

Correction détaillée des questions 1 à 4

Concours commun d'accès en 1^{re} année – ENSAM Maroc
Épreuve de Mathématiques – Session du 24 juillet 2026

Question 1 – Calcul d'une probabilité liée au barème

Un candidat répond au hasard aux 30 questions du QCM et ne laisse aucune question sans réponse. Une bonne réponse rapporte +2 points et une mauvaise réponse rapporte -1 point. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 26 points ?

Notons k le nombre de bonnes réponses obtenues par le candidat.

Puisqu'il répond aux 30 questions, le nombre de mauvaises réponses est nécessairement

$$30 - k.$$

Le score total est donc

$$S = 2k - 1 \times (30 - k).$$

Développons :

$$S = 2k - 30 + k = 3k - 30.$$

Pour obtenir exactement 26 points, il faudrait que

$$3k - 30 = 26.$$

D'où

$$3k = 56 \quad \implies \quad k = \frac{56}{3}.$$

Or k représente un nombre de bonnes réponses : il doit donc être un entier compris entre 0 et 30. Mais

$$\frac{56}{3} = 18,666\dots$$

n'est pas un entier.

Il est donc impossible d'obtenir exactement 26 points avec ce barème. Cette impossibilité ne dépend même pas du fait que le candidat réponde au hasard : aucun nombre entier de bonnes réponses ne produit le score 26.

On peut aussi observer que tous les scores possibles sont de la forme

$$-30, -27, -24, \dots, 57, 60,$$

c'est-à-dire qu'ils sont tous congrus à 0 modulo 3, alors que

$$26 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Réponse correcte : E. La probabilité demandée est

$$\boxed{0}.$$

Question 2 – Aire maximale d'un rectangle inscrit

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A et $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Un rectangle $AIJK$ est inscrit dans le triangle, avec $I \in [AB]$, $K \in [AC]$ et $J \in [BC]$. Déterminer l'aire maximale de ce rectangle.

Comme le triangle est rectangle isocèle en A , ses deux côtés perpendiculaires ont la même longueur :

$$AB = AC = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Posons

$$AI = x \quad \text{et} \quad AK = y,$$

avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Le rectangle $AIJK$ a alors pour aire

$$\mathcal{A} = AI \times AK = xy.$$

Plaçons mentalement A à l'origine, AB sur l'axe horizontal et AC sur l'axe vertical. Les sommets peuvent être représentés par

$$A(0, 0), \quad B(4\sqrt{2}, 0), \quad C(0, 4\sqrt{2}).$$

La droite (BC) a alors pour équation

$$x + y = 4\sqrt{2}.$$

Comme le sommet opposé J du rectangle appartient à $[BC]$, ses coordonnées (x, y) vérifient donc

$$x + y = 4\sqrt{2}.$$

Nous cherchons à maximiser le produit xy lorsque la somme $x + y$ est fixée.

À partir de l'identité

$$(x - y)^2 \geq 0,$$

on obtient

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0.$$

En ajoutant $4xy$ aux deux membres :

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy,$$

donc

$$(x + y)^2 \geq 4xy.$$

Ainsi,

$$xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}.$$

Puisque $x + y = 4\sqrt{2}$, on a

$$xy \leq \frac{(4\sqrt{2})^2}{4} = \frac{16 \times 2}{4} = \frac{32}{4} = 8.$$

L'égalité est atteinte lorsque

$$x = y.$$

Avec $x + y = 4\sqrt{2}$, cela donne

$$x = y = 2\sqrt{2}.$$

Le rectangle correspondant existe bien et son aire vaut

$$(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 8 \text{ cm}^2.$$

Réponse correcte : D.

$$\boxed{\mathcal{A}_{\max} = 8 \text{ cm}^2}.$$

Question 3 – Parité du nombre N

Soit

$$N = 1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + 4^{2026}.$$

Déterminer la nature de N parmi les propositions données.

Étudions d'abord la parité de chaque terme :

- 1^{2026} est impair, car toute puissance d'un nombre impair est impaire ;
- 2^{2026} est pair ;
- 3^{2026} est impair ;
- 4^{2026} est pair.

La somme est donc de la forme

$$\text{impair} + \text{pair} + \text{impair} + \text{pair}.$$

Or la somme de deux nombres impairs est paire. Par conséquent,

$$N \text{ est pair.}$$

Il faut toutefois vérifier si la proposition plus précise « multiple de 4 » pourrait être vraie. Calculons N modulo 4.

On a

$$1^{2026} \equiv 1 \pmod{4}.$$

Comme l'exposant est au moins égal à 2,

$$2^{2026} \equiv 0 \pmod{4}.$$

De plus,

$$3 \equiv -1 \pmod{4},$$

et comme 2026 est pair,

$$3^{2026} \equiv (-1)^{2026} \equiv 1 \pmod{4}.$$

Enfin,

$$4^{2026} \equiv 0 \pmod{4}.$$

Ainsi,

$$N \equiv 1 + 0 + 1 + 0 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Donc N est bien pair, mais il n'est pas divisible par 4.

Réponse correcte : B.

N est pair.

Plus précisément, $N \equiv 2 \pmod{4}$.

Question 4 – Deux réels inverses l'un de l'autre

Soient x et y deux réels non nuls, inverses l'un de l'autre, tels que la somme du carré de leur somme et de la somme de leurs carrés soit égale à 10. Déterminer x^2 .

Dire que x et y sont inverses l'un de l'autre signifie

$$xy = 1 \quad \text{ou encore} \quad y = \frac{1}{x}.$$

La condition donnée s'écrit

$$(x + y)^2 + (x^2 + y^2) = 10.$$

Développons le carré :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Par conséquent,

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + y^2 = 10.$$

Regroupons les termes semblables :

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = 10.$$

En divisant par 2 :

$$x^2 + y^2 + xy = 5.$$

Puisque $xy = 1$, on obtient

$$x^2 + y^2 + 1 = 5,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Posons maintenant

$$t = x^2.$$

Comme $x \neq 0$, on a $t > 0$. De plus, puisque $y = 1/x$,

$$y^2 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{t}.$$

La relation $x^2 + y^2 = 4$ devient

$$t + \frac{1}{t} = 4.$$

Multiplions par $t > 0$:

$$t^2 + 1 = 4t.$$

Donc

$$t^2 - 4t + 1 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12.$$

Ainsi,

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}.$$

Or

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

donc

$$t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Comme $t = x^2$, nous obtenons les deux valeurs possibles

$$x^2 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Ces deux valeurs sont positives et leur produit vaut 1, ce qui est cohérent avec l'échange possible de x et y .

Réponse correcte : A.

$$x^2 = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Tableau récapitulatif

Question	Réponse correcte	Résultat
1	E	0
2	D	8 cm ²
3	B	N est pair et $N \equiv 2 \pmod{4}$
4	A	$x^2 = 2 \pm \sqrt{3}$

Correction détaillée des questions 5 et 6

Concours commun d'accès en première année – ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques – Session 2026

Résultats à retenir :

Question 5 : réponse D $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$

et

Question 6 : réponse A $k = 12$.

Question 5

Énoncé. Soit x un réel positif. Combien y a-t-il d'entiers naturels non nuls, multiples de 3, compris entre 0 et x ?

Propositions :

A. $\lfloor x + 3 \rfloor$, B. $\lfloor 3x \rfloor + 1$, C. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1$, D. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$, E. AR.

1. Identifier les nombres à compter

Les entiers naturels non nuls qui sont multiples de 3 sont exactement les nombres de la forme

$$3, 6, 9, 12, \dots, 3k, \dots$$

où k est un entier naturel non nul.

Autrement dit, tout entier recherché s'écrit

$$n = 3k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*.$$

2. Traduire la condition « compris entre 0 et x »

Comme $n = 3k$ est déjà strictement positif, il suffit d'imposer

$$3k \leq x.$$

Puisque $3 > 0$, on peut diviser les deux membres par 3 sans changer le sens de l'inégalité :

$$k \leq \frac{x}{3}.$$

Nous devons donc compter les entiers positifs k qui satisfont

$$1 \leq k \leq \frac{x}{3}.$$

3. Utiliser la partie entière

La partie entière $\lfloor t \rfloor$ d'un réel t est le plus grand entier inférieur ou égal à t .

Ainsi, les valeurs possibles de k sont

$$1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor.$$

Le nombre de ces valeurs est donc exactement

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor.$$

4. Vérification par des exemples

Valeur de x	Multiples positifs de 3 dans $[0, x]$	Nombre obtenu
$x = 2$	Aucun	$0 = \lfloor 2/3 \rfloor$
$x = 3$	3	$1 = \lfloor 3/3 \rfloor$
$x = 8,9$	3, 6	$2 = \lfloor 8,9/3 \rfloor$
$x = 12$	3, 6, 9, 12	$4 = \lfloor 12/3 \rfloor$

Pourquoi la proposition C est-elle fausse ?

Elle ajoute inutilement 1. Par exemple, pour $x = 3$, elle donnerait

$$\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + 1 = 2,$$

alors qu'il n'y a qu'un seul multiple positif de 3 dans $[0, 3]$, à savoir 3.

Conclusion :

$$\text{Nombre recherché} = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$$

La bonne réponse est donc **D**.

Question 6

Énoncé. On considère les termes

$$u_k = \binom{27}{k} 20^k 26^{27-k}$$

dans le développement de $(20 + 26)^{27}$. Pour quelle valeur de k le terme u_k est-il maximal ?

Propositions :

A. 12, B. 13, C. 14, D. 15, E. 16.

1. Principe de la méthode

Les termes u_k sont tous strictement positifs. Pour savoir à partir de quel rang ils cessent de croître et commencent à décroître, on compare deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

On a :

- si $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, alors $u_{k+1} > u_k$: la suite croît ;
- si $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, alors $u_{k+1} < u_k$: la suite décroît ;
- si $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, alors les deux termes sont égaux.

2. Calcul du quotient de deux termes consécutifs

On écrit

$$u_{k+1} = \binom{27}{k+1} 20^{k+1} 26^{26-k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{\binom{27}{k+1} 20^{k+1} 26^{26-k}}{\binom{27}{k} 20^k 26^{27-k}} \\ &= \frac{\binom{27}{k+1}}{\binom{27}{k}} \times \frac{20^{k+1}}{20^k} \times \frac{26^{26-k}}{26^{27-k}}. \end{aligned}$$

Calculons séparément les trois facteurs.

D'abord,

$$\begin{aligned} \frac{\binom{27}{k+1}}{\binom{27}{k}} &= \frac{27!}{(k+1)!(26-k)!} \cdot \frac{k!(27-k)!}{27!} \\ &= \frac{k!(27-k)!}{(k+1)!(26-k)!} \\ &= \frac{27-k}{k+1}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{20^{k+1}}{20^k} = 20 \quad \text{et} \quad \frac{26^{26-k}}{26^{27-k}} = \frac{1}{26}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \frac{27-k}{k+1} \times \frac{20}{26} \\ &= \frac{27-k}{k+1} \times \frac{10}{13} \\ &= \boxed{\frac{10(27-k)}{13(k+1)}}. \end{aligned}$$

3. Déterminer jusqu'où la suite croît

La suite croît tant que

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1.$$

Cela équivaut à

$$\frac{10(27-k)}{13(k+1)} > 1.$$

Pour $0 \leq k \leq 26$, le dénominateur $13(k+1)$ est strictement positif. On peut donc multiplier sans changer le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} 10(27-k) &> 13(k+1), \\ 270 - 10k &> 13k + 13, \\ 257 &> 23k, \\ k &< \frac{257}{23}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{257}{23} = 11 + \frac{4}{23} \approx 11,174.$$

Comme k est entier, on obtient :

$$k \leq 11.$$

Ainsi,

$$u_{k+1} > u_k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, 11.$$

En particulier,

$$u_{12} > u_{11}.$$

4. Montrer qu'après u_{12} la suite décroît

Pour $k \geq 12$, on a

$$k > \frac{257}{23},$$

donc

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1.$$

Ainsi,

$$u_{k+1} < u_k \quad \text{pour } k = 12, 13, \dots, 26.$$

En particulier,

$$u_{13} < u_{12}.$$

Vérifions directement les deux quotients qui encadrent u_{12} :

$$\frac{u_{12}}{u_{11}} = \frac{10(27-11)}{13(11+1)} = \frac{160}{156} = \frac{40}{39} > 1,$$

donc $u_{12} > u_{11}$; tandis que

$$\frac{u_{13}}{u_{12}} = \frac{10(27-12)}{13(12+1)} = \frac{150}{169} < 1,$$

donc $u_{13} < u_{12}$.

On a donc le schéma suivant :

$$u_0 < u_1 < \dots < u_{11} < u_{12} > u_{13} > \dots > u_{27}.$$

Le maximum est donc unique et atteint pour

$$k = 12.$$

Conclusion : la valeur maximale des termes u_k est atteinte pour

$$k = 12.$$

La bonne réponse est donc **A**.

Méthode générale. Pour déterminer le terme maximal d'une suite de termes binomiaux positifs, la méthode la plus efficace consiste souvent à étudier le quotient u_{k+1}/u_k . Le passage d'une valeur supérieure à 1 à une valeur inférieure à 1 localise immédiatement le maximum.

Question	Résultat	Choix correct
5	$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$	D
6	$k = 12$	A

Correction détaillée des questions 7 et 8

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats :

Question 7 : réponse B

Question 8 : réponse E (AR)

Question 7

On considère

$$A(X) = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 3X^2 + aX + 2, \quad B(X) = X^2 - 3X + b,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, et la division euclidienne

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X), \quad \deg R < 2.$$

Puisque $\deg A = 5$ et $\deg B = 2$, le quotient Q est de degré 3. Nous allons effectuer la division euclidienne complètement.

Méthode

À chaque étape, on divise le terme de plus haut degré du reste provisoire par le terme dominant X^2 de $B(X)$, puis on soustrait le produit obtenu.

1. Premier terme du quotient

Le terme dominant de A est X^5 . Ainsi,

$$\frac{X^5}{X^2} = X^3.$$

Le premier terme du quotient est donc X^3 .

On calcule :

$$X^3 B(X) = X^5 - 3X^4 + bX^3.$$

En soustrayant :

$$\begin{aligned} A(X) - X^3 B(X) &= (X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 3X^2 + aX + 2) \\ &\quad - (X^5 - 3X^4 + bX^3) \\ &= -X^4 + (7-b)X^3 - 3X^2 + aX + 2. \end{aligned}$$

2. Deuxième terme du quotient

Le terme dominant du reste provisoire est $-X^4$. Donc

$$\frac{-X^4}{X^2} = -X^2.$$

Le deuxième terme du quotient est $-X^2$.

On calcule :

$$-X^2 B(X) = -X^4 + 3X^3 - bX^2.$$

Puis :

$$\begin{aligned} &[-X^4 + (7-b)X^3 - 3X^2 + aX + 2] - [-X^4 + 3X^3 - bX^2] \\ &= (4-b)X^3 + (b-3)X^2 + aX + 2. \end{aligned}$$

3. Troisième terme du quotient

Le terme dominant est maintenant $(4 - b)X^3$. Ainsi,

$$\frac{(4 - b)X^3}{X^2} = (4 - b)X.$$

Le troisième terme du quotient est donc $(4 - b)X$.

On calcule :

$$\begin{aligned}(4 - b)XB(X) &= (4 - b)X(X^2 - 3X + b) \\ &= (4 - b)X^3 - 3(4 - b)X^2 + b(4 - b)X.\end{aligned}$$

Après soustraction :

$$\begin{aligned}& \left[(4 - b)X^3 + (b - 3)X^2 + aX + 2 \right] \\ & - \left[(4 - b)X^3 - 3(4 - b)X^2 + b(4 - b)X \right] \\ & = (9 - 2b)X^2 + (a - 4b + b^2)X + 2.\end{aligned}$$

4. Quatrième terme du quotient

Le terme dominant est $(9 - 2b)X^2$. Donc

$$\frac{(9 - 2b)X^2}{X^2} = 9 - 2b.$$

Le terme constant du quotient est $9 - 2b$.

On calcule :

$$(9 - 2b)B(X) = (9 - 2b)X^2 - 3(9 - 2b)X + b(9 - 2b).$$

En soustrayant, on obtient le reste :

$$\begin{aligned}R(X) &= (a - 4b + b^2)X + 2 - [-3(9 - 2b)X + b(9 - 2b)] \\ &= (a + b^2 - 10b + 27)X + (2b^2 - 9b + 2).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$Q(X) = X^3 - X^2 + (4 - b)X + 9 - 2b$$

et

$$R(X) = (a + b^2 - 10b + 27)X + 2b^2 - 9b + 2.$$

5. Étude des propositions

A. Le coefficient de X^2 dans Q est -1 , et non 1 . $\Rightarrow$ Proposition fausse.

B. La somme des coefficients de Q est $Q(1)$. Or

$$\begin{aligned}Q(1) &= 1 - 1 + (4 - b) + 9 - 2b \\ &= 13 - 3b.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Proposition vraie.

C. Le coefficient de X dans Q est $4 - b$, et non $b - 2$. $\Rightarrow$ Proposition fausse.

D. Le coefficient constant de R est

$$2b^2 - 9b + 2,$$

et non $2b - a$. $\Rightarrow$ Proposition fausse.

E. La somme des coefficients de R vaut $R(1)$:

$$\begin{aligned} R(1) &= a + b^2 - 10b + 27 + 2b^2 - 9b + 2 \\ &= a + 3b^2 - 19b + 29, \end{aligned}$$

et non $a + b - 3$. $\Rightarrow$ Proposition fausse.

Question 7 : la bonne réponse est B.

Question 8

On considère

$$F_m(X) = \frac{X+1}{(X+m)(X-1)^2},$$

où m est un paramètre réel, et on suppose qu'il existe trois réels α, β, γ tels que

$$F_m(X) = \frac{\alpha}{X+m} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{(X-1)^2}.$$

Nous cherchons la valeur de

$$\alpha + \beta + \gamma.$$

1. Condition sur le paramètre m

La décomposition proposée utilise deux facteurs distincts $X+m$ et $X-1$. Ils sont confondus lorsque

$$X+m = X-1,$$

c'est-à-dire lorsque

$$m = -1.$$

Pour $m = -1$, on aurait

$$F_{-1}(X) = \frac{X+1}{(X-1)^3},$$

qui possède un pôle d'ordre 3 en $X=1$, tandis que le membre de droite ne contient que des termes en $1/(X-1)$ et $1/(X-1)^2$. La décomposition indiquée est donc impossible.

Ainsi, l'existence de α, β, γ impose

$$\boxed{m \neq -1}.$$

2. Réduction au même dénominateur

On multiplie l'identité par $(X+m)(X-1)^2$:

$$X+1 = \alpha(X-1)^2 + \beta(X+m)(X-1) + \gamma(X+m).$$

Cette identité polynomiale est vraie pour tout X .

3. Calcul rapide de α et de γ

En prenant $X = -m$, les termes contenant $X+m$ s'annulent :

$$1-m = \alpha(-m-1)^2.$$

Comme $(-m-1)^2 = (m+1)^2$, on obtient

$$\boxed{\alpha = \frac{1-m}{(m+1)^2}}.$$

En prenant $X = 1$, les termes contenant $X-1$ s'annulent :

$$2 = \gamma(1+m).$$

Donc

$$\boxed{\gamma = \frac{2}{m+1}}.$$

4. Calcul de β

Développons l'identité :

$$X + 1 = \alpha(X^2 - 2X + 1) + \beta(X^2 + (m-1)X - m) + \gamma X + \gamma m.$$

Le coefficient de X^2 dans le membre de gauche est nul. Par identification :

$$\alpha + \beta = 0.$$

Ainsi,

$$\beta = -\alpha = \frac{m-1}{(m+1)^2}.$$

5. Calcul de la somme demandée

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \alpha - \alpha + \gamma \\ &= \gamma \\ &= \frac{2}{m+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{m+1}.$$

6. Vérification par substitution directe

Les valeurs trouvées sont

$$\alpha = \frac{1-m}{(m+1)^2}, \quad \beta = \frac{m-1}{(m+1)^2}, \quad \gamma = \frac{2}{m+1}.$$

Remarquons que

$$\alpha + \beta = 0.$$

La somme vaut donc bien

$$\frac{2}{m+1}.$$

Or les quatre expressions proposées sont :

$$\frac{1}{m+1}, \quad \frac{1}{m-1}, \quad \frac{1}{m+2}, \quad \frac{1}{1-m}.$$

Aucune d'elles n'est égale, en général, à

$$\frac{2}{m+1}.$$

La bonne réponse est donc « Autre réponse ».

Question 8 : la bonne réponse est E (AR), avec $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{m+1}$.

Remarque

Le résultat est valable pour $m \neq -1$, seule situation dans laquelle la décomposition demandée peut exister sous la forme donnée.

Question	Résultat	Choix
7	$Q(1) = 13 - 3b$	B
8	$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{m+1}$	E (AR)

Correction détaillée des questions 9 à 11

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc
Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats finaux :

Question 9 : B. $\frac{3}{4}$

Question 10 : C. 0,35

Question 11 : B. $2\alpha^2$

Question 9 - Équation du second degré et probabilité

Une boîte B_1 contient deux jetons numérotés -1 et 3 . Une boîte B_2 contient deux jetons numérotés 2 et 2 . Une boîte B_3 contient deux jetons numérotés 1 et 0 . On tire indépendamment un jeton de chaque boîte et l'on obtient les coefficients α , β et γ de l'équation

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

On cherche la probabilité que cette équation admette des racines réelles.

1. Valeurs possibles des coefficients

Les valeurs possibles sont :

$$\alpha \in \{-1, 3\}, \quad \beta = 2, \quad \gamma \in \{0, 1\}.$$

Les deux jetons de B_2 portent le même numéro 2 . Le tirage dans cette boîte ne change donc jamais la valeur de β : on a toujours $\beta = 2$.

Comme les tirages dans B_1 et B_3 donnent chacun deux possibilités équiprobables, il existe

$$2 \times 2 = 4$$

combinaisons équiprobables pour le couple (α, γ) . Chaque combinaison a donc une probabilité égale à $1/4$.

2. Condition d'existence de racines réelles

Pour une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

avec $a \neq 0$, les racines sont réelles si et seulement si son discriminant vérifie

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Ici,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Comme $\beta = 2$, on obtient

$$\Delta = 2^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\alpha\gamma = 4(1 - \alpha\gamma).$$

3. Étude exhaustive des quatre cas

α	γ	Discriminant $\Delta = 4 - 4\alpha\gamma$	Racines réelles ?
-1	0	$\Delta = 4 - 4(-1)(0) = 4$	Oui
-1	1	$\Delta = 4 - 4(-1)(1) = 8$	Oui
3	0	$\Delta = 4 - 4(3)(0) = 4$	Oui
3	1	$\Delta = 4 - 4(3)(1) = -8$	Non

Trois des quatre cas équiprobables conduisent donc à un discriminant positif ou nul. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\text{racines réelles}) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}} = \frac{3}{4}.$$

Question 9 : la bonne réponse est B, soit $\frac{3}{4}$.

Remarque

Lorsque $\gamma = 0$, l'équation devient $\alpha x^2 + 2x = 0$, soit $x(\alpha x + 2) = 0$: elle possède immédiatement deux racines réelles (éventuellement distinctes), quelle que soit la valeur de $\alpha \in \{-1, 3\}$.

Question 10 - Probabilité conditionnelle

Trois cents étudiants sont répartis dans trois clubs :

- 60 étudiants au club *Cyber Sécurité*, dont 30% sont des filles ;
- 90 étudiants au club *Industriel*, dont 60% sont des filles ;
- 150 étudiants au club *ENSAM-MATH*, dont 72% sont des filles.

On choisit un étudiant au hasard et l'on sait qu'il s'agit d'un garçon. On cherche la probabilité qu'il appartienne au club *ENSAM-MATH*.

Méthode

L'information « on sait qu'il s'agit d'un garçon » réduit l'univers de référence : on ne raisonne plus sur les 300 étudiants, mais uniquement sur l'ensemble des garçons. Il faut donc calculer

$$\mathbb{P}(M \mid G) = \frac{\text{nombre de garçons inscrits à ENSAM-MATH}}{\text{nombre total de garçons}},$$

où M désigne l'événement « être inscrit à ENSAM-MATH » et G l'événement « être un garçon ».

1. Club Cyber Sécurité

30% des 60 étudiants sont des filles :

$$60 \times 0,30 = 18 \text{ filles.}$$

Le nombre de garçons est donc

$$60 - 18 = 42.$$

On peut aussi écrire directement :

$$60 \times (1 - 0,30) = 60 \times 0,70 = 42.$$

2. Club Industriel

60% des 90 étudiants sont des filles :

$$90 \times 0,60 = 54 \text{ filles.}$$

Le nombre de garçons est donc

$$90 - 54 = 36.$$

3. Club ENSAM-MATH

72% des 150 étudiants sont des filles. La proportion de garçons est donc

$$100\% - 72\% = 28\%.$$

Le nombre de garçons inscrits à ENSAM-MATH est

$$150 \times 0,28 = 42.$$

4. Nombre total de garçons

En additionnant les garçons des trois clubs, on obtient

$$42 + 36 + 42 = 120.$$

Parmi ces 120 garçons, 42 sont inscrits au club ENSAM-MATH. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \mid G) &= \frac{42}{120} \\ &= \frac{7}{20} \\ &= 0,35.\end{aligned}$$

Question 10 : la bonne réponse est C, soit 0,35.

Remarque

Il serait incorrect de calculer $42/300$, car le choix n'est plus effectué parmi tous les étudiants une fois que l'on sait que l'étudiant choisi est un garçon. Le dénominateur doit être le nombre total de garçons, c'est-à-dire 120.

Question 11 - Suite récurrente affine

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \alpha^2, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_n - 2\alpha^2.$$

On cherche la limite de (u_n) .

1. Recherche du point fixe de la récurrence

Si la suite (u_n) admet une limite ℓ , alors, par passage à la limite dans

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \alpha^2,$$

on doit avoir

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \alpha^2.$$

Donc

$$\ell - \frac{1}{2}\ell = \alpha^2,$$

puis

$$\frac{1}{2}\ell = \alpha^2,$$

d'où

$$\ell = 2\alpha^2.$$

Ce calcul suggère la limite, mais il faut encore démontrer que la suite converge effectivement. C'est précisément le rôle de la suite auxiliaire (v_n) .

2. Montrons que (v_n) est géométrique

Par définition,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\alpha^2.$$

En utilisant la relation de récurrence de (u_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}u_n + \alpha^2\right) - 2\alpha^2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \alpha^2 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2\alpha^2) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2}.$$

Son premier terme vaut

$$v_0 = u_0 - 2\alpha^2 = 0 - 2\alpha^2 = -2\alpha^2.$$

Par conséquent,

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2\alpha^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. Expression explicite de u_n

Comme

$$v_n = u_n - 2\alpha^2,$$

on a

$$u_n = v_n + 2\alpha^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= -2\alpha^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\alpha^2 \\ &= 2\alpha^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n = 2\alpha^2 (1 - 2^{-n}).$$

4. Passage à la limite

Puisque

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1,$$

on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= 2\alpha^2 (1 - 0) \\ &= 2\alpha^2. \end{aligned}$$

Question 11 : la bonne réponse est B, soit $2\alpha^2$.

Remarque

Le résultat reste valable pour $\alpha = 0$. Dans ce cas, la récurrence donne $u_n = 0$ pour tout n , et la limite vaut bien $0 = 2\alpha^2$.

Question	Résultat final	Choix
9	$\mathbb{P}(\text{racines réelles}) = \frac{3}{4}$	B
10	$\mathbb{P}(\text{ENSAM-MATH} \mid \text{garçon}) = 0,35$	C
11	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\alpha^2$	B

Correction détaillée des questions 12 à 16

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats finaux :

Q12 : A

Q13 : C

Q14 : E

Q15 : C

Q16 : B

Question 12

On considère une suite positive $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant

$$u_1 = 1, \quad (u_{n+1})^2 = 4u_n,$$

et l'on définit

$$v_n = \ln \left(\frac{u_n}{4} \right).$$

Il faut déterminer la nature de la suite (v_n) .

1. Exploitation de la positivité

Comme tous les termes u_n sont positifs, on peut prendre la racine carrée positive dans

$$(u_{n+1})^2 = 4u_n.$$

On obtient donc

$$u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}.$$

2. Calcul de v_{n+1}

Par définition,

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{4} \right).$$

En remplaçant u_{n+1} par $2\sqrt{u_n}$, on trouve

$$v_{n+1} = \ln \left(\frac{2\sqrt{u_n}}{4} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} \right).$$

Or

$$\frac{\sqrt{u_n}}{2} = \sqrt{\frac{u_n}{4}}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = \ln \left(\sqrt{\frac{u_n}{4}} \right).$$

Puisque $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ pour tout $a > 0$, on obtient

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u_n}{4} \right).$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

On peut également calculer son premier terme :

$$v_1 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4.$$

Par conséquent,

$$v_n = -\ln 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Question 12 : la bonne réponse est A, géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Question 13

On considère

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Il faut calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Attention

La réponse entourée sur l'image est 0, mais ce résultat est incorrect. La limite exacte est $\ln 2$.

1. Écriture sous forme de somme

On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Cette somme contient exactement n termes.

2. Interprétation comme somme de Riemann

Posons $k = n + j$, avec $j = 1, \dots, n$. Alors

$$u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}.$$

On factorise n au dénominateur :

$$\frac{1}{n+j} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{j}{n}}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \frac{j}{n}}.$$

Cette expression est une somme de Riemann associée à la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

continue sur $[0, 1]$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

On calcule :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2}.$$

3. Encadrement intégral complémentaire

La fonction $x \mapsto 1/x$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $k \geq 1$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}.$$

En sommant de $k = n+1$ à $2n$, on obtient un encadrement qui conduit également à

$$u_n \longrightarrow \ln 2.$$

Question 13 : la bonne réponse est C, c'est-à-dire $\ln 2$.

Question 14

La fonction g est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} + 1 \quad (x > 0),$$

et

$$g(0) = a.$$

Pour que g soit continue en 0, il faut et il suffit que

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x).$$

1. Simplification de l'expression

On utilise

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x - \ln(x+1) - \frac{\ln x}{x+1} + 1 \\ &= \ln x \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \ln(x+1) + 1. \end{aligned}$$

Or

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Donc

$$g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) + 1.$$

2. Passage à la limite

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$x \ln x \rightarrow 0, \quad x+1 \rightarrow 1,$$

donc

$$\frac{x \ln x}{x+1} \rightarrow 0.$$

D'autre part,

$$\ln(x+1) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

La continuité en 0 impose donc

$$a = 1.$$

Question 14 : la bonne réponse est E, avec $a = 1$.

Question 15

On suppose que f est dérivable en 0, avec

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 2.$$

On cherche

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(2x) \cdots f(nx)}{x^n}.$$

1. Utilisation de la définition de la dérivée

Comme $f(0) = 0$, on a

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}.$$

Puisque $f'(0) = 2$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 2.$$

Pour chaque entier $k \in \{1, \dots, n\}$, lorsque $x \rightarrow 0$, on a $kx \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(kx)}{kx} = 2.$$

2. Réécriture du produit

On écrit

$$f(kx) = kx \cdot \frac{f(kx)}{kx}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x)f(2x) \cdots f(nx) &= \prod_{k=1}^n \left(kx \frac{f(kx)}{kx} \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n k \right) x^n \prod_{k=1}^n \frac{f(kx)}{kx}. \end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=1}^n k = n!.$$

Donc

$$\frac{f(x)f(2x) \cdots f(nx)}{x^n} = n! \prod_{k=1}^n \frac{f(kx)}{kx}.$$

3. Passage à la limite

Le produit contient un nombre fini n de facteurs, et chacun tend vers 2. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{f(kx)}{kx} = \prod_{k=1}^n 2 = 2^n.$$

Finalement,

$$L = n! 2^n.$$

Donc

$$\boxed{L = 2^n n!}.$$

Question 15 : la bonne réponse est C, soit $2^n n!$.

Question 16

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)(1 - f(x)f(y)) = f(x) + f(y).$$

On cherche, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de

$$\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}.$$

1. Détermination de $f(0)$

Prenons $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle :

$$f(x)(1 - f(x)f(0)) = f(x) + f(0).$$

Développons :

$$f(x) - f(x)^2 f(0) = f(x) + f(0).$$

En retranchant $f(x)$ des deux côtés :

$$-f(x)^2 f(0) = f(0).$$

Donc

$$f(0)(1 + f(x)^2) = 0.$$

Or

$$1 + f(x)^2 > 0$$

pour tout réel x . Par conséquent,

$$\boxed{f(0) = 0}.$$

2. Dérivation par rapport à y

Fixons x et dérivons l'identité par rapport à y .

Le membre de gauche est un produit :

$$f(x+y)(1 - f(x)f(y)).$$

Sa dérivée par rapport à y vaut

$$f'(x+y)(1 - f(x)f(y)) - f(x+y)f(x)f'(y).$$

La dérivée du membre de droite $f(x) + f(y)$ par rapport à y est

$$f'(y).$$

On obtient donc

$$f'(x+y)(1 - f(x)f(y)) - f(x+y)f(x)f'(y) = f'(y).$$

3. Évaluation en $y = 0$

En prenant $y = 0$, et en utilisant $f(0) = 0$, on obtient

$$f'(x)(1 - f(x)f(0)) - f(x)f(x)f'(0) = f'(0).$$

Comme $f(0) = 0$,

$$f'(x) - f(x)^2 f'(0) = f'(0).$$

Ainsi,

$$f'(x) = f'(0)(1 + f(x)^2).$$

Puisque $1 + f(x)^2 > 0$, on peut diviser :

$$\boxed{\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)}.$$

Question 16 : la bonne réponse est B, c'est-à-dire $f'(0)$.

Remarque

L'équation fonctionnelle rappelle la formule d'addition de la tangente :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

La relation obtenue

$$f'(x) = f'(0)(1 + f(x)^2)$$

est cohérente avec les fonctions de la forme $f(x) = \tan(cx)$, sur les intervalles où elles sont définies.

Question	Résultat	Choix
12	(v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$	A
13	$\lim u_n = \ln 2$	C
14	$a = 1$	E
15	$2^n n!$	C
16	$\frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} = f'(0)$	B

Correction détaillée des questions 17 à 20

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats finaux :

Q17 : D

Q18 : B

Q19 : E

Q20 : A

Question 17

On considère la fonction

$$f(x) = e^x - 2\sqrt{e^x - 1}.$$

1. Domaine de définition

Pour que la racine carrée soit définie, il faut

$$e^x - 1 \geq 0.$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante,

$$e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

Ainsi,

$$D_f = [0, +\infty[.$$

La fonction n'est donc pas définie à gauche de 0. Elle ne peut, par conséquent, pas être dérivable à gauche en 0.

Par ailleurs,

$$f(0) = e^0 - 2\sqrt{e^0 - 1} = 1.$$

La courbe C_f passe donc par le point

$$A(0, 1).$$

2. Étude du taux d'accroissement à droite

Pour savoir si f est dérivable à droite en 0, on étudie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^x - 1 - 2\sqrt{e^x - 1}}{x}.$$

Posons

$$t = \sqrt{e^x - 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $t \rightarrow 0^+$. De plus,

$$e^x - 1 = t^2 \quad \text{et} \quad x = \ln(1 + t^2).$$

Ainsi,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{t^2 - 2t}{\ln(1 + t^2)} = \frac{t(t - 2)}{\ln(1 + t^2)}.$$

Nous évitons toute notation d'équivalence. Écrivons exactement :

$$\frac{t(t-2)}{\ln(1+t^2)} = \frac{t-2}{t} \cdot \frac{t^2}{\ln(1+t^2)}.$$

Étudions séparément les deux facteurs.

D'abord,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t-2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{t}\right) = -\infty.$$

Ensuite, posons $u = t^2$. Alors $u \rightarrow 0^+$ et

$$\frac{t^2}{\ln(1+t^2)} = \frac{u}{\ln(1+u)}.$$

On utilise la limite classique

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Son inverse donne

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{\ln(1+t^2)} = 1.$$

Le premier facteur tend vers $-\infty$, tandis que le second tend vers $1 > 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty.$$

3. Interprétation géométrique

La limite du taux d'accroissement n'est pas un réel fini : f n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Cependant, puisque ce taux d'accroissement tend vers $-\infty$, la courbe C_f admet au point $A(0,1)$ une demi-tangente verticale.

Le signe négatif indique que, lorsque x augmente à partir de 0, la courbe descend : la demi-tangente est donc dirigée vers le bas.

Question 17 : la bonne réponse est D.

Question 18

On considère

$$g(x) = \ln\left(\frac{4x}{1+2x^2}\right).$$

1. Domaine de définition

Il faut

$$\frac{4x}{1+2x^2} > 0.$$

Comme

$$1+2x^2 > 0$$

pour tout réel x , la condition se réduit à

$$x > 0.$$

Ainsi,

$$D_g =]0, +\infty[.$$

2. Calcul de la première dérivée

On écrit

$$g(x) = \ln(4x) - \ln(1+2x^2).$$

Donc

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1+2x^2}.$$

En réduisant au même dénominateur,

$$g'(x) = \frac{1+2x^2-4x^2}{x(1+2x^2)} = \frac{1-2x^2}{x(1+2x^2)}.$$

3. Calcul de la seconde dérivée

Partons de

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1+2x^2}.$$

On a

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Pour le second terme, la dérivée de

$$\frac{4x}{1+2x^2}$$

est

$$\frac{4(1+2x^2) - 4x(4x)}{(1+2x^2)^2} = \frac{4-8x^2}{(1+2x^2)^2}.$$

Ainsi,

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4-8x^2}{(1+2x^2)^2}.$$

Donc

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{8x^2-4}{(1+2x^2)^2}.$$

Réduisons au même dénominateur :

$$g''(x) = \frac{-(1 + 2x^2)^2 + x^2(8x^2 - 4)}{x^2(1 + 2x^2)^2}.$$

Or

$$-(1 + 2x^2)^2 = -1 - 4x^2 - 4x^4.$$

Donc le numérateur est

$$-1 - 4x^2 - 4x^4 + 8x^4 - 4x^2 = 4x^4 - 8x^2 - 1.$$

Finalement,

$$g''(x) = \frac{4x^4 - 8x^2 - 1}{x^2(1 + 2x^2)^2}.$$

4. Recherche du changement de convexité

Pour $x > 0$, le dénominateur

$$x^2(1 + 2x^2)^2$$

est strictement positif. Le signe de $g''(x)$ est donc celui de

$$4x^4 - 8x^2 - 1.$$

On résout

$$4x^4 - 8x^2 - 1 = 0.$$

Posons

$$X = x^2.$$

On obtient

$$4X^2 - 8X - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 80 = 16 \times 5.$$

Les solutions sont

$$X = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Or

$$1 - \frac{\sqrt{5}}{2} < 0,$$

alors que $X = x^2 \geq 0$. Cette solution est impossible.

Il reste

$$x^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $x > 0$,

$$x = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Le polynôme $4X^2 - 8X - 1$, de coefficient dominant positif, est négatif avant sa racine positive et positif après celle-ci. Ainsi g'' change bien de signe : la courbe possède un point d'inflexion à cette abscisse.

Question 18 : la bonne réponse est B.

Question 19

On cherche l'aire située sous la courbe

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

et au-dessus de la parabole

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

1. Détermination des points d'intersection

Les deux courbes se coupent lorsque

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}.$$

En multipliant par le nombre strictement positif $2(1+x^2)$, on obtient

$$2 = x^2(1+x^2).$$

Donc

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Posons

$$X = x^2.$$

L'équation devient

$$X^2 + X - 2 = 0.$$

On factorise :

$$X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2).$$

Les solutions sont

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -2.$$

Comme $X = x^2 \geq 0$, seule la solution $X = 1$ convient. Ainsi,

$$x^2 = 1,$$

d'où

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

2. Détermination de la courbe supérieure

En $x = 0$,

$$\frac{1}{1+0^2} = 1, \quad \frac{0^2}{2} = 0.$$

Donc, entre -1 et 1 , la courbe

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

est située au-dessus de la parabole

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

L'aire recherchée est donc

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

3. Exploitation de la parité

Les deux fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x^2}{2}$$

sont paires. Leur différence est donc paire.

Ainsi,

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

4. Calcul

On a

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A} = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}}.$$

Question 19 : la bonne réponse est E.

Question 20

On considère

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in [1, e].$$

Le repère est orthonormé et vérifie

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm.}$$

1. Prise en compte de l'échelle

Une unité sur l'axe des abscisses représente 2 cm, et une unité sur l'axe des ordonnées représente également 2 cm.

Ainsi, au point d'abscisse mathématique x ,

$$X = 2x$$

est l'abscisse physique exprimée en centimètres, et

$$Y = 2f(x)$$

est la distance physique à l'axe des abscisses.

De plus,

$$dX = 2 dx.$$

2. Formule du volume

Lors de la rotation autour de l'axe des abscisses, une tranche élémentaire engendre un disque de rayon Y . Son volume élémentaire est

$$dV = \pi Y^2 dX.$$

Donc

$$V = \pi \int_1^e (2f(x))^2 2 dx.$$

Ainsi,

$$V = 8\pi \int_1^e f(x)^2 dx.$$

Puisque

$$f(x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x^2},$$

on obtient

$$V = 8\pi \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx.$$

3. Calcul de l'intégrale

Posons

$$t = \ln x.$$

Alors

$$x = e^t \quad \text{et} \quad dx = e^t dt.$$

Les bornes deviennent :

$$x = 1 \Rightarrow t = 0, \quad x = e \Rightarrow t = 1.$$

Ainsi,

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = \int_0^1 t^2 e^{-t} dt.$$

Calculons cette intégrale par deux intégrations par parties.

Posons d'abord

$$u = t^2, \quad dv = e^{-t} dt.$$

Alors

$$du = 2t dt, \quad v = -e^{-t}.$$

Donc

$$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = \left[-t^2 e^{-t} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 t e^{-t} dt.$$

Calculons maintenant

$$\int_0^1 t e^{-t} dt.$$

On pose

$$u = t, \quad dv = e^{-t} dt,$$

d'où

$$du = dt, \quad v = -e^{-t}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 t e^{-t} dt = \left[-t e^{-t} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt.$$

Or

$$\left[-t e^{-t} \right]_0^1 = -\frac{1}{e}$$

et

$$\int_0^1 e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Donc

$$\int_0^1 t e^{-t} dt = 1 - \frac{2}{e}.$$

Revenons à la première intégrale :

$$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = -\frac{1}{e} + 2 \left(1 - \frac{2}{e} \right).$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 t^2 e^{-t} dt = 2 - \frac{5}{e}.$$

Finalement,

$$V = 8\pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \text{ cm}^3.$$

Question 20 : la bonne réponse est A, avec

$$V = 8\pi \left(2 - \frac{5}{e} \right) \text{ cm}^3.$$

Question	Résultat	Choix
17	Demi-tangente verticale dirigée vers le bas	D
18	$x = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}$	B
19	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$	E
20	$8\pi \left(2 - \frac{5}{e}\right) \text{ cm}^3$	A

Correction détaillée des questions 21 à 25

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats finaux :

Q21 : C

Q22 : D

Q23 : E

Q24 : D

Q25 : A

Question 21

On considère

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{2x^2}, \quad x \neq 0,$$

et l'on cherche

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Méthode

Nous n'utilisons ni développement limité ni notation d'équivalence. Nous transformons l'expression afin de faire apparaître deux limites classiques.

1. Décomposition du numérateur

On ajoute et on retranche 1 :

$$e^{x^2} - \cos x = (e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} + \frac{1 - \cos x}{2x^2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

2. Première limite

Posons

$$u = x^2.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, on a $u \rightarrow 0$. La limite classique

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1.$$

Donc la contribution du premier terme est

$$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

3. Seconde limite

Utilisons l'identité

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

La limite classique

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

entraîne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

La contribution du second terme vaut donc

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

4. Conclusion

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Attention

La réponse $-\frac{1}{2}$, entourée sur l'image, est incorrecte.

Question 21 : la bonne réponse est C, soit $\frac{3}{4}$.

Question 22

On cherche, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx.$$

1. Utilisation de la somme géométrique

Pour tout $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Cette identité peut être vérifiée en multipliant le membre de gauche par $1 - x$:

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \\ = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) - (x + x^2 + \dots + x^n) \\ = 1 - x^n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in [0, 1[$,

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Au point $x = 1$, l'expression initiale est indéterminée, mais cela ne change pas la valeur de l'intégrale : modifier une fonction en un seul point ne modifie pas son intégrale.

2. Intégration terme à terme

On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx + \dots + \int_0^1 x^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Or, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Par conséquent,

$$I_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Autrement dit,

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Question 22 : la bonne réponse est D.

Question 23

On considère

$$I = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx, \quad a > 0.$$

Il faut déterminer la valeur de I .

Méthode

Le changement de variable $x = 1/t$ transforme l'intégrale en son opposée. Cela permettra de conclure immédiatement.

1. Changement de variable

Posons

$$x = \frac{1}{t}.$$

Alors

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt.$$

Les bornes deviennent :

$$x = a \implies t = \frac{1}{a}, \quad x = \frac{1}{a} \implies t = a.$$

De plus,

$$\ln x = \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t,$$

et

$$1 + x^2 = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{1 + t^2}{t^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/a}^a \frac{-\ln t}{\frac{1+t^2}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \int_{1/a}^a \frac{\ln t}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

2. Comparaison avec l'intégrale initiale

En inversant les bornes,

$$\int_{1/a}^a \frac{\ln t}{1+t^2} dt = - \int_a^{1/a} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

La variable d'intégration étant muette, cette dernière intégrale est exactement $-I$. Nous avons donc

$$I = -I.$$

Par conséquent,

$$2I = 0,$$

d'où

$$\boxed{I = 0}.$$

Remarque

Ce raisonnement reste valable que $a < 1$, $a = 1$ ou $a > 1$. Lorsque $a = 1$, les deux bornes sont égales et l'intégrale vaut évidemment 0.

Question 23 : la bonne réponse est E, soit $I = 0$.

Question 24

Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{2i\alpha} = 0.$$

On cherche une propriété vérifiée par ses deux solutions z_1 et z_2 .

1. Simplification de l'équation

Posons

$$\lambda = 2^\alpha e^{i\alpha}.$$

Comme $2^\alpha > 0$ et $e^{i\alpha} \neq 0$, on a

$$\lambda \neq 0.$$

Remarquons que

$$\lambda^2 = 2^{2\alpha} e^{2i\alpha}.$$

Le terme constant s'écrit alors

$$i 2^{2\alpha+1} e^{2i\alpha} = 2i\lambda^2.$$

L'équation devient

$$z^2 - (1 + 2i)\lambda z + 2i\lambda^2 = 0.$$

Posons maintenant

$$w = \frac{z}{\lambda}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad z = \lambda w.$$

En remplaçant z par λw , on obtient

$$\lambda^2 w^2 - (1 + 2i)\lambda^2 w + 2i\lambda^2 = 0.$$

Puisque $\lambda^2 \neq 0$, on peut diviser par λ^2 :

$$w^2 - (1 + 2i)w + 2i = 0.$$

2. Résolution de l'équation réduite

On cherche deux nombres dont la somme vaut $1 + 2i$ et le produit vaut $2i$.

Les nombres 1 et $2i$ conviennent, car

$$1 + 2i = 1 + 2i$$

et

$$1 \times 2i = 2i.$$

Ainsi,

$$w^2 - (1 + 2i)w + 2i = (w - 1)(w - 2i).$$

Les solutions sont donc

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2i.$$

En revenant à $z = \lambda w$, les solutions sont

$$z_1 = \lambda, \quad z_2 = 2i\lambda,$$

à l'ordre près.

3. Étude du quotient des solutions

Avec cet ordre,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lambda}{2i\lambda} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Or

$$-\frac{i}{2} \in i\mathbb{R}.$$

Si l'on échange l'ordre des racines, on obtient

$$\frac{z_2}{z_1} = 2i \in i\mathbb{R}.$$

Ainsi, quel que soit l'ordre choisi pour nommer les solutions,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}}.$$

4. Vérification rapide des autres propositions

— Les modules ne sont pas égaux :

$$|z_2| = |2i\lambda| = 2|\lambda| = 2|z_1|.$$

La proposition C est donc fausse.

— Le rapport des racines est imaginaire pur non nul, et non réel. La proposition E est donc fausse.

— La relation $z_1 = iz_2$ ne convient pas : le facteur exact entre les racines est $2i$ ou son inverse.

Question 24 : la bonne réponse est D.

Question 25

On considère

$$z = e^{\frac{2\pi i}{7}}, \quad a = z + z^2 + z^4, \quad b = z^3 + z^5 + z^6.$$

On sait que

$$a + b = -1 \quad \text{et} \quad \bar{b} = a.$$

On cherche

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

1. Lien entre S et le nombre complexe a

D'après la formule d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ainsi,

$$z = e^{2\pi i/7}, \quad z^2 = e^{4\pi i/7}, \quad z^4 = e^{8\pi i/7}.$$

La partie réelle de a est donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a) &= \operatorname{Re}(z + z^2 + z^4) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{S = \operatorname{Re}(a)}.$$

2. Utilisation des relations données

La relation

$$\bar{b} = a$$

donne, en prenant le conjugué des deux membres,

$$b = \bar{a}.$$

Par conséquent,

$$a + b = a + \bar{a}.$$

Or, pour tout nombre complexe a ,

$$a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a).$$

Comme $a + b = -1$, nous obtenons

$$2 \operatorname{Re}(a) = -1.$$

Donc

$$\operatorname{Re}(a) = -\frac{1}{2}.$$

Puisque $S = \operatorname{Re}(a)$,

$$\boxed{S = -\frac{1}{2}}.$$

Question 25 : la bonne réponse est A.

Question	Résultat	Choix
21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{2x^2} = \frac{3}{4}$	C
22	$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	D
23	$I = 0$	E
24	$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R}$	D
25	$S = -\frac{1}{2}$	A

Correction détaillée des questions 26 à 29

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Résultats finaux :

Q26 : E (AR)

Q27 : D

Q28 : A

Q29 : C

Question 26

Dans le plan complexe, les points A et B ont pour affixes

$$a = 1 + i\sqrt{3}, \quad b = -i\bar{a}.$$

Le point C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle

$$\frac{\pi}{6}.$$

1. Forme trigonométrique de a

On calcule le module de a :

$$|a| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

De plus,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

2. Détermination de l'afixe b

On a

$$\bar{a} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Par ailleurs,

$$-i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} b &= -i\bar{a} \\ &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|b| = 2.$$

3. Forme trigonométrique du quotient $Z = b/a$

On utilise la règle du quotient sous forme trigonométrique :

$$\frac{b}{a} = \frac{|b|}{|a|} [\cos(\arg b - \arg a) + i \sin(\arg b - \arg a)].$$

Comme $|a| = |b| = 2$,

$$\frac{|b|}{|a|} = 1.$$

Et

$$\arg b - \arg a = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Or

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Donc

$$Z = \frac{b}{a} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}.$$

Ce quotient montre que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ vaut

$$\frac{5\pi}{6}.$$

4. Détermination de l'afixe de C

Une rotation de centre O et d'angle $\pi/6$ multiplie l'afixe par

$$\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi,

$$c = a \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Comme

$$a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

on obtient

$$c = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i.$$

Donc

$$|c| = 2.$$

Par conséquent,

$$OB = |b| = 2 \quad \text{et} \quad OC = |c| = 2.$$

Le triangle OBC est donc isocèle en O .

5. Calcul de l'angle $\widehat{BOC}$

On a

$$\arg b = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{et} \quad \arg c = \frac{\pi}{2}.$$

La différence est

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

L'angle géométrique, compris entre 0 et π , vaut donc

$$2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Le triangle OBC est donc isocèle en O , mais il n'est pas rectangle en O .

On peut aussi vérifier par la loi des cosinus :

$$\begin{aligned} BC^2 &= OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 4 + 4 - 8 \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 12. \end{aligned}$$

Donc

$$BC = 2\sqrt{3}.$$

Les longueurs sont

$$OB = OC = 2, \quad BC = 2\sqrt{3}.$$

Attention

La réponse A, entourée sur l'image, est incorrecte. Le triangle est isocèle en O , mais il n'est pas rectangle. Aucune des propositions A à D ne convient.

Question 26 : la bonne réponse est E, c'est-à-dire AR.

Question 27

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' - 2y' + y = (2 + 6x)e^x.$$

On sait que

$$y_p(x) = (x^2 + x^3)e^x$$

est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

On cherche la solution y_0 dont la courbe passe par

$$A(0, 1)$$

et dont la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène associée est

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

On factorise :

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2.$$

La racine $r = 1$ est double. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x,$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Solution générale de l'équation complète

Comme

$$y_p(x) = (x^2 + x^3)e^x$$

est une solution particulière, la solution générale de $(\mathcal{E})$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Donc

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + (x^2 + x^3)e^x.$$

En factorisant e^x ,

$$\boxed{y(x) = (x^3 + x^2 + C_2x + C_1)e^x}.$$

3. Utilisation de la condition $y(0) = 1$

La courbe passe par $A(0, 1)$, donc

$$y(0) = 1.$$

Or

$$y(0) = (0 + 0 + 0 + C_1)e^0 = C_1.$$

Ainsi,

$$\boxed{C_1 = 1}.$$

La solution devient

$$y(x) = (x^3 + x^2 + C_2x + 1)e^x.$$

4. Condition sur la tangente en A

Une tangente parallèle à l'axe des abscisses a un coefficient directeur nul. Il faut donc

$$y'(0) = 0.$$

Posons

$$P(x) = x^3 + x^2 + C_2x + 1.$$

Alors

$$y(x) = P(x)e^x.$$

Par la formule de dérivation d'un produit,

$$y'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x.$$

Donc

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x.$$

Or

$$P'(x) = 3x^2 + 2x + C_2.$$

En $x = 0$,

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P'(0) = C_2.$$

Ainsi,

$$y'(0) = C_2 + 1.$$

La condition $y'(0) = 0$ donne

$$C_2 + 1 = 0,$$

d'où

$$\boxed{C_2 = -1}.$$

5. Solution recherchée

On obtient finalement

$$\boxed{y_0(x) = (x^3 + x^2 - x + 1)e^x}.$$

Question 27 : la bonne réponse est D.

Question 28

On considère les points

$$A(-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad B(7, -5, 5).$$

La sphère S a pour diamètre $[AB]$, et l'on cherche le plan tangent à S au point

$$C(1, 1, -1).$$

1. Centre de la sphère

Le centre de la sphère est le milieu M de $[AB]$.

Ainsi,

$$M\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{1-5}{2}, \frac{1+5}{2}\right).$$

Donc

$$\boxed{M(3, -2, 3)}.$$

2. Vérification que C appartient à la sphère

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$\overrightarrow{AB} = (8, -6, 4).$$

Ainsi,

$$AB^2 = 8^2 + (-6)^2 + 4^2 = 64 + 36 + 16 = 116.$$

Le rayon de la sphère est

$$R = \frac{AB}{2},$$

donc

$$R^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{116}{4} = 29.$$

Calculons maintenant

$$\overrightarrow{MC} = (1-3, 1-(-2), -1-3) = (-2, 3, -4).$$

Alors

$$MC^2 = (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2 = 4 + 9 + 16 = 29.$$

Ainsi,

$$MC^2 = R^2,$$

donc C appartient bien à la sphère.

3. Vecteur normal au plan tangent

Le plan tangent à une sphère en un point C est perpendiculaire au rayon $[MC]$.

Ainsi, le vecteur

$$\overrightarrow{MC} = (-2, 3, -4)$$

est un vecteur normal au plan tangent.

L'équation du plan tangent passant par $C(1, 1, -1)$ est donc

$$-2(x-1) + 3(y-1) - 4(z+1) = 0.$$

Développons :

$$-2x + 2 + 3y - 3 - 4z - 4 = 0.$$

Donc

$$-2x + 3y - 4z - 5 = 0.$$

En multipliant par -1 , on obtient l'équation équivalente

$$2x - 3y + 4z + 5 = 0.$$

Question 28 : la bonne réponse est A.

Question 29

On considère le point

$$A(2, 1, -1)$$

et la droite (D) donnée par

$$x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{-2}.$$

On cherche la distance du point A à la droite (D) .

1. Représentation paramétrique de la droite

Posons

$$x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{-2} = t.$$

Alors

$$x = 1 + t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = -2t.$$

La droite passe donc par

$$P(1, -2, 0)$$

et possède pour vecteur directeur

$$\vec{u} = (1, 2, -2).$$

2. Formule de la distance d'un point à une droite

Dans l'espace, la distance du point A à la droite passant par P et dirigée par $\vec{u}$ est

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Calculons

$$\overrightarrow{PA} = (2 - 1, 1 - (-2), -1 - 0) = (1, 3, -1).$$

3. Calcul du produit vectoriel

On a

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \times \vec{u} &= (3(-2) - (-1)2, (-1)1 - 1(-2), 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) \\ &= (-6 + 2, -1 + 2, 2 - 3) \\ &= (-4, 1, -1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

D'autre part,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Par conséquent,

$$d(A, D) = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

4. Vérification par projection orthogonale

On peut vérifier le résultat en cherchant le point H de la droite tel que

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0.$$

Un point H de la droite a pour coordonnées

$$H(1+t, -2+2t, -2t).$$

Alors

$$\overrightarrow{AH} = (t-1, 2t-3, 1-2t).$$

La condition d'orthogonalité donne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} &= (t-1) + 2(2t-3) - 2(1-2t) \\ &= t-1 + 4t-6-2+4t \\ &= 9t-9. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$9t-9=0 \implies t=1.$$

Donc

$$H(2, 0, -2).$$

Et

$$\overrightarrow{AH} = (0, -1, -1).$$

Ainsi,

$$AH = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

ce qui confirme le résultat précédent.

Question 29 : la bonne réponse est C, soit $\sqrt{2}$.

Question	Résultat	Choix
26	Triangle isocèle en O , avec $\widehat{BOC} = 120^\circ$	E (AR)
27	$y_0(x) = (x^3 + x^2 - x + 1)e^x$	D
28	$2x - 3y + 4z + 5 = 0$	A
29	$d(A, D) = \sqrt{2}$	C

Correction détaillée de la question 30

Concours commun d'accès en 1^{re} année - ENSAM Maroc

Épreuve de mathématiques - Session 2026

Énoncé

Dans l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$, on considère

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il faut déterminer laquelle des affirmations suivantes est correcte :

- A. $[I_3, A^3]$ est liée dans $M_3(\mathbb{R})$,
- B. $[I_3, A^3]$ est libre dans $M_3(\mathbb{R})$,
- C. $A^3 = I_3$,
- D. A est inversible,
- E. Autre réponse.

Méthode

Nous allons calculer A^2 , puis A^3 , et étudier ensuite la famille (I_3, A^3) . Nous vérifierons également si A est inversible.

1. Calcul de A^2

On effectue le produit matriciel $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculons chaque coefficient.

Première ligne :

$$(A^2)_{11} = (-1)(-1) + (-1)(-1) + 0(-1) = 2,$$

$$(A^2)_{12} = (-1)(-1) + (-1)(-1) + 0(1) = 2,$$

$$(A^2)_{13} = (-1)0 + (-1)0 + 0(-2) = 0.$$

Deuxième ligne : elle est identique à la première ligne de A , donc

$$(A^2)_{21} = 2, \quad (A^2)_{22} = 2, \quad (A^2)_{23} = 0.$$

Troisième ligne :

$$(A^2)_{31} = (-1)(-1) + 1(-1) + (-2)(-1) = 1 - 1 + 2 = 2,$$

$$(A^2)_{32} = (-1)(-1) + 1(-1) + (-2)(1) = 1 - 1 - 2 = -2,$$

$$(A^2)_{33} = (-1)0 + 1 \cdot 0 + (-2)(-2) = 4.$$

Ainsi,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de A^3

On a

$$A^3 = A^2 A.$$

Donc

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Première ligne :

$$(A^3)_{11} = 2(-1) + 2(-1) + 0(-1) = -4,$$

$$(A^3)_{12} = 2(-1) + 2(-1) + 0(1) = -4,$$

$$(A^3)_{13} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0(-2) = 0.$$

Deuxième ligne :

$$(A^3)_{21} = -4, \quad (A^3)_{22} = -4, \quad (A^3)_{23} = 0.$$

Troisième ligne :

$$(A^3)_{31} = 2(-1) + (-2)(-1) + 4(-1) = -2 + 2 - 4 = -4,$$

$$(A^3)_{32} = 2(-1) + (-2)(-1) + 4(1) = -2 + 2 + 4 = 4,$$

$$(A^3)_{33} = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 4(-2) = -8.$$

Ainsi,

$$A^3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Or

$$4A = 4 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^3 = 4A}.$$

En particulier,

$$A^3 \neq I_3.$$

La proposition **C** est donc fausse.

3. Étude de la famille (I_3, A^3)

Rappel

Deux vecteurs U et V d'un espace vectoriel forment une famille liée si et seulement si l'un est un multiple scalaire de l'autre.

La famille (I_3, A^3) serait liée s'il existait un réel λ tel que

$$A^3 = \lambda I_3.$$

Mais une matrice de la forme λI_3 est diagonale :

$$\lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Or

$$A^3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

possède plusieurs coefficients non nuls en dehors de la diagonale, par exemple

$$(A^3)_{12} = -4 \neq 0.$$

Ainsi, A^3 n'est pas un multiple scalaire de I_3 .

On peut aussi faire une démonstration directe. Supposons que

$$\alpha I_3 + \beta A^3 = 0.$$

En regardant le coefficient situé à la première ligne et à la deuxième colonne, on obtient

$$-4\beta = 0,$$

donc

$$\beta = 0.$$

L'égalité devient alors

$$\alpha I_3 = 0,$$

ce qui implique

$$\alpha = 0.$$

La seule combinaison linéaire nulle est donc la combinaison triviale :

$$\alpha = \beta = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(I_3, A^3) \text{ est une famille libre dans } M_3(\mathbb{R})}.$$

La proposition **B** est vraie et la proposition **A** est fausse.

4. Vérification de l'inversibilité de A

Les deux premières lignes de A sont identiques :

$$L_1 = L_2 = (-1, -1, 0).$$

Les lignes de A sont donc linéairement dépendantes. Par conséquent,

$$\det(A) = 0.$$

Ainsi,

A n'est pas inversible.

La proposition **D** est donc fausse.

5. Bilan des propositions

Choix	Affirmation	Verdict
A	(I_3, A^3) est liée	Faux
B	(I_3, A^3) est libre	Vrai
C	$A^3 = I_3$	Faux, car $A^3 = 4A$
D	A est inversible	Faux, car $\det(A) = 0$
E	Autre réponse	Faux

Question 30 : la bonne réponse est B.

$[I_3, A^3]$ est libre dans $M_3(\mathbb{R})$.