow 0$

Pour toute constante réelle C , on sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} C \sin x = 0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{C \sin x} = e^0 = 1.$$

Ainsi, toute solution de l'équation définie au voisinage de 0 vérifie nécessairement

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

Si l'on voulait prolonger cette solution par continuité en 0, il faudrait obligatoirement poser

$$y(0) = 1.$$

Mais l'énoncé impose

$$y(0) = \pi.$$

Comme

$$\pi \neq 1,$$

la condition initiale est incompatible avec toutes les solutions de l'équation, même lorsque l'équation n'est imposée que pour $x \neq 0$.

Deuxième conclusion : même en interprétant l'équation sur un intervalle privé de 0, aucune solution continue en 0 ne peut vérifier $y(0) = \pi$.

5. Conséquence pour la limite demandée

Puisqu'il n'existe aucune fonction y satisfaisant les hypothèses de l'énoncé, l'objet appelé « la solution y » n'existe pas.

Par conséquent, la quantité

$$Q_{10} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x)$$

ne peut pas être calculée à partir des données fournies : elle n'est pas définie, puisque la fonction y exigée par l'énoncé n'existe pas.

Réponse finale :

Les conditions de l'énoncé sont incompatibles. Il n'existe aucune solution y telle que $y(0) = \pi$. Par conséquent, Q_{10} n'est pas défini.

6. Remarque utile : quelle aurait été la limite pour une solution générale ?

Cette remarque ne change pas la réponse précédente, mais elle permet de comprendre la structure de l'équation.

Pour une solution générale

$$y(x) = e^{C \sin x},$$

on a, lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

$$\sin x \rightarrow 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(x) = e^C.$$

Cette limite dépend de la constante C . Une condition initiale compatible, donnée en un point où $\sin x \neq 0$, permettrait de déterminer C .

Mais la condition $y(0) = \pi$ ne peut pas déterminer une telle constante, car pour toute valeur de C ,

$$e^{C \sin 0} = e^0 = 1.$$

On retrouve donc encore l'incompatibilité

$$y(0) = 1 \neq \pi.$$

7. Rédaction courte à retenir

À $x = 0$, l'équation donnerait

$$y'(0) \tan 0 = y(0) \ln(y(0)),$$

donc

$$0 = \pi \ln \pi,$$

ce qui est impossible. Il n'existe donc aucune solution dérivable en 0 satisfaisant l'équation et la condition $y(0) = \pi$.

Même si l'équation est considérée seulement pour $x \neq 0$, ses solutions positives sont

$$y(x) = e^{C \sin x},$$

et elles vérifient toutes

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

Elles ne peuvent donc pas être prolongées continûment en 0 avec la valeur π .

Ainsi,

Q_{10} n'est pas défini, car la solution annoncée n'existe pas.

Q11 – Correction très détaillée

Énoncé

Évaluer la limite

$$Q_{11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\tan \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right) \right)^{1/x} \right].$$

1. Première analyse de l'expression

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{\pi x}{2x+1} \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Mais l'angle tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures. En effet, pour $x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi(2x+1) - 2\pi x}{2(2x+1)} = \frac{\pi}{2(2x+1)} > 0.$$

Ainsi,

$$0 < \frac{\pi x}{2x+1} < \frac{\pi}{2}.$$

La tangente est donc positive et bien définie pour $x > 0$. De plus,

$$\tan \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right) \longrightarrow +\infty.$$

L'expression à étudier est alors de la forme

$$(+\infty)^0,$$

car $1/x \rightarrow 0$. Cette forme est indéterminée : on ne peut pas conclure directement.

2. Transformation de l'angle

Posons

$$u_x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2x+1}.$$

Le calcul précédent donne

$$\boxed{u_x = \frac{\pi}{4x+2}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$u_x \rightarrow 0^+.$$

De plus,

$$\frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2} - u_x.$$

On utilise l'identité trigonométrique

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \frac{\cos u}{\sin u} = \cot u.$$

On obtient donc

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cot u_x.$$

Ainsi, le terme principal devient

$$\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)^{1/x} = (\cot u_x)^{1/x}.$$

3. Passage au logarithme

Puisque $u_x \rightarrow 0^+$, on a pour x suffisamment grand

$$0 < u_x < \frac{\pi}{2},$$

et donc $\cot u_x > 0$. On peut alors écrire

$$(\cot u_x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(\cot u_x)}{x}\right).$$

Il suffit donc de calculer

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\cot u_x)}{x}.$$

4. Étude détaillée du logarithme

On introduit le facteur u_x :

$$\cot u_x = \frac{u_x \cot u_x}{u_x}.$$

Comme les quantités sont positives, on peut prendre le logarithme :

$$\ln(\cot u_x) = \ln(u_x \cot u_x) - \ln u_x.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(\cot u_x)}{x} = \frac{\ln(u_x \cot u_x)}{x} - \frac{\ln u_x}{x}.$$

Nous allons calculer séparément les deux limites.

4.1. Limite de $u_x \cot u_x$

On a

$$u_x \cot u_x = u_x \frac{\cos u_x}{\sin u_x} = \cos u_x \frac{u_x}{\sin u_x}.$$

Or, lorsque $u_x \rightarrow 0$,

$$\cos u_x \rightarrow 1$$

et, d'après la limite fondamentale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

on a également

$$\frac{u_x}{\sin u_x} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\boxed{u_x \cot u_x \rightarrow 1}.$$

La fonction logarithme étant continue en 1, il vient

$$\ln(u_x \cot u_x) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Ainsi, le numérateur tend vers 0 tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$, donc

$$\boxed{\frac{\ln(u_x \cot u_x)}{x} \rightarrow 0}.$$

4.2. Limite de $-\frac{\ln u_x}{x}$

Comme

$$u_x = \frac{\pi}{4x+2},$$

on a

$$\ln u_x = \ln \pi - \ln(4x+2).$$

Donc

$$-\frac{\ln u_x}{x} = \frac{\ln(4x+2)}{x} - \frac{\ln \pi}{x}.$$

Le second terme vérifie immédiatement

$$\frac{\ln \pi}{x} \rightarrow 0.$$

Pour le premier terme, écrivons

$$\ln(4x+2) = \ln x + \ln\left(4 + \frac{2}{x}\right).$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(4x+2)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(4 + \frac{2}{x}\right)}{x}.$$

On utilise la limite classique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

D'autre part,

$$\ln\left(4 + \frac{2}{x}\right) \rightarrow \ln 4,$$

donc ce numérateur reste borné, tandis que $x \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\frac{\ln\left(4 + \frac{2}{x}\right)}{x} \rightarrow 0.$$

Il en résulte

$$\boxed{\frac{\ln(4x+2)}{x} \rightarrow 0},$$

puis

$$\boxed{-\frac{\ln u_x}{x} \rightarrow 0}.$$

5. Limite de la puissance

Nous avons établi que

$$\frac{\ln(\cot u_x)}{x} = \frac{\ln(u_x \cot u_x)}{x} - \frac{\ln u_x}{x} \longrightarrow 0 - 0 = 0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\exp\left(\frac{\ln(\cot u_x)}{x}\right) \longrightarrow e^0 = 1.$$

Ainsi,

$$\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)^{1/x} \longrightarrow 1.$$

6. Calcul final de Q_{11}

On revient à l'expression initiale :

$$Q_{11} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\tan\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) \right)^{1/x} \right].$$

Le premier terme est constant et le second tend vers 1. Par conséquent,

$$Q_{11} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$Q_{11} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Remarque importante

Aucun développement limité n'a été utilisé. La démonstration repose seulement sur :

- l'identité $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$;
- la limite fondamentale $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$;
- la continuité du logarithme et de l'exponentielle ;
- la limite classique $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$.

Q12 - Dérivée d'une fonction réciproque

Correction complète et détaillée

Énoncé

Soit $a < 1$ et soit h une fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$h(x) = \log_a x - \log_x a.$$

Calculer

$$Q_{12} = (h^{-1})'(0).$$

Pour que les logarithmes $\log_a x$ soient définis, la base a doit vérifier

$$a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1.$$

Comme l'énoncé donne $a < 1$, on travaille donc nécessairement avec

$$0 < a < 1.$$

En particulier, $\ln a < 0$.

1. Écriture de h à l'aide du logarithme népérien

On utilise la formule de changement de base :

$$\log_u v = \frac{\ln v}{\ln u}.$$

Ainsi,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{et} \quad \log_x a = \frac{\ln a}{\ln x}.$$

Par conséquent,

$$h(x) = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln x}, \quad x > 1.$$

Comme $x > 1$, on a $\ln x > 0$, donc aucun dénominateur ne s'annule.

2. Pourquoi la fonction réciproque h^{-1} existe-t-elle ?

Avant d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction réciproque, il faut vérifier que h est bijective, au moins sur l'intervalle considéré.

2.1. Calcul de la dérivée de h

On dérive séparément les deux termes.

Pour le premier terme :

$$\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Pour le deuxième terme, écrivons

$$-\frac{\ln a}{\ln x} = -(\ln a)(\ln x)^{-1}.$$

Comme $\ln a$ est une constante,

$$\left[-(\ln a)(\ln x)^{-1}\right]' = -(\ln a) \left[-(\ln x)^{-2} \frac{1}{x}\right].$$

Donc

$$\left(-\frac{\ln a}{\ln x}\right)' = \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{1}{x \ln a} + \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

Mettons les deux fractions au même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{(\ln x)^2 + (\ln a)^2}{x \ln a (\ln x)^2}.$$

Étudions le signe :

- $x > 1$, donc $x > 0$;
- $(\ln x)^2 > 0$;
- $(\ln x)^2 + (\ln a)^2 > 0$;
- $0 < a < 1$, donc $\ln a < 0$.

Le numérateur est strictement positif et le dénominateur est strictement négatif. Par conséquent,

$$\boxed{h'(x) < 0 \text{ pour tout } x > 1.}$$

La fonction h est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

2.2. Limites aux extrémités

Lorsque $x \rightarrow 1^+$, on a $\ln x \rightarrow 0^+$. Alors

$$\frac{\ln x}{\ln a} \rightarrow 0$$

et, puisque $\ln a < 0$,

$$-\frac{\ln a}{\ln x} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty.}$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\ln x \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\frac{\ln x}{\ln a} \rightarrow -\infty$$

car $\ln a < 0$, tandis que

$$-\frac{\ln a}{\ln x} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty.$$

La fonction h est continue et strictement décroissante de $+\infty$ vers $-\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque

$$h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]1, +\infty[$$

est donc bien définie.

3. Recherche de $h^{-1}(0)$

Pour appliquer la formule de la dérivée de la réciproque en 0, nous devons déterminer le nombre x_0 tel que

$$h(x_0) = 0.$$

Autrement dit,

$$x_0 = h^{-1}(0).$$

Résolvons donc l'équation $h(x) = 0$:

$$\frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln x} = 0.$$

Cela équivaut à

$$\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x}.$$

Puisque $\ln a \neq 0$ et $\ln x \neq 0$, on peut effectuer le produit en croix :

$$(\ln x)^2 = (\ln a)^2.$$

Donc

$$\ln x = \ln a \quad \text{ou} \quad \ln x = -\ln a.$$

Examinons les deux possibilités.

Première possibilité :

$$\ln x = \ln a \implies x = a.$$

Mais $0 < a < 1$, alors que le domaine de h est $x > 1$. Cette valeur est donc impossible.

Deuxième possibilité :

$$\ln x = -\ln a.$$

Or

$$-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right).$$

Donc

$$x = \frac{1}{a}.$$

Comme $0 < a < 1$, on a bien $1/a > 1$. Cette valeur appartient au domaine.

Ainsi,

$$h^{-1}(0) = \frac{1}{a}.$$

4. Formule de dérivation de la fonction réciproque

Si une fonction h est dérivable en x_0 , si $h'(x_0) \neq 0$ et si $y_0 = h(x_0)$, alors

$$(h^{-1})'(y_0) = \frac{1}{h'(x_0)}.$$

Ici,

$$y_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = h^{-1}(0) = \frac{1}{a}.$$

Par conséquent,

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

5. Calcul détaillé de $h'\left(\frac{1}{a}\right)$

Nous avons obtenu

$$h'(x) = \frac{1}{x \ln a} + \frac{\ln a}{x(\ln x)^2}.$$

Prenons $x = 1/a$.

On sait que

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

Donc

$$\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 = (-\ln a)^2 = (\ln a)^2.$$

Le premier terme vaut

$$\frac{1}{\frac{1}{a} \ln a} = \frac{a}{\ln a}.$$

Le deuxième terme vaut

$$\frac{\ln a}{\frac{1}{a} \left(\ln \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\ln a}{\frac{1}{a} (\ln a)^2}.$$

Comme diviser par $1/a$ revient à multiplier par a ,

$$\frac{\ln a}{\frac{1}{a} (\ln a)^2} = \frac{a \ln a}{(\ln a)^2} = \frac{a}{\ln a}.$$

Ainsi,

$$h'\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{\ln a} + \frac{a}{\ln a} = \frac{2a}{\ln a}.$$

Donc

$$\boxed{h'\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2a}{\ln a}}.$$

Cette quantité est non nulle puisque $a > 0$ et $\ln a \neq 0$.

6. Calcul final

D'après la formule de dérivation de la réciproque,

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

Ainsi,

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{2a}{\ln a}} = \frac{\ln a}{2a}.$$

$$Q_{12} = (h^{-1})'(0) = \frac{\ln a}{2a}.$$

Comme $0 < a < 1$, on a $\ln a < 0$, donc le résultat est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que h et h^{-1} sont strictement décroissantes.

7. Rédaction condensée à recopier

Pour $0 < a < 1$ et $x > 1$,

$$h(x) = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln a}{\ln x}.$$

On a

$$h'(x) = \frac{(\ln x)^2 + (\ln a)^2}{x \ln a (\ln x)^2} < 0.$$

De plus, $h(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^+$ et $h(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi, h est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Réolvons $h(x) = 0$:

$$(\ln x)^2 = (\ln a)^2.$$

Comme $x > 1$ et $0 < a < 1$, on retient

$$\ln x = -\ln a, \quad x = \frac{1}{a}.$$

Donc

$$h^{-1}(0) = \frac{1}{a}.$$

Ensuite,

$$h'\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2a}{\ln a}.$$

Par conséquent,

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1/a)} = \frac{\ln a}{2a}.$$

Q13 – Résolution complète et très détaillée

Équation logarithmique faisant intervenir des fonctions trigonométriques

Énoncé

Trouver l'ensemble Q_{13} des solutions réelles de l'équation

$$\ln |\sin x| + \ln |\tan x| = \ln |\cos x|.$$

1. Première étape : déterminer le domaine de définition

Avant de transformer ou de résoudre une équation contenant des logarithmes, il faut commencer par déterminer les valeurs de x pour lesquelles chaque logarithme est défini.

On rappelle que, pour un réel A , l'expression $\ln A$ est définie uniquement lorsque

$$A > 0.$$

Ici, les arguments des logarithmes sont $|\sin x|$, $|\tan x|$ et $|\cos x|$.

1.1. Condition imposée par $\ln |\sin x|$

Pour que $\ln |\sin x|$ soit défini, il faut

$$|\sin x| > 0.$$

Une valeur absolue est strictement positive exactement lorsque le nombre placé à l'intérieur est non nul. Ainsi,

$$|\sin x| > 0 \iff \sin x \neq 0.$$

Or

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il faut donc exclure toutes les valeurs

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.2. Conditions imposées par $\ln |\tan x|$

Pour que $\ln |\tan x|$ soit défini, il faut d'abord que $\tan x$ existe, puis qu'elle soit non nulle.

La tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Elle n'est donc définie que si

$$\cos x \neq 0.$$

De plus, pour que $|\tan x| > 0$, il faut

$$\tan x \neq 0.$$

Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et que $\cos x \neq 0$, on a

$$\tan x = 0 \iff \sin x = 0.$$

Ainsi, $\ln |\tan x|$ impose simultanément

$$\sin x \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \neq 0.$$

1.3. Condition imposée par $\ln |\cos x|$

Pour que $\ln |\cos x|$ soit défini, il faut

$$|\cos x| > 0,$$

ce qui équivaut à

$$\cos x \neq 0.$$

Or

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.4. Domaine commun

En réunissant toutes les conditions, l'équation est définie lorsque

$$\sin x \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \neq 0.$$

Les valeurs interdites sont donc tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$:

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Transformation de l'équation

Sur le domaine D , les nombres $|\sin x|$ et $|\tan x|$ sont strictement positifs. Nous pouvons donc utiliser la propriété

$$\ln A + \ln B = \ln(AB), \quad A > 0, B > 0.$$

L'équation

$$\ln |\sin x| + \ln |\tan x| = \ln |\cos x|$$

devient alors

$$\ln(|\sin x| |\tan x|) = \ln |\cos x|.$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc injective sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, si deux logarithmes sont égaux, leurs arguments sont égaux. Nous obtenons

$$|\sin x| |\tan x| = |\cos x|.$$

Utilisons maintenant

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Sur le domaine D , $\cos x \neq 0$, donc

$$|\tan x| = \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}.$$

L'équation devient

$$|\sin x| \times \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = |\cos x|.$$

Puisque

$$|\sin x| \times |\sin x| = |\sin x|^2$$

et que le carré d'une valeur absolue est égal au carré du nombre,

$$|\sin x|^2 = \sin^2 x,$$

nous obtenons

$$\frac{\sin^2 x}{|\cos x|} = |\cos x|.$$

Comme $x \in D$, nous avons $|\cos x| > 0$. Nous pouvons donc multiplier les deux membres par $|\cos x|$ sans changer l'équivalence :

$$\sin^2 x = |\cos x|^2.$$

Or

$$|\cos x|^2 = \cos^2 x.$$

Ainsi, l'équation initiale est équivalente, sur le domaine D , à

$$\sin^2 x = \cos^2 x.$$

3. Résolution de l'équation trigonométrique

Nous allons résoudre

$$\sin^2 x = \cos^2 x.$$

Deux méthodes élémentaires sont possibles.

Méthode 1 : factorisation d'une différence de deux carrés

On regroupe tout dans le même membre :

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 0.$$

On utilise l'identité

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Avec $A = \sin x$ et $B = \cos x$, on obtient

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Nous avons donc deux cas.

Premier cas : $\sin x - \cos x = 0$

Cela signifie

$$\sin x = \cos x.$$

Puisque $x \in D$, $\cos x \neq 0$. Nous pouvons diviser par $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1.$$

Donc

$$\tan x = 1.$$

Les solutions sont

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Deuxième cas : $\sin x + \cos x = 0$

Cela signifie

$$\sin x = -\cos x.$$

Comme $\cos x \neq 0$, on divise par $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1.$$

Donc

$$\tan x = -1.$$

Les solutions sont

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cette deuxième famille peut également s'écrire

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

car

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{3\pi}{4} + (k-1)\pi,$$

et lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$, $k-1$ parcourt également $\mathbb{Z}$.

Méthode 2 : utilisation de $\tan^2 x$

Comme $x \in D$, on a $\cos x \neq 0$. On peut diviser l'égalité

$$\sin^2 x = \cos^2 x$$

par $\cos^2 x$, qui est strictement positif. On obtient

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1.$$

Donc

$$\tan^2 x = 1.$$

Cela équivaut à

$$\tan x = 1 \quad \text{ou} \quad \tan x = -1.$$

On retrouve exactement les deux familles

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

et

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Vérification détaillée des solutions

Il faut maintenant vérifier que les valeurs obtenues appartiennent bien au domaine et satisfont l'équation initiale.

4.1. Première famille : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Soit

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour ces valeurs,

$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\left| \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus,

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) = 1,$$

donc

$$\left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \right| = 1.$$

Ces trois nombres sont strictement positifs. Les logarithmes sont donc bien définis.

Le membre de gauche de l'équation vaut

$$\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \ln(1).$$

Or

$$\ln(1) = 0.$$

Le membre de gauche devient donc

$$\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Le membre de droite vaut

$$\ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} + k\pi \right) \right| = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Les deux membres sont égaux. Ainsi, toute valeur

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

est bien solution.

4.2. Deuxième famille : $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Soit

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour ces valeurs,

$$\left| \sin \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\left| \cos \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\tan \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi \right) = -1,$$

donc

$$\left| \tan \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi \right) \right| = 1.$$

Les logarithmes sont donc bien définis.

Le membre de gauche est

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Le membre de droite est également

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ainsi, toute valeur

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

est bien solution.

5. Écriture finale de l'ensemble des solutions

Les deux familles de solutions sont donc

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Elles peuvent être réunies en une seule famille. En effet, les angles obtenus sont espacés de $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots$$

On peut donc écrire

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les deux écritures sont équivalentes.

$$Q_{13} = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ou, sous la forme de deux familles,

$$Q_{13} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque importante

La détermination du domaine au début est indispensable. Sans elle, on pourrait effectuer des divisions par $\cos x$ ou écrire des logarithmes pour des valeurs interdites. Ici, toutes les solutions trouvées ont un sinus et un cosinus non nuls ; elles appartiennent donc bien au domaine de l'équation.

6. Rédaction condensée à retenir

Le domaine de l'équation est

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} \ln |\sin x| + \ln |\tan x| &= \ln |\cos x| \\ \iff \ln(|\sin x| |\tan x|) &= \ln |\cos x| \\ \iff |\sin x| |\tan x| &= |\cos x| \\ \iff |\sin x| \frac{|\sin x|}{|\cos x|} &= |\cos x| \\ \iff \sin^2 x &= \cos^2 x \\ \iff \tan^2 x &= 1 \\ \iff \tan x = 1 \text{ ou } \tan x &= -1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Q_{13} = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Q14 - Limite d'une intégrale

Correction complète et très détaillée

Énoncé

Calculer

$$Q_{14} = \lim_{x \rightarrow \pi} \int_{\pi/2}^x \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt.$$

Nous avons remplacé, à l'intérieur de l'intégrale, la lettre d'intégration par t . Cette précaution évite de confondre la variable muette de l'intégrale avec la borne supérieure x .

1. Vérification que l'intégrale a un sens

La fonction intégrée est

$$t \mapsto \frac{1}{1 + \sin t - \cos t}.$$

Il faut vérifier que son dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle compris entre $\pi/2$ et π .

Pour $t \in [\pi/2, \pi]$, on a

$$\sin t \geq 0 \quad \text{et} \quad \cos t \leq 0.$$

Ainsi,

$$1 + \sin t - \cos t \geq 1 > 0.$$

Le dénominateur est donc strictement positif sur tout l'intervalle $[\pi/2, \pi]$. La fonction intégrée y est continue.

Par conséquent, la fonction

$$F(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt$$

est continue au voisinage de π . On peut donc déjà écrire

$$Q_{14} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt.$$

Il reste à calculer cette intégrale.

2. Choix du changement de variable

Le dénominateur contient à la fois $\sin t$ et $\cos t$. Le changement de variable classique

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

permet de transformer les fonctions trigonométriques en expressions rationnelles.

On rappelle les formules :

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dt = \frac{2 du}{1+u^2}.$$

3. Transformation détaillée du dénominateur

Calculons séparément

$$1 + \sin t - \cos t.$$

En remplaçant $\sin t$ et $\cos t$ par leurs expressions en fonction de u , on obtient

$$1 + \sin t - \cos t = 1 + \frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Nous mettons tous les termes au même dénominateur $1+u^2$:

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{1+u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Donc

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{1+u^2+2u-(1-u^2)}{1+u^2}.$$

Développons le signe moins :

$$1 + u^2 + 2u - (1 - u^2) = 1 + u^2 + 2u - 1 + u^2.$$

Ainsi,

$$1 + u^2 + 2u - 1 + u^2 = 2u^2 + 2u = 2u(u+1).$$

Par conséquent,

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{2u(u+1)}{1+u^2}.$$

4. Transformation de l'élément différentiel

Nous avons également

$$dt = \frac{2 du}{1+u^2}.$$

La fraction intégrée devient donc

$$\frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\frac{2u(u+1)}{1+u^2}}.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\frac{2u(u+1)}{1+u^2}} = \frac{2 du}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{2u(u+1)}.$$

Les facteurs 2 et $1+u^2$ se simplifient, d'où

$$\frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \frac{du}{u(u+1)}.$$

5. Transformation des bornes

Lorsque

$$t = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Lorsque t tend vers π par valeurs inférieures,

$$\frac{t}{2} \rightarrow \frac{\pi^-}{2},$$

et donc

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$Q_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)}.$$

Cette intégrale est impropre à cause de la borne $+\infty$.

6. Décomposition en éléments simples

Nous cherchons deux constantes A et B telles que

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur,

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1) + Bu}{u(u+1)}.$$

Il faut donc que

$$A(u+1) + Bu = 1.$$

En développant,

$$(A+B)u + A = 1.$$

Par identification,

$$A = 1 \quad \text{et} \quad A + B = 0.$$

Donc

$$B = -1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}}.$$

7. Calcul rigoureux de l'intégrale impropre

Par définition,

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du.$$

Une primitive de $1/u$ est $\ln u$ sur $]0, +\infty[$, et une primitive de $1/(u+1)$ est $\ln(u+1)$. Donc

$$\int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = [\ln u - \ln(u+1)]_1^R.$$

Cela donne

$$\ln R - \ln(R+1) - (\ln 1 - \ln 2).$$

Or

$$\ln 1 = 0.$$

Donc

$$\int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln R - \ln(R+1) + \ln 2.$$

En utilisant la propriété $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$,

$$\ln R - \ln(R+1) = \ln \left(\frac{R}{R+1} \right).$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$,

$$\frac{R}{R+1} = \frac{1}{1+1/R} \rightarrow 1.$$

Par continuité du logarithme en 1,

$$\ln \left(\frac{R}{R+1} \right) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$Q_{14} = 0 + \ln 2.$$

$$Q_{14} = \ln 2$$

8. Vérification rapide par une primitive

La transformation précédente montre qu'une primitive peut s'écrire

$$\ln \left| \frac{u}{u+1} \right| + C, \quad u = \tan \left(\frac{t}{2} \right).$$

Ainsi,

$$\int_{\pi/2}^x \frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \ln \left(\frac{\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right).$$

Quand $x \rightarrow \pi^-$, on a $\tan(x/2) \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \rightarrow 1.$$

La première expression logarithmique tend alors vers $\ln 1 = 0$, tandis que

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

On retrouve bien

$$Q_{14} = \ln 2.$$

Conclusion

L'intégrande est continue sur $[\pi/2, \pi]$. Après le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right),$$

l'intégrale se ramène à

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)},$$

qui vaut $\ln 2$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \int_{\pi/2}^x \frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \ln 2.$$

Q14 - Limite d'une intégrale

Correction complète et très détaillée

Énoncé

Calculer

$$Q_{14} = \lim_{x \rightarrow \pi} \int_{\pi/2}^x \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt.$$

Nous avons remplacé, à l'intérieur de l'intégrale, la lettre d'intégration par t . Cette précaution évite de confondre la variable muette de l'intégrale avec la borne supérieure x .

1. Vérification que l'intégrale a un sens

La fonction intégrée est

$$t \mapsto \frac{1}{1 + \sin t - \cos t}.$$

Il faut vérifier que son dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle compris entre $\pi/2$ et π .

Pour $t \in [\pi/2, \pi]$, on a

$$\sin t \geq 0 \quad \text{et} \quad \cos t \leq 0.$$

Ainsi,

$$1 + \sin t - \cos t \geq 1 > 0.$$

Le dénominateur est donc strictement positif sur tout l'intervalle $[\pi/2, \pi]$. La fonction intégrée y est continue.

Par conséquent, la fonction

$$F(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt$$

est continue au voisinage de π . On peut donc déjà écrire

$$Q_{14} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin t - \cos t} dt.$$

Il reste à calculer cette intégrale.

2. Choix du changement de variable

Le dénominateur contient à la fois $\sin t$ et $\cos t$. Le changement de variable classique

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

permet de transformer les fonctions trigonométriques en expressions rationnelles.

On rappelle les formules :

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dt = \frac{2 du}{1+u^2}.$$

3. Transformation détaillée du dénominateur

Calculons séparément

$$1 + \sin t - \cos t.$$

En remplaçant $\sin t$ et $\cos t$ par leurs expressions en fonction de u , on obtient

$$1 + \sin t - \cos t = 1 + \frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Nous mettons tous les termes au même dénominateur $1+u^2$:

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{1+u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Donc

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{1+u^2+2u-(1-u^2)}{1+u^2}.$$

Développons le signe moins :

$$1 + u^2 + 2u - (1 - u^2) = 1 + u^2 + 2u - 1 + u^2.$$

Ainsi,

$$1 + u^2 + 2u - 1 + u^2 = 2u^2 + 2u = 2u(u+1).$$

Par conséquent,

$$1 + \sin t - \cos t = \frac{2u(u+1)}{1+u^2}.$$

4. Transformation de l'élément différentiel

Nous avons également

$$dt = \frac{2 du}{1+u^2}.$$

La fraction intégrée devient donc

$$\frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\frac{2u(u+1)}{1+u^2}}.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{\frac{2u(u+1)}{1+u^2}} = \frac{2 du}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{2u(u+1)}.$$

Les facteurs 2 et $1+u^2$ se simplifient, d'où

$$\frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \frac{du}{u(u+1)}.$$

5. Transformation des bornes

Lorsque

$$t = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Lorsque t tend vers π par valeurs inférieures,

$$\frac{t}{2} \rightarrow \frac{\pi^-}{2},$$

et donc

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$Q_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)}.$$

Cette intégrale est impropre à cause de la borne $+\infty$.

6. Décomposition en éléments simples

Nous cherchons deux constantes A et B telles que

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur,

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1) + Bu}{u(u+1)}.$$

Il faut donc que

$$A(u+1) + Bu = 1.$$

En développant,

$$(A+B)u + A = 1.$$

Par identification,

$$A = 1 \quad \text{et} \quad A + B = 0.$$

Donc

$$B = -1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}}.$$

7. Calcul rigoureux de l'intégrale impropre

Par définition,

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du.$$

Une primitive de $1/u$ est $\ln u$ sur $]0, +\infty[$, et une primitive de $1/(u+1)$ est $\ln(u+1)$. Donc

$$\int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = [\ln u - \ln(u+1)]_1^R.$$

Cela donne

$$\ln R - \ln(R+1) - (\ln 1 - \ln 2).$$

Or

$$\ln 1 = 0.$$

Donc

$$\int_1^R \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln R - \ln(R+1) + \ln 2.$$

En utilisant la propriété $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$,

$$\ln R - \ln(R+1) = \ln \left(\frac{R}{R+1} \right).$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$,

$$\frac{R}{R+1} = \frac{1}{1+1/R} \rightarrow 1.$$

Par continuité du logarithme en 1,

$$\ln \left(\frac{R}{R+1} \right) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$Q_{14} = 0 + \ln 2.$$

$$Q_{14} = \ln 2$$

8. Vérification rapide par une primitive

La transformation précédente montre qu'une primitive peut s'écrire

$$\ln \left| \frac{u}{u+1} \right| + C, \quad u = \tan \left(\frac{t}{2} \right).$$

Ainsi,

$$\int_{\pi/2}^x \frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \ln \left(\frac{\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right).$$

Quand $x \rightarrow \pi^-$, on a $\tan(x/2) \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{\tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)} \rightarrow 1.$$

La première expression logarithmique tend alors vers $\ln 1 = 0$, tandis que

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

On retrouve bien

$$Q_{14} = \ln 2.$$

Conclusion

L'intégrande est continue sur $[\pi/2, \pi]$. Après le changement de variable

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right),$$

l'intégrale se ramène à

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)},$$

qui vaut $\ln 2$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \int_{\pi/2}^x \frac{dt}{1 + \sin t - \cos t} = \ln 2.$$

Q15 – Détermination des entiers k pour lesquels A est entier

Correction complète et détaillée

Énoncé

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et

$$A = \frac{(2k^2 + 5k - 2)(4k^2 + 11k + 4)}{k + 3}.$$

Déterminer l'ensemble S des valeurs entières de k telles que $A \in \mathbb{Z}$.

Le dénominateur est $k + 3$. L'expression A n'est donc définie que lorsque

$$k + 3 \neq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad k \neq -3.$$

L'image semble écrire $\mathbb{Z} \setminus \{3\}$, mais la restriction imposée par le dénominateur est bien $k \neq -3$. Cette remarque ne change pas la réponse finale, puisque 3 ne fera pas partie des solutions obtenues.

1. Idée essentielle

Le numérateur est un entier pour tout entier k . Ainsi, pour que le quotient A soit entier, il faut et il suffit que le dénominateur $k + 3$ divise le numérateur

$$N(k) = (2k^2 + 5k - 2)(4k^2 + 11k + 4).$$

Autrement dit,

$$A \in \mathbb{Z} \iff k + 3 \mid N(k).$$

Le calcul direct du produit donnerait un polynôme de degré 4. Cela est possible, mais inutile. La méthode la plus efficace consiste à déterminer le reste de chaque facteur dans la division par $k + 3$.

2. Premier facteur modulo $k + 3$

Considérons

$$P(k) = 2k^2 + 5k - 2.$$

Nous voulons écrire $P(k)$ sous la forme

$$P(k) = (k + 3)Q(k) + r,$$

où r est une constante.

On peut effectuer la division euclidienne :

$$2k^2 + 5k - 2 = (k + 3)(2k - 1) + 1.$$

Vérifions soigneusement :

$$(k+3)(2k-1) = 2k^2 - k + 6k - 3 = 2k^2 + 5k - 3.$$

En ajoutant 1, on retrouve bien

$$2k^2 + 5k - 3 + 1 = 2k^2 + 5k - 2.$$

Donc

$$2k^2 + 5k - 2 = (k+3)(2k-1) + 1.$$

Par conséquent, modulo $k+3$,

$$2k^2 + 5k - 2 \equiv 1 \pmod{k+3}.$$

3. Deuxième facteur modulo $k+3$

Considérons maintenant

$$Q(k) = 4k^2 + 11k + 4.$$

On cherche également son reste dans la division par $k+3$.

On a

$$4k^2 + 11k + 4 = (k+3)(4k-1) + 7.$$

Vérifions :

$$(k+3)(4k-1) = 4k^2 - k + 12k - 3 = 4k^2 + 11k - 3.$$

En ajoutant 7, on obtient

$$4k^2 + 11k - 3 + 7 = 4k^2 + 11k + 4.$$

Ainsi,

$$4k^2 + 11k + 4 = (k+3)(4k-1) + 7.$$

Donc

$$4k^2 + 11k + 4 \equiv 7 \pmod{k+3}.$$

4. Reste du produit

Le numérateur vaut

$$N(k) = (2k^2 + 5k - 2)(4k^2 + 11k + 4).$$

D'après les deux calculs précédents,

$$2k^2 + 5k - 2 \equiv 1 \pmod{k+3}$$

et

$$4k^2 + 11k + 4 \equiv 7 \pmod{k+3}.$$

En multipliant les deux congruences, on obtient

$$N(k) \equiv 1 \times 7 \pmod{k+3},$$

donc

$$\boxed{N(k) \equiv 7 \pmod{k+3}.}$$

Cela signifie qu'il existe un entier dépendant de k , noté $M(k)$, tel que

$$N(k) = (k+3)M(k) + 7.$$

Par conséquent,

$$\frac{N(k)}{k+3} = M(k) + \frac{7}{k+3}.$$

Ainsi,

$$A \in \mathbb{Z} \iff \frac{7}{k+3} \in \mathbb{Z}.$$

Cette dernière condition équivaut à

$$\boxed{k+3 \mid 7.}$$

5. Recherche de tous les diviseurs entiers de 7

Les diviseurs entiers de 7 sont

$$-7, \quad -1, \quad 1, \quad 7.$$

On doit donc résoudre les quatre équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} k+3=1, & k=-2, \\ k+3=-1, & k=-4, \\ k+3=7, & k=4, \\ k+3=-7, & k=-10. \end{array}$$

On obtient les quatre valeurs candidates

$$-10, \quad -4, \quad -2, \quad 4.$$

Aucune d'elles n'est égale à -3 , donc l'expression A est bien définie pour chacune d'elles.

6. Vérification directe des quatre valeurs

La condition $k+3 \mid 7$ suffit déjà à conclure, mais une vérification explicite permet de contrôler le résultat.

Cas $k = -2$

$$\begin{aligned} 2k^2 + 5k - 2 &= 2 \times 4 - 10 - 2 = -4, \\ 4k^2 + 11k + 4 &= 4 \times 4 - 22 + 4 = -2, \end{aligned}$$

et $k+3=1$. Ainsi,

$$A = \frac{(-4)(-2)}{1} = 8 \in \mathbb{Z}.$$

Cas $k = -4$

$$2k^2 + 5k - 2 = 2 \times 16 - 20 - 2 = 10,$$

$$4k^2 + 11k + 4 = 4 \times 16 - 44 + 4 = 24,$$

et $k + 3 = -1$. Donc

$$A = \frac{10 \times 24}{-1} = -240 \in \mathbb{Z}.$$

Cas $k = 4$

$$2k^2 + 5k - 2 = 2 \times 16 + 20 - 2 = 50,$$

$$4k^2 + 11k + 4 = 4 \times 16 + 44 + 4 = 112,$$

et $k + 3 = 7$. Par suite,

$$A = \frac{50 \times 112}{7} = 50 \times 16 = 800 \in \mathbb{Z}.$$

Cas $k = -10$

$$2k^2 + 5k - 2 = 2 \times 100 - 50 - 2 = 148,$$

$$4k^2 + 11k + 4 = 4 \times 100 - 110 + 4 = 294,$$

et $k + 3 = -7$. Ainsi,

$$A = \frac{148 \times 294}{-7} = 148 \times (-42) = -6216 \in \mathbb{Z}.$$

Les quatre valeurs conviennent donc effectivement.

7. Deuxième présentation possible : substitution $d = k + 3$

On peut également poser

$$d = k + 3, \quad \text{donc} \quad k = d - 3.$$

Comme k est entier, d est entier. En remplaçant k par $d - 3$:

$$2k^2 + 5k - 2 = 2(d - 3)^2 + 5(d - 3) - 2.$$

Développons :

$$2(d^2 - 6d + 9) + 5d - 15 - 2 = 2d^2 - 12d + 18 + 5d - 17 = 2d^2 - 7d + 1.$$

Donc

$$2k^2 + 5k - 2 = d(2d - 7) + 1.$$

De même,

$$4k^2 + 11k + 4 = 4(d-3)^2 + 11(d-3) + 4 = 4d^2 - 13d + 7 = d(4d-13) + 7.$$

Le produit est alors de la forme

$$[d(2d-7)+1][d(4d-13)+7].$$

Tous les termes du développement, sauf 1×7 , sont multiples de d . Le reste dans la division par d est donc 7. Il faut alors que d divise 7, ce qui redonne

$$d \in \{-7, -1, 1, 7\}$$

et finalement

$$k = d - 3 \in \{-10, -4, -2, 4\}.$$

Conclusion finale

Le quotient A est entier exactement lorsque $k+3$ divise 7. Ainsi,

$$S = \{-10, -4, -2, 4\}.$$

Rédaction courte à retenir

On a

$$2k^2 + 5k - 2 = (k+3)(2k-1) + 1$$

et

$$4k^2 + 11k + 4 = (k+3)(4k-1) + 7.$$

Ainsi, modulo $k+3$, le numérateur est congru à $1 \times 7 = 7$. Par conséquent,

$$A \in \mathbb{Z} \iff k+3 \mid 7.$$

Comme les diviseurs entiers de 7 sont ± 1 et ± 7 , on obtient

$$k+3 \in \{-7, -1, 1, 7\},$$

d'où

$$S = \{-10, -4, -2, 4\}.$$

Correction très détaillée – Q16

Limite contenant la fonction partie entière

Énoncé. Calculer

$$Q_{16} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E\left(\frac{\ln n}{n - \ln n}\right),$$

où $E(u)$ désigne la partie entière du réel u .

1. Rappel sur la partie entière

Pour tout réel u , $E(u)$ est l'unique entier vérifiant

$$E(u) \leq u < E(u) + 1.$$

En particulier, lorsque

$$0 \leq u < 1,$$

on a nécessairement

$$E(u) = 0.$$

L'idée est donc de montrer que, pour n suffisamment grand, le nombre

$$\frac{\ln n}{n - \ln n}$$

est compris entre 0 et 1.

2. Étude du dénominateur

Pour pouvoir étudier le quotient, nous devons d'abord vérifier que son dénominateur est positif.

Pour $n \geq 2$, nous allons montrer que

$$\ln n < \frac{n}{2}.$$

Considérons la fonction

$$g(x) = \frac{x}{2} - \ln x, \quad x \geq 2.$$

Sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2}{2x}.$$

Pour $x \geq 2$, on a $x - 2 \geq 0$ et $2x > 0$, donc

$$g'(x) \geq 0.$$

La fonction g est donc croissante sur $[2, +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 2$,

$$g(x) \geq g(2) = 1 - \ln 2.$$

Or $\ln 2 < 1$, donc

$$g(2) > 0.$$

Ainsi,

$$g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Cela signifie que

$$\frac{x}{2} - \ln x > 0,$$

d'où

$$\boxed{\ln x < \frac{x}{2} \quad \text{pour tout } x \geq 2.}$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\ln n < \frac{n}{2} < n.$$

Donc

$$n - \ln n > 0.$$

Le quotient est donc bien défini et son dénominateur est strictement positif à partir de $n = 2$.

3. Encadrement du quotient

Pour $n \geq 2$, on a $\ln n > 0$ et $n - \ln n > 0$. Par conséquent,

$$\frac{\ln n}{n - \ln n} > 0.$$

Montrons maintenant que ce quotient est strictement inférieur à 1. Comme le dénominateur $n - \ln n$ est positif, on peut multiplier l'inégalité

$$\frac{\ln n}{n - \ln n} < 1$$

par ce dénominateur sans changer le sens de l'inégalité. On obtient l'équivalence

$$\frac{\ln n}{n - \ln n} < 1 \iff \ln n < n - \ln n.$$

En ajoutant $\ln n$ aux deux membres,

$$\ln n < n - \ln n \iff 2 \ln n < n.$$

Or nous avons démontré que, pour $n \geq 2$,

$$\ln n < \frac{n}{2}.$$

En multipliant par 2, on obtient

$$2 \ln n < n.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln n}{n - \ln n} < 1.$$

Nous avons donc, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\boxed{0 < \frac{\ln n}{n - \ln n} < 1.}$$

4. Calcul de la partie entière

Puisque le nombre

$$\frac{\ln n}{n - \ln n}$$

appartient à l'intervalle $]0, 1[$ pour tout $n \geq 2$, sa partie entière vaut zéro :

$$E\left(\frac{\ln n}{n - \ln n}\right) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n}E\left(\frac{\ln n}{n - \ln n}\right) = \frac{1}{n} \times 0 = 0.$$

La suite dont on cherche la limite est donc exactement nulle à partir du rang 2.

5. Conclusion

Une suite qui est nulle à partir d'un certain rang converge vers 0. Ainsi,

$$Q_{16} = 0.$$

6. Rédaction courte à retenir

Pour $n \geq 2$, considérons $g(x) = \frac{x}{2} - \ln x$. Comme

$$g'(x) = \frac{x-2}{2x} \geq 0$$

sur $[2, +\infty[$ et $g(2) = 1 - \ln 2 > 0$, on a

$$\ln n < \frac{n}{2}.$$

Donc

$$0 < \frac{\ln n}{n - \ln n} < 1.$$

Par suite,

$$E\left(\frac{\ln n}{n - \ln n}\right) = 0$$

pour tout $n \geq 2$. Ainsi,

$$Q_{16} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times 0 = \boxed{0}.$$

Q17 – Matrice non inversible

Correction très détaillée

Énoncé

Pour quelles valeurs du réel m la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1-m & -3 & 4 \\ 4 & -7-m & 8 \\ 6 & -7 & 7-m \end{pmatrix}$$

n'est-elle pas inversible ?

Les réponses proposées sont :

- A. -1 et 2 ;
- B. uniquement -1 ;
- C. -1 et -3 ;
- D. aucune des trois réponses précédentes.

1. Critère d'inversibilité

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Par conséquent,

$$A_m \text{ n'est pas inversible} \iff \det(A_m) = 0.$$

Le problème revient donc à calculer le déterminant de A_m , puis à résoudre l'équation

$$\det(A_m) = 0.$$

2. Calcul détaillé du déterminant

On développe le déterminant suivant la première ligne. Pour une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$\det = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

Dans notre cas,

$$a = 1 - m, \quad b = -3, \quad c = 4.$$

Ainsi,

$$\det(A_m) = (1-m) \begin{vmatrix} -7-m & 8 \\ -7 & 7-m \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-m \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & -7-m \\ 6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Nous allons calculer séparément chacun des trois déterminants d'ordre 2.

Premier déterminant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} -7-m & 8 \\ -7 & 7-m \end{vmatrix} = (-7-m)(7-m) - 8(-7).$$

Calculons le produit :

$$\begin{aligned} (-7-m)(7-m) &= (-7) \times 7 + (-7)(-m) + (-m) \times 7 + (-m)(-m) \\ &= -49 + 7m - 7m + m^2 \\ &= m^2 - 49. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -7-m & 8 \\ -7 & 7-m \end{vmatrix} &= m^2 - 49 + 56 \\ &= m^2 + 7. \end{aligned}$$

Deuxième déterminant d'ordre 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-m \end{vmatrix} &= 4(7-m) - 8 \times 6 \\ &= 28 - 4m - 48 \\ &= -4m - 20. \end{aligned}$$

Troisième déterminant d'ordre 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -7-m \\ 6 & -7 \end{vmatrix} &= 4(-7) - 6(-7-m) \\ &= -28 + 42 + 6m \\ &= 6m + 14. \end{aligned}$$

3. Assemblage et simplification

En remplaçant les trois résultats dans le développement du déterminant, on obtient

$$\det(A_m) = (1-m)(m^2+7) + 3(-4m-20) + 4(6m+14).$$

Développons chaque terme :

$$\begin{aligned} (1-m)(m^2+7) &= m^2+7-m^3-7m \\ &= -m^3+m^2-7m+7, \end{aligned}$$

$$3(-4m - 20) = -12m - 60,$$

et

$$4(6m + 14) = 24m + 56.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\det(A_m) &= (-m^3 + m^2 - 7m + 7) + (-12m - 60) + (24m + 56) \\ &= -m^3 + m^2 + (-7m - 12m + 24m) + (7 - 60 + 56) \\ &= -m^3 + m^2 + 5m + 3.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\boxed{\det(A_m) = -m^3 + m^2 + 5m + 3.}$$

4. Factorisation du polynôme

Nous devons résoudre

$$-m^3 + m^2 + 5m + 3 = 0.$$

Commençons par tester la valeur $m = -1$:

$$\begin{aligned}-(-1)^3 + (-1)^2 + 5(-1) + 3 &= 1 + 1 - 5 + 3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $m + 1$ est un facteur du polynôme. On effectue la factorisation :

$$-m^3 + m^2 + 5m + 3 = -(m^3 - m^2 - 5m - 3).$$

Or

$$\begin{aligned}(m + 1)^2(m - 3) &= (m^2 + 2m + 1)(m - 3) \\ &= m^3 - 3m^2 + 2m^2 - 6m + m - 3 \\ &= m^3 - m^2 - 5m - 3.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}-m^3 + m^2 + 5m + 3 &= -(m + 1)^2(m - 3) \\ &= (3 - m)(m + 1)^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\det(A_m) = -(m - 3)(m + 1)^2.}$$

5. Résolution de l'équation $\det(A_m) = 0$

La matrice n'est pas inversible lorsque

$$-(m-3)(m+1)^2 = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul. Ainsi,

$$m-3=0 \quad \text{ou} \quad (m+1)^2=0.$$

Le premier cas donne

$$m=3.$$

Le second cas donne

$$m+1=0,$$

donc

$$m=-1.$$

Ainsi, la matrice n'est pas inversible exactement pour

$$m=-1 \quad \text{ou} \quad m=3.$$

6. Vérification directe des deux valeurs

Pour $m=-1$,

$$\det(A_{-1}) = -((-1)-3)((-1)+1)^2 = 4 \times 0 = 0.$$

Donc A_{-1} n'est pas inversible.

Pour $m=3$,

$$\det(A_3) = -(3-3)(3+1)^2 = 0.$$

Donc A_3 n'est pas inversible.

Pour toute autre valeur de m , les facteurs $m-3$ et $m+1$ sont tous les deux non nuls; le déterminant est donc non nul et la matrice est inversible.

7. Choix de la bonne réponse

Les valeurs correctes sont

$$-1 \quad \text{et} \quad 3.$$

Comparons avec les propositions :

- la réponse A propose -1 et 2 : elle est fausse ;
- la réponse B propose uniquement -1 : elle est incomplète ;
- la réponse C propose -1 et -3 : elle est fausse ;
- aucune des trois premières réponses ne donne -1 et 3 .

La matrice n'est pas inversible pour

$$m \in \{-1, 3\}.$$

La bonne réponse du QCM est donc

D : aucune des trois réponses précédentes.

Rédaction courte à retenir

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1-m & -3 & 4 \\ 4 & -7-m & 8 \\ 6 & -7 & 7-m \end{vmatrix} = -m^3 + m^2 + 5m + 3.$$

Puis

$$-m^3 + m^2 + 5m + 3 = -(m-3)(m+1)^2.$$

Ainsi,

$$A_m \text{ non inversible} \iff \det(A_m) = 0 \iff m = -1 \text{ ou } m = 3.$$

Donc la réponse correcte est D.

Q18 – Correction très détaillée

Étude d'une fonction définie à l'aide d'une exponentielle et d'un logarithme

Énoncé

Soit f définie par

$$f(0) = 0$$

et, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = e^{x^2 - x + \ln|x|}.$$

Déterminer laquelle des affirmations suivantes est vraie :

- A. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $(0, 0)$.
- B. Sur $[0, 1]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = x$.
- C. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $(1, 1)$ une tangente de pente 3.
- D. Aucune des trois réponses précédentes.

1. Simplification de l'expression de f

Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = e^{x^2 - x + \ln|x|}.$$

En utilisant la propriété

$$e^{u+v} = e^u e^v,$$

on obtient

$$f(x) = e^{x^2 - x} e^{\ln|x|}.$$

Comme $|x| > 0$ lorsque $x \neq 0$, le logarithme $\ln|x|$ est bien défini et

$$e^{\ln|x|} = |x|.$$

Ainsi,

$$f(x) = |x|e^{x^2 - x} \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Cette écriture est beaucoup plus pratique pour étudier la fonction.

Selon le signe de x , on peut encore préciser :

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2-x}, & x > 0, \\ -xe^{x^2-x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2. Étude de l'affirmation A

L'affirmation A dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $(0, 0)$.

Pour qu'il existe une tangente non verticale en ce point, la fonction doit être dérivable en 0. Nous devons donc étudier la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Comme $f(0) = 0$, cela devient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

2.1. Limite à droite

Lorsque $x > 0$, on a $|x| = x$, donc

$$f(x) = xe^{x^2-x}.$$

Par conséquent,

$$\frac{f(x)}{x} = e^{x^2-x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$x^2 - x \rightarrow 0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle,

$$e^{x^2-x} \rightarrow e^0 = 1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.}$$

La courbe possède donc, à droite de 0, une demi-tangente de pente 1.

2.2. Limite à gauche

Lorsque $x < 0$, on a $|x| = -x$, donc

$$f(x) = -xe^{x^2-x}.$$

Alors

$$\frac{f(x)}{x} = -e^{x^2-x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$,

$$x^2 - x \rightarrow 0,$$

donc

$$-e^{x^2-x} \rightarrow -e^0 = -1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

La courbe possède donc, à gauche de 0, une demi-tangente de pente -1 .

2.3. Conclusion pour l'affirmation A

La dérivée en 0 existerait seulement si les limites à droite et à gauche étaient égales. Or

$$1 \neq -1.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

La courbe présente en réalité un point anguleux en $(0,0)$: elle possède deux demi-tangentes différentes, d'équations respectives

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x.$$

Elle n'admet donc pas une tangente unique en ce point.

L'affirmation A est fausse.

3. Étude de l'affirmation B

L'affirmation B prétend que, sur l'intervalle $[0, 1]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite $y = x$.

Dire que la courbe est au-dessus de la droite $y = x$ signifie que

$$f(x) \geq x$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

Sur $[0, 1]$, on a $x \geq 0$. Pour $x > 0$,

$$f(x) = xe^{x^2-x}.$$

Étudions le signe de l'exposant :

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad x - 1 \leq 0.$$

Le produit d'un nombre positif ou nul par un nombre négatif ou nul est négatif ou nul. Donc

$$x(x - 1) \leq 0.$$

Ainsi,

$$x^2 - x \leq 0.$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante,

$$e^{x^2-x} \leq e^0 = 1.$$

Comme $x \geq 0$, on peut multiplier cette inégalité par x sans changer son sens :

$$xe^{x^2-x} \leq x.$$

Or

$$f(x) = xe^{x^2-x}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(x) \leq x \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].}$$

L'égalité se produit aux extrémités :

$$f(0) = 0$$

et

$$f(1) = 1 \times e^{1-1} = 1.$$

Pour $0 < x < 1$, on a $x^2 - x < 0$, donc

$$e^{x^2-x} < 1$$

et par suite

$$f(x) < x.$$

La courbe est donc strictement au-dessous de la droite $y = x$ entre 0 et 1, et elle la rencontre seulement aux points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

L'affirmation B est fausse.

4. Étude de l'affirmation C

L'affirmation C prétend que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $(1, 1)$ une tangente de pente 3.

Commençons par vérifier que le point $(1, 1)$ appartient bien à la courbe. Comme $1 > 0$,

$$f(1) = 1 \cdot e^{1^2-1} = e^0 = 1.$$

Donc le point $(1, 1)$ appartient bien à $\mathcal{C}_f$.

Pour calculer la pente de la tangente en ce point, nous devons calculer $f'(1)$.

Au voisinage de 1, on a $x > 0$, donc

$$f(x) = xe^{x^2-x}.$$

Il s'agit d'un produit. On utilise la formule

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Posons

$$u(x) = x$$

et

$$v(x) = e^{x^2-x}.$$

Alors

$$u'(x) = 1.$$

Pour dériver v , on utilise la formule

$$(e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)}.$$

Ici,

$$g(x) = x^2 - x,$$

donc

$$g'(x) = 2x - 1.$$

Ainsi,

$$v'(x) = (2x - 1)e^{x^2-x}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{x^2-x} + x(2x - 1)e^{x^2-x} \\ &= e^{x^2-x}(1 + x(2x - 1)) \\ &= e^{x^2-x}(1 + 2x^2 - x). \end{aligned}$$

En $x = 1$,

$$\begin{aligned} f'(1) &= e^{1-1}(1 + 2 - 1) \\ &= e^0 \times 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc la pente de la tangente en $(1, 1)$ est

$$\boxed{2}$$

et non 3.

L'équation de cette tangente est d'ailleurs

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1),$$

donc

$$y - 1 = 2(x - 1),$$

ce qui donne

$$\boxed{y = 2x - 1.}$$

L'affirmation C est fausse.

5. Choix de la bonne réponse

Nous avons démontré que :

- l'affirmation A est fausse, car f n'est pas dérivable en 0 ;
- l'affirmation B est fausse, car sur $[0, 1]$, on a au contraire $f(x) \leq x$;
- l'affirmation C est fausse, car la pente de la tangente en $(1, 1)$ vaut 2 et non 3.

Par conséquent, aucune des trois premières réponses n'est correcte.

La bonne réponse est D : aucune des trois réponses précédentes.

6. Résumé à retenir

Pour $x \neq 0$,

$$f(x) = |x|e^{x^2-x}.$$

En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Sur $[0, 1]$:

$$x^2 - x \leq 0 \implies f(x) = xe^{x^2-x} \leq x.$$

En 1 :

$$f'(1) = 2.$$

Ainsi,

Réponse D.

Q19 – Correction très détaillée

Étude des propositions d'un QCM

Énoncé

Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction f_m définie par

$$f_m(0) = m$$

et, pour $x \neq 0$,

$$f_m(x) = \frac{m}{x^2} e^{1/x} + m.$$

On note C_{f_m} sa courbe représentative. Déterminer laquelle des propositions suivantes est vraie :

- A. f_m n'est pas dérivable à gauche en 0.
- B. C_{f_m} et $C_{f_{-m}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- C. Pour $m > 0$,

$$\max_{]-\infty, 0]} f_m = m \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right).$$

- D. Aucune des trois réponses précédentes.

Remarque importante : dans la proposition C, le dénominateur est bien $\sqrt{2}$ et non $\sqrt{e}$. Ainsi,

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Nous allons examiner chaque proposition séparément.

1. Étude de la dérivabilité à gauche en 0

Par définition, f_m est dérivable à gauche en 0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0}$$

existe et est finie.

Pour $x \neq 0$, nous avons

$$f_m(x) = \frac{m}{x^2} e^{1/x} + m$$

et

$$f_m(0) = m.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x} &= \frac{\left(\frac{m}{x^2} e^{1/x} + m \right) - m}{x} \\ &= \frac{\frac{m}{x^2} e^{1/x}}{x} \\ &= \frac{m e^{1/x}}{x^3}. \end{aligned}$$

Il faut donc calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{me^{1/x}}{x^3}.$$

Comme m est une constante, il suffit d'étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

Posons

$$t = -\frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $x < 0$ et

$$-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty,$$

donc $t \rightarrow +\infty$.

De plus,

$$\frac{1}{x} = -t$$

et

$$x = -\frac{1}{t}.$$

Par conséquent,

$$e^{1/x} = e^{-t}$$

et

$$x^3 = -\frac{1}{t^3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{e^{1/x}}{x^3} &= \frac{e^{-t}}{-1/t^3} \\ &= -t^3 e^{-t} \\ &= -\frac{t^3}{e^t}. \end{aligned}$$

Or l'exponentielle domine toute puissance :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^3} = 0.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x} = m \times 0 = 0.$$

Ainsi, f_m est bien dérivable à gauche en 0 et

$$\boxed{f'_{m,g}(0) = 0.}$$

La proposition A affirme le contraire. Elle est donc **fausse**.

2. Étude de la symétrie entre C_{f_m} et $C_{f_{-m}}$

Remplaçons m par $-m$ dans la définition de la fonction. Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f_{-m}(x) &= \frac{-m}{x^2} e^{1/x} - m \\ &= - \left(\frac{m}{x^2} e^{1/x} + m \right) \\ &= -f_m(x). \end{aligned}$$

En $x = 0$,

$$f_{-m}(0) = -m = -f_m(0).$$

Par conséquent, pour tout x du domaine,

$$\boxed{f_{-m}(x) = -f_m(x).}$$

Cette relation signifie que, pour une même abscisse x , les ordonnées des deux courbes sont opposées. Si un point

$$M(x, f_m(x))$$

appartient à C_{f_m} , alors le point

$$M'(x, -f_m(x))$$

appartient à $C_{f_{-m}}$.

Les points M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Ainsi,

$$\boxed{C_{f_m} \text{ et } C_{f_{-m}} \text{ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.}}$$

La proposition B parle d'une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Pour obtenir une telle symétrie, il faudrait avoir une relation du type

$$f_{-m}(x) = f_m(-x),$$

ce qui n'est pas le cas ici.

La proposition B est donc **fausse**.

3. Étude du maximum de f_m sur $] -\infty, 0]$ lorsque $m > 0$

Supposons désormais

$$m > 0.$$

Pour $x < 0$, écrivons

$$f_m(x) = m \left(\frac{e^{1/x}}{x^2} + 1 \right).$$

Comme $m > 0$, maximiser f_m revient à maximiser la fonction

$$g(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

sur $] -\infty, 0[$.

Nous allons étudier précisément les variations de g .

3.1. Calcul de la dérivée de g

On écrit

$$g(x) = x^{-2}e^{1/x}.$$

C'est le produit de deux fonctions :

$$u(x) = x^{-2} \quad \text{et} \quad v(x) = e^{1/x}.$$

On a

$$u'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Pour v , par dérivation d'une composée,

$$v'(x) = e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -\frac{2}{x^3}e^{1/x} + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{e^{1/x}}{x^2} \right) \\ &= -\frac{2e^{1/x}}{x^3} - \frac{e^{1/x}}{x^4}. \end{aligned}$$

On met $-\frac{e^{1/x}}{x^4}$ en facteur :

$$-\frac{2e^{1/x}}{x^3} = -\frac{e^{1/x}}{x^4}(2x).$$

Ainsi,

$$g'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^4}(2x + 1).$$

3.2. Étude du signe de $g'(x)$

Pour tout $x < 0$,

$$e^{1/x} > 0$$

et

$$x^4 > 0.$$

Donc

$$-\frac{e^{1/x}}{x^4} < 0.$$

Le signe de $g'(x)$ est donc l'opposé de celui de $2x + 1$.

Réolvons

$$2x + 1 = 0.$$

On obtient

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Si $x < -\frac{1}{2}$, alors $2x + 1 < 0$, donc

$$g'(x) > 0.$$

Ainsi, g est croissante sur

$$]-\infty, -\frac{1}{2}].$$

Si $-\frac{1}{2} < x < 0$, alors $2x + 1 > 0$, donc

$$g'(x) < 0.$$

Ainsi, g est décroissante sur

$$[-\frac{1}{2}, 0[.$$

Par conséquent, g atteint son maximum en

$$x = -\frac{1}{2}.$$

3.3. Valeur du maximum

Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{e^{1/(-1/2)}}{(-1/2)^2} \\ &= \frac{e^{-2}}{1/4} \\ &= 4e^{-2} \\ &= \frac{4}{e^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\max_{]-\infty, 0[} g = \frac{4}{e^2}.$$

Comme

$$f_m(x) = m(g(x) + 1),$$

on en déduit

$$\max_{]-\infty, 0[} f_m = m\left(1 + \frac{4}{e^2}\right).$$

De plus,

$$f_m(0) = m.$$

Or

$$1 + \frac{4}{e^2} > 1,$$

donc

$$m\left(1 + \frac{4}{e^2}\right) > m = f_m(0).$$

Le maximum sur $]-\infty, 0]$ est donc encore atteint en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{\max_{]-\infty, 0]} f_m = m\left(1 + \frac{4}{e^2}\right)}.$$

4. Comparaison avec la proposition C

La proposition C affirme que

$$\max_{]-\infty, 0]} f_m = m \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right).$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

La valeur proposée est donc

$$m(1 + \sqrt{2}).$$

Mais la valeur exacte est

$$m \left(1 + \frac{4}{e^2} \right).$$

Ces deux nombres ne sont pas égaux. En effet,

$$\frac{4}{e^2} \approx 0,541$$

alors que

$$\sqrt{2} \approx 1,414.$$

Ainsi,

$$1 + \frac{4}{e^2} \neq 1 + \sqrt{2}.$$

La proposition C est donc **fausse**, même en tenant compte du fait que le dénominateur est bien $\sqrt{2}$.

5. Conclusion sur le QCM

Nous avons établi que :

- la proposition A est fausse, car f_m est dérivable à gauche en 0 et $f'_{m,g}(0) = 0$;
- la proposition B est fausse, car C'_{f_m} et $C'_{f_{-m}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ;
- la proposition C est fausse, car

$$\max_{]-\infty, 0]} f_m = m \left(1 + \frac{4}{e^2} \right)$$

et non

$$m \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right).$$

Par conséquent, aucune des trois premières propositions n'est correcte.

La bonne réponse est D : aucune des trois réponses précédentes.

Résultat final à retenir

Pour $m > 0$,

$$\max_{]-\infty, 0]} f_m = m \left(1 + \frac{4}{e^2} \right),$$

ce maximum étant atteint en

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Et, pour tout $m \neq 0$,

$$f'_{m,g}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_{-m} = -f_m.$$

Q20 - Tirages de jetons et loi binomiale

Énoncé et correction très détaillée

Énoncé

Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom

« SAHARA MAROCAIN ».

On tire simultanément 5 jetons. On répète cette expérience 3 fois en remettant, après chaque tirage, les 5 jetons tirés dans la boîte. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

On note Y le nombre de fois où l'on peut former le mot « SMARA » avec les 5 lettres tirées.

Calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(Y = 3).$$

Les réponses proposées sont :

$$A : \frac{1000}{(1001)^3}, \quad B : \frac{1001}{(1001)^3}, \quad C : \frac{1002}{(1001)^3}, \quad D : \frac{1003}{(1001)^3}.$$

1. Comprendre exactement l'expérience

À chaque expérience, on tire **simultanément** 5 jetons parmi les 14 jetons de la boîte.

Comme les jetons sont tirés simultanément, l'ordre d'apparition des lettres ne compte pas. Par exemple, tirer les lettres

S, M, A, R, A

ou

A, R, S, A, M

correspond au même groupe de cinq jetons : dans les deux cas, on peut former le mot « SMARA ».

Il faut donc compter des **combinaisons** de 5 jetons parmi 14, et non des arrangements.

2. Compter les lettres disponibles

Écrivons toutes les lettres de « SAHARA MAROCAIN » :

$\underbrace{S A H A R A}_{\text{SAHARA}} \quad \underbrace{M A R O C A I N}_{\text{MAROCAIN}}.$

On obtient les effectifs suivants :

Lettre	A	R	S	M	H	O	C	I	N
Nombre de jetons	5	2	1	1	1	1	1	1	1

Vérification :

$$5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14.$$

Le mot « SMARA » contient exactement :

1 lettre S , 1 lettre M , 1 lettre R , 2 lettres A .

3. Nombre total de tirages possibles

Un tirage est un choix de 5 jetons parmi les 14 jetons, sans tenir compte de l'ordre.

Le nombre total de tirages possibles est donc

$$\binom{14}{5}.$$

Calculons-le :

$$\begin{aligned} \binom{14}{5} &= \frac{14!}{5!9!} \\ &= \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{240240}{120} \\ &= 2002. \end{aligned}$$

Ainsi,

Nombre total de tirages = 2002.

4. Nombre de tirages permettant de former « SMARA »

Pour pouvoir former « SMARA », il faut choisir :

- le seul jeton portant la lettre S : $\binom{1}{1} = 1$ possibilité ;
- le seul jeton portant la lettre M : $\binom{1}{1} = 1$ possibilité ;
- un jeton R parmi les deux jetons R disponibles : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités ;
- deux jetons A parmi les cinq jetons A disponibles : $\binom{5}{2}$ possibilités.

Or

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10.$$

Le nombre de tirages favorables est donc

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{2} &= 1 \times 1 \times 2 \times 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Ainsi,

Nombre de tirages favorables = 20.

5. Probabilité de former « SMARA » lors d'un seul tirage

Tous les tirages étant équiprobables, la probabilité de l'événement

$$E = \{\text{« les cinq lettres tirées permettent de former SMARA »}\}$$

est donnée par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombre de tirages favorables}}{\text{nombre total de tirages}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \frac{20}{2002} \\ &= \frac{10}{1001}.\end{aligned}$$

Nous noterons

$$p = \frac{10}{1001}.$$

6. Pourquoi les trois expériences sont indépendantes

Après chaque tirage, les cinq jetons sont remis dans la boîte.

Par conséquent, avant chacune des trois expériences :

- la boîte contient de nouveau les mêmes 14 jetons ;
- la probabilité de former « SMARA » reste égale à $p = \frac{10}{1001}$;
- le résultat d'une expérience ne modifie pas les probabilités des expériences suivantes.

Les trois expériences sont donc indépendantes et identiques.

La variable aléatoire Y , qui compte le nombre de succès parmi trois expériences indépendantes, suit une loi binomiale de paramètres

$$n = 3 \quad \text{et} \quad p = \frac{10}{1001}.$$

Ainsi,

$$Y \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{10}{1001}\right).$$

7. Calcul de $\mathbb{P}(Y = 3)$

L'événement $Y = 3$ signifie que l'on réussit à former « SMARA » lors des trois expériences.

Avec la formule de la loi binomiale,

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3}.$$

Or

$$\binom{3}{3} = 1 \quad \text{et} \quad (1 - p)^0 = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 3) &= p^3 \\ &= \left(\frac{10}{1001}\right)^3 \\ &= \frac{10^3}{(1001)^3} \\ &= \frac{1000}{(1001)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1000}{(1001)^3}$$

La bonne réponse est donc

A.

8. Vérification par un raisonnement direct

On peut également raisonner sans citer directement la formule binomiale.

La probabilité de réussir la première expérience est

$$\frac{10}{1001}.$$

Après remise des jetons, la probabilité de réussir la deuxième est encore

$$\frac{10}{1001}.$$

De même, la probabilité de réussir la troisième est

$$\frac{10}{1001}.$$

Comme les trois expériences sont indépendantes, la probabilité de réussir les trois est le produit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 3) &= \frac{10}{1001} \times \frac{10}{1001} \times \frac{10}{1001} \\ &= \frac{1000}{(1001)^3}. \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

9. Points importants à retenir

- Le tirage est simultané : l'ordre des jetons ne compte pas.
- Les cinq jetons A sont des jetons distincts, même s'ils portent la même lettre ; il faut donc choisir deux jetons parmi cinq, soit $\binom{5}{2} = 10$ choix.
- Il existe deux jetons portant la lettre R , d'où le facteur $\binom{2}{1} = 2$.
- La remise des jetons après chaque tirage garantit l'indépendance et conserve la même probabilité de succès à chaque expérience.

Q21 - Probabilité qu'un point appartienne à une ellipse

Énoncé. Une boîte A contient trois jetons numérotés 1, 2 et 4. Une boîte B contient six jetons numérotés 0, 3, 3, 5, 5 et 5. On tire au hasard un jeton dans A et on note a le nombre obtenu. On remet ensuite ce jeton dans A . On effectue la même opération dans B et on note b le nombre obtenu. Au couple (a, b) , on associe le point $M(a, b)$.

Calculer la probabilité pour que $M(a, b)$ appartienne à l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

1. Comprendre l'expérience aléatoire

La boîte A contient exactement trois jetons distincts, portant les nombres

$$1, \quad 2, \quad 4.$$

Comme le tirage est effectué au hasard, chacun de ces trois jetons a la même probabilité d'être tiré. Ainsi,

$$\mathbb{P}(a = 1) = \mathbb{P}(a = 2) = \mathbb{P}(a = 4) = \frac{1}{3}.$$

La boîte B contient six jetons physiques :

$$0, \quad 3, \quad 3, \quad 5, \quad 5, \quad 5.$$

Les six jetons sont équiprobables, mais les trois valeurs possibles 0, 3 et 5 ne le sont pas, car elles ne sont pas répétées le même nombre de fois.

On a donc

$$\mathbb{P}(b = 0) = \frac{1}{6},$$

car un seul jeton porte le nombre 0,

$$\mathbb{P}(b = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

car deux jetons portent le nombre 3, et

$$\mathbb{P}(b = 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

car trois jetons portent le nombre 5.

Il ne faut surtout pas écrire

$$\mathbb{P}(b = 0) = \mathbb{P}(b = 3) = \mathbb{P}(b = 5) = \frac{1}{3}.$$

Les valeurs 0, 3 et 5 ne sont pas équiprobables. Ce sont les six jetons de la boîte qui le sont.

2. Traduction de la condition géométrique

Le point obtenu après les deux tirages est

$$M(a, b).$$

Pour que ce point appartienne à l'ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1,$$

il faut et il suffit que ses coordonnées $x = a$ et $y = b$ vérifient l'équation de l'ellipse. Ainsi, la condition recherchée est

$$\boxed{\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.}$$

Nous devons donc examiner toutes les valeurs possibles de a , à savoir 1, 2 et 4, puis déterminer pour chacune d'elles quelles valeurs de b peuvent convenir.

3. Étude du cas $a = 1$

Si $a = 1$, l'équation devient

$$\frac{1^2}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

En soustrayant $\frac{1}{16}$ aux deux membres,

$$\frac{b^2}{12} = 1 - \frac{1}{16}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Ainsi,

$$\frac{b^2}{12} = \frac{15}{16}.$$

En multipliant par 12,

$$b^2 = 12 \times \frac{15}{16} = \frac{180}{16} = \frac{45}{4}.$$

On aurait donc

$$b = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Mais les seules valeurs possibles de b sont

$$0, \quad 3, \quad 5.$$

Aucune de ces valeurs ne convient.

Ainsi, lorsque $a = 1$, aucun point obtenu ne se trouve sur l'ellipse.

4. Étude du cas $a = 2$

Si $a = 2$, l'équation devient

$$\frac{2^2}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

Comme $2^2 = 4$,

$$\frac{4}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

Or

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\frac{1}{4} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

En soustrayant $\frac{1}{4}$ aux deux membres,

$$\frac{b^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

En multipliant par 12,

$$b^2 = 12 \times \frac{3}{4} = 9.$$

Ainsi,

$$b = 3 \quad \text{ou} \quad b = -3.$$

Dans la boîte B , la valeur -3 n'existe pas, mais la valeur 3 existe et elle apparaît sur deux jetons.

Par conséquent, pour $a = 2$, le point appartient à l'ellipse exactement lorsque

$$b = 3.$$

On vérifie directement :

$$\frac{2^2}{16} + \frac{3^2}{12} = \frac{4}{16} + \frac{9}{12} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Le couple $(2, 3)$ convient donc bien.

5. Étude du cas $a = 4$

Si $a = 4$, l'équation devient

$$\frac{4^2}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

Comme $4^2 = 16$,

$$\frac{16}{16} + \frac{b^2}{12} = 1.$$

Donc

$$1 + \frac{b^2}{12} = 1.$$

En soustrayant 1 aux deux membres,

$$\frac{b^2}{12} = 0.$$

Ainsi,

$$b^2 = 0,$$

d'où

$$b = 0.$$

La valeur 0 apparaît sur un jeton de la boîte B .

On vérifie directement :

$$\frac{4^2}{16} + \frac{0^2}{12} = \frac{16}{16} + 0 = 1.$$

Le couple $(4, 0)$ convient donc bien.

6. Couples favorables

Nous avons montré que les seuls couples de valeurs satisfaisant l'équation de l'ellipse sont

$$(a, b) = (2, 3) \quad \text{ou} \quad (a, b) = (4, 0).$$

Il faut maintenant tenir compte des répétitions des jetons de la boîte B .

Valeur de a	Valeur de b	Nombre de jetons favorables dans B	Couple favorable
2	3	2	(2, 3)
4	0	1	(4, 0)

7. Première méthode : calcul par les probabilités

Les tirages dans les deux boîtes sont indépendants. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(a = 2 \text{ et } b = 3) = \mathbb{P}(a = 2) \times \mathbb{P}(b = 3).$$

Donc

$$\mathbb{P}(a = 2 \text{ et } b = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(a = 4 \text{ et } b = 0) = \mathbb{P}(a = 4) \times \mathbb{P}(b = 0),$$

d'où

$$\mathbb{P}(a = 4 \text{ et } b = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Les deux événements sont incompatibles : on ne peut pas avoir simultanément $(a, b) = (2, 3)$ et $(a, b) = (4, 0)$. On additionne donc leurs probabilités :

$$\mathbb{P}(M \text{ appartient à l'ellipse}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}.$$

Or

$$\frac{1}{9} = \frac{2}{18}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(M \text{ appartient à l'ellipse}) = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

8. Deuxième méthode : comptage des issues équiprobables

On peut également raisonner directement sur les jetons physiques.

Dans la boîte A , il y a 3 choix possibles. Dans la boîte B , il y a 6 choix possibles. Comme les tirages sont indépendants, le nombre total d'issues équiprobables est

$$3 \times 6 = 18.$$

Comptons les issues favorables :

- pour obtenir $(a, b) = (2, 3)$, il faut tirer le jeton 2 dans A et l'un des deux jetons 3 dans B : cela donne 2 issues favorables ;
- pour obtenir $(a, b) = (4, 0)$, il faut tirer le jeton 4 dans A et l'unique jeton 0 dans B : cela donne 1 issue favorable.

Le nombre total d'issues favorables est donc

$$2 + 1 = 3.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(M \text{ appartient à l'ellipse}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

9. Conclusion et choix du QCM

La probabilité pour que le point $M(a, b)$ appartienne à l'ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

est

$$\boxed{\mathbb{P} = \frac{1}{6}.$$

La bonne réponse du QCM est donc

$$\boxed{\text{A.}}$$

Q22 – Méthode rapide pour résoudre le QCM

Cette méthode permet de trouver la bonne réponse sans effectuer tous les calculs du corrigé complet. Elle exploite uniquement quelques propriétés géométriques essentielles.

1. Détermination de la direction du plan (H)

Le plan (H) est perpendiculaire aux plans (P) et (Q). Son vecteur normal est donc le produit vectoriel des vecteurs normaux de ces deux plans : $(1,1,1)$ et $(1,-1,1)$. On obtient un vecteur normal parallèle à $(1,0,-1)$. Le plan (H) est donc très simple à caractériser.

2. Centre du cercle d'intersection

L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle (lorsqu'elle n'est pas vide). Son centre est toujours la projection orthogonale du centre de la sphère sur le plan. Le centre de la sphère est $B(-1/2, 3/2, 0)$. Comme le vecteur normal est $(1,0,-1)$, la projection conserve la coordonnée y . On obtient rapidement le centre $C(-1/4, 3/2, -1/4)$.

3. Élimination des réponses du QCM

- Proposition B : un grand cercle n'existe que si le plan passe par le centre de la sphère. Ici B n'appartient pas au plan (H). La proposition B est donc fausse.
- Proposition C : la sphère passe par A et le plan (H) passe également par A. L'intersection contient donc au moins le point A. Elle ne peut pas être vide.
- Proposition A : le centre proposé n'appartient pas au plan (H). Or le centre du cercle d'intersection appartient toujours au plan. La proposition A est donc fausse.

Conclusion

Les propositions A, B et C étant éliminées, il ne reste qu'une seule possibilité :

D : Aucune des trois réponses précédentes.

Cette stratégie permet de répondre en moins d'une minute sans calculer le rayon du cercle. Elle est particulièrement adaptée à un QCM.

Q22 – Géométrie dans l'espace

Correction très détaillée

Énoncé

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points

$$A(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right),$$

ainsi que les deux plans

$$(P) : x + y + z - 1 = 0,$$

$$(Q) : x - y + z + 2 = 0.$$

Le plan (H) passe par A et est perpendiculaire à (P) et à (Q) . La sphère S est de centre B et passe par A . Déterminer l'intersection de S et de (H) .

Les propositions du QCM sont :

- A. un cercle de centre $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{55}{8}}$;
- B. le plus grand cercle contenu dans la sphère ;
- C. l'ensemble vide ;
- D. aucune des trois réponses précédentes.

1. Détermination du plan (H)

Le plan (P) a pour équation

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Un vecteur normal à (P) est donc

$$\vec{n}_P = (1, 1, 1).$$

Le plan (Q) a pour équation

$$x - y + z + 2 = 0.$$

Un vecteur normal à (Q) est donc

$$\vec{n}_Q = (1, -1, 1).$$

Le plan (H) est perpendiculaire à (P) et à (Q) . Son vecteur normal doit donc être orthogonal à $\vec{n}_P$ et à $\vec{n}_Q$. On peut obtenir un tel vecteur en calculant le produit vectoriel

$$\vec{n}_H = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q.$$

Calculons-le :

$$\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi,

$$\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = (1 \times 1 - 1 \times (-1), 1 \times 1 - 1 \times 1, 1 \times (-1) - 1 \times 1).$$

Donc

$$\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = (2, 0, -2) = 2(1, 0, -1).$$

On peut donc choisir

$$\vec{n}_H = (1, 0, -1).$$

Le plan (H) passe par $A(1, 1, 1)$. Son équation est donc

$$1(x - 1) + 0(y - 1) - 1(z - 1) = 0.$$

En développant,

$$x - 1 - z + 1 = 0,$$

d'où

$$\boxed{(H) : x - z = 0.}$$

2. Détermination de la sphère S

La sphère S a pour centre

$$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

et passe par

$$A(1, 1, 1).$$

Son rayon est donc la distance BA .

Calculons le carré du rayon :

$$R^2 = BA^2.$$

On a

$$\overrightarrow{BA} = A - B = \left(1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{2}, 1 - 0\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Par conséquent,

$$R^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2.$$

Donc

$$R^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{10}{4} + 1 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{7}{2}}}.$$

L'équation de la sphère est donc

$$\boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{7}{2}}.$$

3. Position du centre B par rapport au plan (H)

Pour savoir si l'intersection est vide, réduite à un point ou égale à un cercle, on calcule la distance du centre B au plan (H) .

Le plan (H) a pour équation

$$x - z = 0.$$

La distance d'un point (x_0, y_0, z_0) au plan $ax + by + cz + d = 0$ est

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ici,

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1, \quad d = 0,$$

et

$$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$$

Donc

$$d(B, (H)) = \frac{\left|-\frac{1}{2} - 0\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}.$$

Ainsi,

$$d(B, (H)) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

En élevant au carré,

$$d(B, (H))^2 = \frac{1}{8}.$$

Comparons avec le carré du rayon :

$$R^2 = \frac{7}{2} = \frac{28}{8}.$$

On a donc

$$d(B, (H))^2 = \frac{1}{8} < \frac{28}{8} = R^2.$$

Par conséquent, le plan coupe la sphère suivant un cercle. L'intersection n'est donc pas vide.

4. Centre du cercle d'intersection

Le centre du cercle $S \cap (H)$ est le projeté orthogonal du centre B de la sphère sur le plan (H) . Notons ce projeté C .

Comme un vecteur normal à (H) est

$$\vec{n}_H = (1, 0, -1),$$

la droite passant par B et perpendiculaire à (H) admet la représentation paramétrique

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + t(1, 0, -1).$$

Ainsi,

$$x = -\frac{1}{2} + t, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = -t.$$

Le point C appartient au plan (H) , donc ses coordonnées vérifient

$$x - z = 0.$$

En remplaçant x et z par leurs expressions,

$$-\frac{1}{2} + t - (-t) = 0.$$

Donc

$$-\frac{1}{2} + 2t = 0,$$

d'où

$$2t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x_C &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}, \\ y_C &= \frac{3}{2}, \\ z_C &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, le centre du cercle d'intersection est

$$\boxed{C \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \right)}.$$

Remarquons en particulier que la troisième coordonnée est $-\frac{1}{4}$ et non $\frac{1}{4}$.

5. Rayon du cercle d'intersection

Soit r le rayon du cercle $S \cap (H)$. Dans le triangle rectangle formé par le centre B de la sphère, le centre C du cercle et un point M du cercle, on a

$$BM^2 = BC^2 + CM^2.$$

Or

$$BM = R, \quad BC = d(B, (H)), \quad CM = r.$$

Donc

$$R^2 = d(B, (H))^2 + r^2.$$

Ainsi,

$$r^2 = R^2 - d(B, (H))^2.$$

En remplaçant,

$$r^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{8}.$$

On met au même dénominateur :

$$r^2 = \frac{28}{8} - \frac{1}{8} = \frac{27}{8}.$$

Donc

$$r = \sqrt{\frac{27}{8}}.$$

On peut également écrire

$$r = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Par conséquent,

$$S \cap (H) \text{ est le cercle de centre } \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{27}{8}}.$$

6. Analyse des propositions

Proposition A

La proposition A donne comme centre

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

et comme rayon

$$\sqrt{\frac{55}{8}}.$$

Or nous avons trouvé

$$C\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

et

$$r = \sqrt{\frac{27}{8}}.$$

La proposition A est donc fausse.

Proposition B

Le plus grand cercle contenu dans une sphère est obtenu lorsque le plan de coupe passe par le centre de la sphère. Il aurait alors le même rayon que la sphère.

Or le centre B n'appartient pas à (H) , puisque

$$x_B - z_B = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Le plan (H) ne passe donc pas par le centre de la sphère. L'intersection n'est pas un grand cercle. La proposition B est fausse.

Proposition C

Nous avons montré que

$$d(B, (H)) < R.$$

Le plan coupe donc la sphère suivant un cercle. L'intersection n'est pas vide. La proposition C est fausse.

Conclusion

Aucune des propositions A, B et C n'est correcte.

La bonne réponse est D : aucune des trois réponses précédentes.

Plus précisément,

$S \cap (H)$ est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{27}{8}}$.

Q23 – Correction très détaillée

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul et $(I_n)_n$ la suite définie par

$$I_n = \int_1^0 x e^{-nx^2} dx.$$

Choisir la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

- A. $I_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) \left(1 + \frac{1}{e^n}\right)$;
- B. $(I_n)_n$ est minorée par $-\frac{1}{2}$;
- C. $(I_n)_n$ converge vers 0 ;
- D. aucune des trois réponses précédentes.

1. Lecture attentive de l'intégrale

Il faut d'abord remarquer que la borne inférieure est 1 et la borne supérieure est 0. L'intégrale est donc prise dans le sens inverse du sens habituel :

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

Ici, pour $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$, on a

$$x \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{-nx^2} > 0.$$

Par conséquent,

$$x e^{-nx^2} \geq 0.$$

Donc

$$\int_0^1 x e^{-nx^2} dx \geq 0,$$

et, en inversant les bornes,

$$I_n = \int_1^0 x e^{-nx^2} dx \leq 0.$$

Ainsi, tous les termes de la suite sont négatifs ou nuls. En réalité, ils sont strictement négatifs, puisque l'intégrande est strictement positive pour $x \in]0, 1]$.

2. Calcul exact de I_n

On cherche une primitive de

$$x e^{-nx^2}.$$

On remarque que la dérivée de $-nx^2$ est

$$(-nx^2)' = -2nx.$$

La présence du facteur x suggère donc le changement de variable

$$u = -nx^2.$$

Alors

$$du = -2nx \, dx,$$

d'où

$$x \, dx = -\frac{1}{2n} \, du.$$

On peut également reconnaître directement une primitive :

$$\frac{d}{dx} (e^{-nx^2}) = -2nxe^{-nx^2}.$$

Ainsi,

$$xe^{-nx^2} = -\frac{1}{2n} \frac{d}{dx} (e^{-nx^2}),$$

et donc une primitive est

$$-\frac{1}{2n} e^{-nx^2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{2n} e^{-nx^2} \right]_1^0 \\ &= -\frac{1}{2n} e^0 - \left(-\frac{1}{2n} e^{-n} \right) \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{e^{-n}}{2n} \\ &= \frac{e^{-n} - 1}{2n}. \end{aligned}$$

Comme $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$, on peut aussi écrire

$$I_n = -\frac{1 - e^{-n}}{2n}$$

ou encore

$$I_n = -\frac{1 - \frac{1}{e^n}}{2n}.$$

3. Étude de la proposition A

La proposition A affirme que

$$I_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) \left(1 + \frac{1}{e^n} \right).$$

Or le membre de droite est positif, car pour $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{e^n} < 1,$$

donc

$$1 - \frac{1}{e^n} > 0 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{e^n} > 0.$$

Mais nous avons démontré que $I_n < 0$. Les deux expressions ne peuvent donc pas être égales.

D'ailleurs, la valeur exacte est

$$I_n = -\frac{1 - \frac{1}{e^n}}{2n},$$

qui contient un signe moins et un facteur n au dénominateur.

Ainsi,

la proposition A est fausse.

4. Étude de la proposition B

La proposition B affirme que la suite $(I_n)_n$ est minorée par $-\frac{1}{2}$. Cela signifie que l'on doit vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n \geq -\frac{1}{2}.$$

À partir de la valeur exacte,

$$I_n = -\frac{1 - e^{-n}}{2n}.$$

Or

$$0 < 1 - e^{-n} < 1$$

et

$$n \geq 1.$$

Donc

$$0 < \frac{1 - e^{-n}}{2n} \leq \frac{1}{2}.$$

En multipliant par -1 , le sens des inégalités s'inverse :

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1 - e^{-n}}{2n} < 0.$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{2} \leq I_n < 0.$$

On a donc bien, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n \geq -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

la proposition B est vraie.

On peut aussi le voir sans calculer exactement l'intégrale. En effet, sur $[0, 1]$,

$$0 < e^{-nx^2} \leq 1,$$

donc

$$0 \leq x e^{-n x^2} \leq x.$$

En intégrant entre 0 et 1,

$$0 \leq \int_0^1 x e^{-n x^2} dx \leq \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

En changeant le sens des bornes,

$$-\frac{1}{2} \leq \int_1^0 x e^{-n x^2} dx \leq 0.$$

Donc encore

$$I_n \geq -\frac{1}{2}.$$

5. Étude de la proposition C

La proposition C affirme que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Nous avons

$$I_n = -\frac{1 - e^{-n}}{2n}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$e^{-n} \rightarrow 0,$$

donc

$$1 - e^{-n} \rightarrow 1.$$

En même temps,

$$2n \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{1 - e^{-n}}{2n} \rightarrow 0,$$

et donc

$$\boxed{I_n \rightarrow 0}.$$

Une justification par encadrement est également possible. Nous avons montré que

$$0 \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n} \leq \frac{1}{2n}.$$

Or

$$\frac{1}{2n} \rightarrow 0.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{1 - e^{-n}}{2n} \rightarrow 0,$$

puis

$$I_n = -\frac{1 - e^{-n}}{2n} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{la proposition C est vraie.}}$$

6. Analyse finale du QCM

Nous avons obtenu :

Proposition	Valeur de vérité
A	Fausse
B	Vraie
C	Vraie
D	Fausse

En effet, D affirme qu'aucune des propositions A , B et C n'est vraie, alors que B et C sont toutes les deux vraies.

Remarque importante sur l'énoncé : le QCM demande de « choisir la bonne réponse » au singulier, mais, avec l'énoncé tel qu'il est écrit, les réponses B et C sont toutes les deux correctes. Le QCM contient donc vraisemblablement une erreur de rédaction ou devrait autoriser plusieurs réponses.

Résultat final :

$$I_n = -\frac{1 - e^{-n}}{2n}$$

et

$$-\frac{1}{2} \leq I_n < 0$$

ainsi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Par conséquent, les propositions correctes sont

B et C .

7. Rédaction courte à retenir

On a

$$I_n = \int_1^0 x e^{-nx^2} dx = \left[-\frac{e^{-nx^2}}{2n} \right]_1^0 = -\frac{1 - e^{-n}}{2n}.$$

Comme $0 < 1 - e^{-n} < 1$ et $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{2} \leq I_n < 0,$$

donc (I_n) est minorée par $-\frac{1}{2}$. De plus,

$$|I_n| = \frac{1 - e^{-n}}{2n} \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

d'où

$$I_n \rightarrow 0.$$

Ainsi les réponses B et C sont vraies.

Q24 - Équation trigonométrique

Résolution complète, détaillée et adaptée au niveau du baccalauréat

Énoncé

Soit l'équation (E) : $\sin(x) = \cos(2x)$.

On cherche le nombre de solutions de (E) appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

A. Une solution B. Deux solutions C. Trois solutions D. Plus de quatre solutions.

1. Comprendre précisément la question

On ne demande pas seulement de résoudre l'équation dans l'ensemble des réels. On demande de déterminer toutes les solutions situées dans l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$, puis de les compter. Les deux bornes 0 et 2π doivent donc être examinées elles aussi.

L'équation contient $\sin(x)$ et $\cos(2x)$. Pour ramener les deux membres à une même fonction trigonométrique, la formule la plus utile est :

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Cette formule permet de transformer l'équation trigonométrique en une équation du second degré dont l'inconnue sera $\sin(x)$.

2. Transformation de l'équation

Partons de l'équation donnée :

$$\sin(x) = \cos(2x).$$

En utilisant $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$, on obtient :

$$\sin(x) = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Nous regroupons tous les termes dans le même membre :

$$2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0.$$

Pour rendre la résolution plus lisible, posons provisoirement :

$$X = \sin(x).$$

L'équation devient alors :

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

3. Résolution de l'équation du second degré

Nous devons résoudre :

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

On peut factoriser directement le trinôme. En effet :

$$(2X - 1)(X + 1) = 2X^2 + 2X - X - 1 = 2X^2 + X - 1.$$

Ainsi :

$$2X^2 + X - 1 = 0 \Leftrightarrow (2X - 1)(X + 1) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Nous obtenons donc deux cas :

$$2X - 1 = 0 \text{ ou } X + 1 = 0.$$

Dans le premier cas :

$$2X = 1, \text{ donc } X = 1/2.$$

Dans le deuxième cas :

$$X = -1.$$

Puisque $X = \sin(x)$, l'équation initiale est donc équivalente à :

$$\sin(x) = 1/2 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -1.$$

4. Résolution de $\sin(x) = 1/2$ sur $[0, 2\pi]$

Sur le cercle trigonométrique, le sinus d'un angle est l'ordonnée du point associé. La valeur $1/2$ est positive : les solutions se trouvent donc dans les premier et deuxième quadrants.

L'angle de référence correspondant à $\sin(x) = 1/2$ est $\pi/6$, car :

$$\sin(\pi/6) = 1/2.$$

Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les deux angles ayant pour sinus $1/2$ sont :

$$x = \pi/6 \text{ et } x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6.$$

Ainsi, l'équation $\sin(x) = 1/2$ fournit exactement deux solutions dans $[0, 2\pi]$:

$$x_1 = \pi/6 \quad \text{et} \quad x_2 = 5\pi/6.$$

5. Résolution de $\sin(x) = -1$ sur $[0, 2\pi]$

La valeur minimale de la fonction sinus est -1. Sur un tour complet du cercle trigonométrique, cette valeur est atteinte une seule fois, au point situé tout en bas du cercle.

L'angle correspondant est :

$$x = 3\pi/2.$$

En effet :

$$\sin(3\pi/2) = -1.$$

L'équation $\sin(x) = -1$ fournit donc exactement une solution dans $[0, 2\pi]$:

$$x_3 = 3\pi/2.$$

6. Ensemble des solutions dans $[0, 2\pi]$

En réunissant les solutions des deux cas, on obtient :

$$S = \{ \pi/6 ; 5\pi/6 ; 3\pi/2 \}.$$

Ces trois valeurs sont distinctes et appartiennent bien à l'intervalle $[0, 2\pi]$. L'équation possède donc exactement trois solutions sur cet intervalle.

Nombre de solutions : 3

La bonne réponse est donc : C - Trois solutions.

7. Vérification directe des trois solutions

Une vérification permet de confirmer qu'aucune erreur n'a été commise.

Pour $x = \pi/6$:

$$\sin(\pi/6) = 1/2.$$

$$\cos(2 \times \pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

Les deux membres sont égaux.

Pour $x = 5\pi/6$:

$$\sin(5\pi/6) = 1/2.$$

$$\cos(2 \times 5\pi/6) = \cos(5\pi/3) = 1/2.$$

Les deux membres sont encore égaux.

7. Vérification directe - suite

Pour $x = 3\pi/2$:

$$\sin(3\pi/2) = -1.$$

$$\cos(2 \times 3\pi/2) = \cos(3\pi) = -1.$$

Les deux membres sont égaux. Les trois valeurs trouvées sont donc bien des solutions.

8. Vérification des bornes de l'intervalle

Comme l'intervalle est fermé, il est utile de vérifier explicitement les bornes 0 et 2π .

Pour $x = 0$: $\sin(0) = 0$ tandis que $\cos(0) = 1$. Donc 0 n'est pas solution.

Pour $x = 2\pi$: $\sin(2\pi) = 0$ tandis que $\cos(4\pi) = 1$. Donc 2π n'est pas solution.

Il n'y a donc aucune solution supplémentaire provenant des bornes.

9. Méthode alternative rapide

On peut aussi utiliser la formule :

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Puis écrire immédiatement :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(2x) \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \sin(x) - 1)(\sin(x) + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= 1/2 \text{ ou } \sin(x) = -1. \end{aligned}$$

Sur $[0, 2\pi]$, la première équation donne $\pi/6$ et $5\pi/6$, et la deuxième donne $3\pi/2$. Il y a donc trois solutions.

10. Conclusion finale

L'ensemble des solutions est :

$$S = \{ \pi/6 ; 5\pi/6 ; 3\pi/2 \}$$

Par conséquent, l'équation possède exactement trois solutions dans $[0, 2\pi]$.

Réponse correcte : C.

Rédaction courte à retenir pour un QCM :

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x), \text{ donc}$$

$$\sin(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow 2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin(x) - 1)(\sin(x) + 1) = 0.$$

Ainsi $\sin(x) = 1/2$ ou $\sin(x) = -1$. Sur $[0, 2\pi]$, on obtient $x = \pi/6, 5\pi/6$ ou $3\pi/2$. Il y a donc trois solutions :
réponse C.

Q25 - Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

Énoncé

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique (i, j, k, l) , on considère l'espace vectoriel F défini par :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0 \}.$$

Déterminer la dimension de F .

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1. Comprendre la définition de F

Un vecteur de $\mathbb{R}^4$ possède quatre coordonnées réelles. On peut donc l'écrire sous la forme (x, y, z, t) . L'ensemble F contient seulement les vecteurs dont les quatre coordonnées vérifient la relation :

$$x + y + z + t = 0.$$

Cette relation est une équation linéaire homogène. Elle impose une seule contrainte aux quatre coordonnées. Intuitivement, parmi les quatre coordonnées, trois peuvent être choisies librement, puis la quatrième est entièrement déterminée par les trois premières.

2. Paramétrisation complète des vecteurs de F

Partons de la relation :

$$x + y + z + t = 0.$$

Isolons par exemple la coordonnée t :

$$t = -x - y - z.$$

Les réels x, y et z sont donc libres. Pour éviter toute confusion, posons :

$$x = a, y = b, z = c,$$

où a, b et c sont trois réels quelconques. Alors :

$$t = -a - b - c.$$

Tout vecteur de F s'écrit donc :

$$(x, y, z, t) = (a, b, c, -a-b-c).$$

Décomposons maintenant ce vecteur comme une combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} & (a, b, c, -a-b-c) \\ &= a(1,0,0,-1) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1). \end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur de F est une combinaison linéaire des trois vecteurs suivants :

$$u_1 = (1,0,0,-1), u_2 = (0,1,0,-1), u_3 = (0,0,1,-1).$$

On a donc : $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

3. Vérification de l'indépendance linéaire

Pour conclure que la dimension de F vaut 3, il ne suffit pas de montrer que F est engendré par trois vecteurs. Il faut aussi vérifier que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants.

Supposons qu'il existe trois réels λ , μ et ν tels que :

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = (0,0,0,0).$$

En remplaçant u_1 , u_2 et u_3 par leurs coordonnées, on obtient :

$$\lambda(1,0,0,-1) + \mu(0,1,0,-1) + \nu(0,0,1,-1) = (0,0,0,0).$$

En effectuant la somme coordonnée par coordonnée :

$$(\lambda, \mu, \nu, -\lambda-\mu-\nu) = (0,0,0,0).$$

L'égalité de deux vecteurs signifie l'égalité de leurs coordonnées. On obtient donc immédiatement :

$$\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0.$$

La seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est donc la combinaison triviale. Les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont par conséquent linéairement indépendants.

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F .

4. Calcul de la dimension

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs contenus dans une base de cet espace. Nous avons trouvé une base de F constituée de trois vecteurs. Par conséquent :

$$\dim(F) = 3.$$

La bonne réponse du QCM est donc :

C - 3

5. Deuxième méthode : théorème du rang

On peut également introduire l'application linéaire φ définie par :

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x,y,z,t) = x+y+z+t.$$

L'ensemble F est exactement le noyau de φ , car :

$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow x+y+z+t = 0 \Leftrightarrow \varphi(x,y,z,t)=0.$$

Donc :

$$F = \text{Ker}(\varphi).$$

L'application φ n'est pas nulle, puisque par exemple :

$$\varphi(1,0,0,0)=1.$$

Son image est donc $\mathbb{R}$ tout entier, qui est de dimension 1. Ainsi, le rang de φ vaut 1.

Le théorème du rang donne :

$$\dim(\text{Ker } \varphi) + \text{rang}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^4).$$

En remplaçant les dimensions connues :

$$\dim(F) + 1 = 4.$$

D'où :

$$\dim(F) = 3.$$

6. Pourquoi la réponse 4 est impossible

L'espace $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4. Pour que F ait aussi la dimension 4, il faudrait que F soit égal à $\mathbb{R}^4$. Or ce n'est pas le cas : le vecteur $(1,0,0,0)$, par exemple, n'appartient pas à F , car :

$$1 + 0 + 0 + 0 = 1 \neq 0.$$

La relation $x+y+z+t=0$ retire donc bien une direction à $\mathbb{R}^4$. On passe d'un espace de dimension 4 à un hyperplan de dimension 3.

7. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$, une équation linéaire homogène non triviale définit généralement une droite passant par l'origine, de dimension 1. Dans $\mathbb{R}^3$, une équation linéaire homogène non triviale définit un plan passant par l'origine, de dimension 2. De la même façon, dans $\mathbb{R}^4$, une équation linéaire homogène non triviale définit un hyperplan passant par l'origine, de dimension 3.

Ici, F est donc un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

8. Vérification que les trois vecteurs appartiennent bien à F

Pour $u_1 = (1,0,0,-1)$, la somme des coordonnées vaut :

$$1 + 0 + 0 - 1 = 0.$$

Pour $u_2 = (0,1,0,-1)$, la somme vaut :

$$0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Pour $u_3 = (0,0,1,-1)$, la somme vaut :

$$0 + 0 + 1 - 1 = 0.$$

Les trois vecteurs appartiennent donc effectivement à F .

9. Conclusion finale

Une base de F est :

$$((1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1))$$

Cette base contient trois vecteurs. Par conséquent :

$$\dim(F) = 3.$$

Réponse correcte : C.

Rédaction courte à retenir pour le QCM :

La relation $x+y+z+t=0$ permet d'écrire $t=-x-y-z$. Ainsi, tout vecteur de F s'écrit $(x,y,z,-x-y-z)=x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1)$. Les trois vecteurs obtenus sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de F . Par conséquent, $\dim(F)=3$. La bonne réponse est C.