

Pendule élastique horizontal

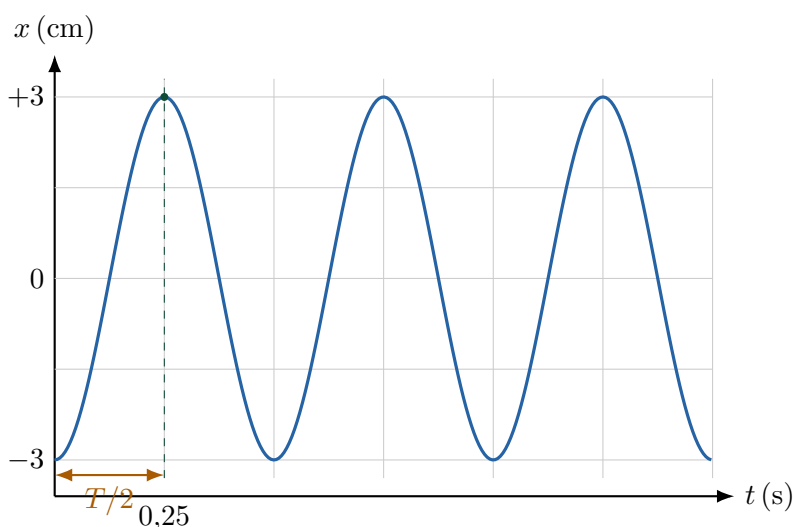
Correction détaillée des QCM Q15 à Q18

Concours d'accès aux Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire – 19 juillet 2025

Données de l'énoncé. Un solide de masse $m = 200 \text{ g} = 0,200 \text{ kg}$ est relié à un ressort horizontal de raideur K . Les frottements sont négligés. L'origine O correspond à la position d'équilibre. À $t = 0$, le solide est écarté dans le sens négatif et lâché sans vitesse initiale. On donne $\pi^2 = 10$.

1. Lecture immédiate du graphe : ce qu'il faut voir avant tout calcul

Le graphe est celui d'un mouvement sinusoïdal non amorti : l'amplitude reste constante, ce qui est cohérent avec l'absence de frottements.



À $t = 0$, le solide est à une extrémité négative et sa vitesse est nulle : on lit donc

$$x(0) = -3 \text{ cm} = -3 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Le premier maximum positif est atteint à $t = 0,25 \text{ s}$. Passer d'un minimum à un maximum demande une demi-période :

$$\frac{T}{2} = 0,25 \quad \Rightarrow \quad T = 0,50 \text{ s}.$$

Ainsi,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,50} = 4\pi \text{ rad s}^{-1}.$$

Enfin l'amplitude vaut

$$X_m = 3 \text{ cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Réflexe QCM. Avant toute équation, extraire trois informations du graphe : X_m , T et le signe de $x(0)$. Ici, ces trois lectures suffisent pratiquement à répondre à Q16, Q17 et Q18.

2. Q15 – Équation différentielle du mouvement

Démonstration complète

On étudie le solide suivant l'axe horizontal (Ox). Les forces verticales (poids et réaction du support) se compensent. La seule force horizontale est la force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_r = -Kx\vec{i}.$$

D'après la deuxième loi de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Projetée sur (Ox) :

$$-Kx = m\ddot{x}.$$

Donc

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

et, en divisant par m ,

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0.$$

Q15 : réponse D. $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0.$

Méthode la plus rapide. Pour un ressort horizontal sans frottements, l'équation standard est toujours

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Il suffit donc de repérer immédiatement la proposition contenant $+K/m$ devant x .

3. Q16 – Expression de $x(t)$

La forme générale d'un oscillateur harmonique est

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

D'après le graphe,

$$X_m = 3 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad \omega = 4\pi \text{ rad s}^{-1}.$$

Il reste à déterminer la phase φ .

À $t = 0$,

$$x(0) = X_m \cos \varphi = -X_m,$$

donc

$$\cos \varphi = -1 \implies \varphi = \pi \pmod{2\pi}.$$

Ainsi

$$x(t) = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi).$$

La condition « lâché sans vitesse initiale » est bien vérifiée. En effet,

$$v(t) = \dot{x}(t) = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi),$$

donc

$$v(0) = -X_m \omega \sin \pi = 0.$$

Q16 : réponse C. $x(t) = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi).$

Méthode QCM ultra-rapide : élimination.

1. L'amplitude lue vaut 3 cm : on élimine A et D.
2. La période vaut 0,5 s : il faut $\omega = 4\pi$, donc on élimine B (8π donnerait $T = 0,25$ s).
3. Il ne reste que C. De plus, $+\pi$ impose $x(0) = -X_m$, exactement comme sur le graphe.

4. Q17 – Valeur de la raideur K

Pour un oscillateur masse-ressort,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Donc

$$K = m\omega_0^2.$$

Avec

$$m = 0,200 \text{ kg}, \quad \omega_0 = 4\pi \text{ rad s}^{-1},$$

on obtient

$$K = 0,200(4\pi)^2 = 0,200 \times 16\pi^2.$$

L'énoncé donne précisément $\pi^2 = 10$, donc

$$K = 0,200 \times 16 \times 10 = 32 \text{ N m}^{-1}.$$

Ainsi

$$K = 32 \text{ N m}^{-1}.$$

Q17 : réponse A. 32 N m^{-1} .

Astuce QCM. Dès que Q16 a fourni $\omega = 4\pi$, Q17 devient une substitution de 10 secondes :

$$K = m\omega^2 = 0,2 \times 16 \times \underbrace{\pi^2}_{10} = 32.$$

La donnée $\pi^2 = 10$ est un indice très fort sur le calcul attendu.

5. Q18 – Vitesse à la position d'équilibre

La position d'équilibre correspond à $x = 0$. Pour un oscillateur harmonique, c'est à cet endroit que la vitesse est maximale en valeur absolue.

À partir de

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi),$$

on a

$$v(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Comme $|\sin| \leq 1$, la vitesse maximale vaut

$$v_{\max} = \omega X_m.$$

Donc

$$v_{\max} = 4\pi \times 3 \times 10^{-2} = 12\pi \times 10^{-2} = 0,12\pi \text{ m s}^{-1}.$$

Numériquement, avec $\pi \simeq 3,14$,

$$v_{\max} \simeq 0,12 \times 3,14 = 0,3768 \text{ m s}^{-1}.$$

À la précision des réponses proposées,

$$v \simeq 0,376 \text{ m s}^{-1}.$$

(La donnée $\pi^2 = 10$ est surtout destinée au calcul très rapide de K à la question Q17.)

On peut également retrouver ce résultat par conservation de l'énergie mécanique. Aux extrémités, $v = 0$ et

$$E_m = \frac{1}{2} K X_m^2.$$

À l'équilibre, $x = 0$ et

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2.$$

Donc

$$\frac{1}{2} K X_m^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = X_m \sqrt{\frac{K}{m}} = X_m \omega,$$

ce qui donne le même résultat.

Q18 : réponse A. $v \approx 0,376 \text{ m s}^{-1}$.

Piège classique. À la position d'équilibre, la vitesse n'est surtout pas nulle : elle est maximale. La vitesse est nulle aux positions extrêmes $x = \pm X_m$.

6. Synthèse : la stratégie la plus maligne pour ce QCM

Question	Raisonnement éclair	Réponse
Q15	Ressort sans frottements : $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$.	D
Q16	Graphe : $X_m = 3 \text{ cm}$, $T = 0,5 \text{ s}$ donc $\omega = 4\pi$; départ à $-X_m$ donc phase π .	C
Q17	$K = m\omega^2 = 0,2 \times (4\pi)^2 = 32 \text{ N m}^{-1}$.	A
Q18	À l'équilibre, $v = v_{\max} = \omega X_m = 4\pi \times 0,03 \approx 0,376 \text{ m s}^{-1}$.	A

Réponses finales : **Q15 = D ; Q16 = C ; Q17 = A ; Q18 = A**

7. Enchaînement optimal le jour du concours

L'ordre le plus efficace n'est pas nécessairement Q15, Q16, Q17, Q18. Le graphe donne directement les grandeurs physiques essentielles. Une stratégie très rapide est :

$$\boxed{\text{lire } X_m, T \Rightarrow Q16 \Rightarrow Q17 \Rightarrow Q18 \Rightarrow Q15.}$$

En pratique :

- lire $X_m = 3 \text{ cm}$ et $T = 0,5 \text{ s}$;
- calculer mentalement $\omega = 2\pi/T = 4\pi$;
- reconnaître immédiatement Q16-C ;
- utiliser $K = m\omega^2$ pour Q17-A ;
- utiliser $v_{\max} = \omega X_m$ pour Q18-A ;
- terminer par l'équation standard du ressort pour Q15-D.

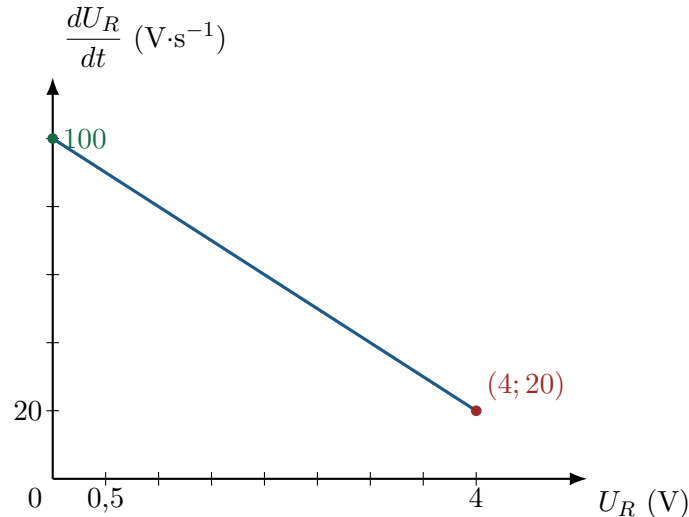
Cette méthode limite les calculs et exploite au maximum la structure d'un QCM.

Correction détaillée – Circuit RL

Questions 19 à 22 – méthodes complètes et raccourcis QCM

Résistance donnée : $R = 20\ \Omega$

Lecture essentielle de la figure 2. La droite représente $\frac{dU_R}{dt}$ en fonction de U_R . Elle passe par le point $(U_R = 4\text{ V}, dU_R/dt = 20\text{ V s}^{-1})$ et coupe l'axe vertical à environ 100 V s^{-1} . On peut donc déterminer directement sa pente et son ordonnée à l'origine.



1. Mise en équation du circuit

Le circuit contient un générateur idéal de f.é.m. E , une bobine idéale d'inductance L (résistance négligeable) et une résistance R , tous en série.

Après fermeture de l'interrupteur, la loi des mailles donne :

$$E = u_R + u_L.$$

Or

$$u_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Donc

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Comme $U_R = Ri$, on a

$$i = \frac{U_R}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_R}{dt}.$$

En remplaçant :

$$E = U_R + \frac{L}{R} \frac{dU_R}{dt}.$$

On isole enfin la dérivée :

$$\boxed{\frac{dU_R}{dt} = \frac{RE}{L} - \frac{R}{L} U_R}.$$

Cette relation est exactement l'équation d'une droite $y = ax + b$ avec

$$y = \frac{dU_R}{dt}, \quad x = U_R,$$

et donc

$$\boxed{a = -\frac{R}{L}}, \quad \boxed{b = \frac{RE}{L}}.$$

Q19 – Équation différentielle vérifiée par U_R

D'après la démonstration précédente :

$$\boxed{\frac{dU_R}{dt} = \frac{RE}{L} - \frac{R}{L}U_R}.$$

Par comparaison avec les propositions, c'est exactement la proposition **B**.

Q19 : réponse B

Méthode QCM la plus rapide

Il suffit de reconnaître la forme affine de la courbe :

$$\frac{dU_R}{dt} = \text{constante} - \text{constante} \times U_R.$$

La pente du graphe est négative, donc le coefficient de U_R doit être négatif. Ensuite, par analyse dimensionnelle ou par la loi des mailles, le coefficient est R/L . Cela élimine immédiatement A, C et D : **B**.

Piège à éviter

Ne pas écrire $u_L = L di/dt$ puis remplacer directement di/dt par dU_R/dt . Il faut utiliser $U_R = Ri$, donc

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_R}{dt}.$$

C'est précisément ce facteur $1/R$ qui conduit à R/L dans l'équation finale.

Q20 – Détermination de L et de E

La droite expérimentale a pour équation :

$$\frac{dU_R}{dt} = aU_R + b$$

avec

$$a = -\frac{R}{L}, \quad b = \frac{RE}{L}.$$

Étape 1 : calcul de la pente

On lit deux points très simples sur la droite :

$$A(0; 100), \quad B(4; 20).$$

La pente vaut donc

$$a = \frac{20 - 100}{4 - 0} = \frac{-80}{4} = -20 \text{ s}^{-1}.$$

Or

$$a = -\frac{R}{L}.$$

Avec $R = 20 \Omega$:

$$-20 = -\frac{20}{L}.$$

Ainsi

$$20 = \frac{20}{L} \implies \boxed{L = 1 \text{ H}}.$$

Étape 2 : calcul de E

L'ordonnée à l'origine est

$$b = 100 \text{ V.s}^{-1}.$$

Or

$$b = \frac{RE}{L}.$$

Donc

$$100 = \frac{20E}{1},$$

soit

$$\boxed{E = 5 \text{ V}}.$$

On obtient donc le couple

$$\boxed{L = 1 \text{ H}, \quad E = 5 \text{ V}}.$$

C'est la proposition **C**.

Q20 : réponse C

Méthode QCM la plus rapide**Raccourci ultra-efficace : utiliser la pente uniquement.**La pente lue grâce aux deux points (0, 100) et (4, 20) vaut -20 . Or

$$\text{pente} = -\frac{R}{L} = -\frac{20}{L}.$$

Donc $L = 1 \text{ H}$ immédiatement. Il ne reste plus que les propositions A ou C. Puis l'ordonnée à l'origine vaut $100 = RE/L = 20E$, donc $E = 5 \text{ V}$: **C**.

On évite ainsi de résoudre l'équation différentielle dans le temps.

Autre méthode rapide avec le point (4, 20). Une fois $L = 1 \text{ H}$ trouvé, injecter directement le point dans

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{RE}{L} - \frac{R}{L}U_R.$$

Cela donne

$$20 = 20E - 20 \times 4 = 20E - 80,$$

d'où $20E = 100$ et $E = 5 \text{ V}$.**Q21 – Intensité du courant en régime permanent**

En régime permanent, le courant ne varie plus :

$$\frac{di}{dt} = 0.$$

La tension aux bornes de la bobine idéale devient donc

$$u_L = L \frac{di}{dt} = 0.$$

La bobine se comporte alors comme un fil idéal et la loi des mailles devient

$$E = Ri_p.$$

Ainsi

$$I_p = \frac{E}{R} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ A}.$$

Donc

$$I_p = 0,25 \text{ A}.$$

C'est la proposition **C**.**Q21 : réponse C****Méthode QCM la plus rapide**Pour un circuit RL alimenté en continu, à $t \rightarrow \infty$ la bobine idéale est équivalente à un court-circuit. Donc directement :

$$I_p = \frac{E}{R} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ A}.$$

Réponse C, sans calcul différentiel.

Q22 – Énergie magnétique stockée dans la bobine

L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant i vaut :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

En régime permanent :

$$L = 1 \text{ H}, \quad i = I_p = 0,25 \text{ A}.$$

Donc

$$E_m = \frac{1}{2} \times 1 \times (0,25)^2.$$

Or

$$(0,25)^2 = 0,0625,$$

donc

$$E_m = 0,03125 \text{ J}.$$

Conversion en millijoules :

$$0,03125 \text{ J} = 31,25 \text{ mJ}.$$

Ainsi

$$E_m = 31,25 \text{ mJ}.$$

C'est la proposition **A**.

Q22 : réponse A

Méthode QCM la plus rapide

Dès que Q20 et Q21 sont trouvées, Q22 se fait mentalement :

$$E_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32} \text{ J.}$$

Or

$$\frac{1}{32} = 0,03125,$$

donc 31,25 mJ : A.

Vérifications physiques utiles**1. Vérification de l'équation de la droite**

Avec $R = 20 \, \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ et $E = 5 \text{ V}$:

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{20 \times 5}{1} - \frac{20}{1}U_R = 100 - 20U_R.$$

Pour $U_R = 4 \text{ V}$:

$$\frac{dU_R}{dt} = 100 - 20 \times 4 = 20 \text{ V.s}^{-1},$$

ce qui redonne exactement le point (4;20) du graphe.

2. Valeur finale de U_R

À la fin du régime transitoire,

$$\frac{dU_R}{dt} = 0.$$

Donc

$$0 = 100 - 20U_R \implies U_R = 5 \text{ V.}$$

C'est cohérent avec $U_R(\infty) = E = 5 \text{ V}$.

3. Constante de temps

Pour un circuit RL :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ s.}$$

On peut aussi écrire la solution temporelle complète :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 0,25 \left(1 - e^{-20t}\right),$$

ainsi que

$$U_R(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 5 \left(1 - e^{-20t}\right).$$

Cette solution n'est toutefois **pas nécessaire** pour répondre au QCM.

Synthèse – stratégie QCM optimale

Question	Raccourci recommandé	Réponse
Q19	Loi des mailles puis $U_R = Ri : \dot{U}_R = RE/L - (R/L)U_R$.	B
Q20	Pente = $(20 - 100)/4 = -20 = -R/L \Rightarrow L = 1 \text{ H}$; puis $b = 100 = RE/L \Rightarrow E = 5 \text{ V}$.	C
Q21	Régime permanent : bobine idéale $\rightarrow$ fil ; $I_p = E/R = 5/20 = 0,25 \text{ A}$.	C
Q22	$E_m = \frac{1}{2}LI_p^2 = \frac{1}{2}(1)(0,25)^2 = 31,25 \text{ mJ}$.	A

Réponses finales :

Q19 = B | Q20 = C | Q21 = C | Q22 = A

Le cœur du problème en une ligne :

$$\frac{dU_R}{dt} = \frac{RE}{L} - \frac{R}{L}U_R$$

Le graphe donne immédiatement les deux coefficients de cette droite. C'est la clé permettant de résoudre pratiquement tout le QCM sans avoir à intégrer l'équation différentielle.

Correction détaillée – Radioactivité

Q23, Q24 et Q25 – méthode complète et stratégie QCM

1. Données de l'énoncé

Une source radioactive d'iode 123 possède une activité initiale

$$A_0 = 5 \text{ GBq},$$

une demi-vie physique

$$t_{1/2} = 13 \text{ h},$$

et une constante radioactive

$$\lambda = 5 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}.$$

L'énoncé donne en outre

$$\ln 2 = 0,69, \quad \ln 3 = 1.$$

Pour la scintigraphie, on injecte

$$100 \text{ } \mu\text{Ci} \text{ d'iode 123},$$

avec

$$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \quad 1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}.$$

Enfin, le nombre d'atomes injectés est donné par

$$N = 250 \times 10^9,$$

et la ration iodée normale en iode 127 vaut

$$R = 125 \text{ } \mu\text{g/j}.$$

Observation préalable importante

Pour Q23, la valeur de l'activité initiale $A_0 = 5 \text{ GBq}$ ne sert pratiquement pas : dans le rapport $A(t)/A_0$, elle s'élimine. En QCM, repérer immédiatement ce type de simplification fait gagner beaucoup de temps.

2. Q23 – Temps pour que l'activité soit réduite au tiers

2.1 Loi fondamentale de décroissance radioactive

L'activité d'un échantillon radioactif décroît selon

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

On cherche l'instant t tel que l'activité ne soit plus que le tiers de sa valeur initiale :

$$A(t) = \frac{A_0}{3}.$$

On remplace dans la loi de décroissance :

$$\frac{A_0}{3} = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Comme $A_0 \neq 0$, on simplifie par A_0 :

$$\frac{1}{3} = e^{-\lambda t}.$$

En prenant le logarithme népérien :

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\lambda t.$$

Or

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3.$$

Donc

$$-\ln 3 = -\lambda t \implies t = \frac{\ln 3}{\lambda}.$$

L'énoncé fournit $\ln 3 = 1$ et $\lambda = 5 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$. Ainsi

$$t = \frac{1}{5 \times 10^{-2}} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ h}.$$

Réponse Q23

$$t = 20 \text{ h}$$

La bonne proposition est donc **B**.

Méthode QCM la plus rapide

Dès que l'on lit « activité réduite au tiers », écrire directement

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{3} = e^{-\lambda t} \implies t = \frac{\ln 3}{\lambda}.$$

Avec $\ln 3 = 1$ et $\lambda = 0,05$, on obtient mentalement $t = 20 \text{ h}$. Aucun calcul avec 5 GBq n'est nécessaire.

2.2 Vérification avec la demi-vie

On peut vérifier la cohérence à partir de

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx \frac{0,69}{13} \approx 0,053 \text{ h}^{-1},$$

ce qui est proche de $5 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$. Un temps de 20 h est donc tout à fait cohérent : il est supérieur à une demi-vie (13 h), car atteindre $1/3$ demande de décroître davantage qu'atteindre $1/2$.

3. Q24 – Conversion de $100 \mu\text{Ci}$ en MBq

On utilise la définition

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq.}$$

Or

$$100 \mu\text{Ci} = 100 \times 10^{-6} \text{ Ci} = 10^{-4} \text{ Ci.}$$

Donc

$$A = 10^{-4} \times 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq.}$$

On additionne les exposants de 10 :

$$A = 3,7 \times 10^6 \text{ Bq.}$$

Puisque

$$1 \text{ MBq} = 10^6 \text{ Bq,}$$

on obtient

$$A = 3,7 \text{ MBq.}$$

Réponse Q24

$$A = 3,7 \text{ MBq}$$

La bonne proposition est ☐ A.

Méthode QCM la plus rapide

Retenir la conversion très utile :

$$1 \mu\text{Ci} = 3,7 \times 10^4 \text{ Bq} = 0,037 \text{ MBq.}$$

Donc

$$100 \mu\text{Ci} = 100 \times 0,037 = 3,7 \text{ MBq.}$$

Réponse immédiate : A.

Piège classique

Ne pas confondre μCi et mCi . Le préfixe μ vaut 10^{-6} , alors que m vaut 10^{-3} . Une erreur de préfixe ferait perdre un facteur 10^3 .

4. Q25 – Fraction de la ration iodée représentée par les atomes injectés

L'énoncé donne directement le nombre d'atomes injectés :

$$N = 250 \times 10^9 = 2,50 \times 10^{11}.$$

La ration quotidienne normale est une **masse** d'iode 127 :

$$R = 125 \mu\text{g.}$$

Il faut donc convertir le nombre d'atomes d'iode 123 en masse.

4.1 Passage du nombre d'atomes à la quantité de matière

Par définition,

$$N = nN_A,$$

d'où

$$n = \frac{N}{N_A}.$$

Ainsi

$$n = \frac{250 \times 10^9}{6,02 \times 10^{23}} \text{ mol}.$$

4.2 Passage de la quantité de matière à la masse

Pour l'iode 123, on peut prendre

$$M(^{123}\text{I}) \approx 123 \text{ g mol}^{-1}.$$

Alors

$$m = nM = \frac{N M}{N_A}.$$

Donc

$$m = \frac{250 \times 10^9 \times 123}{6,02 \times 10^{23}} \text{ g}.$$

Regroupons séparément les nombres et les puissances de dix :

$$m = \frac{250 \times 123}{6,02} \times 10^{9-23} \text{ g}.$$

Or

$$\frac{250 \times 123}{6,02} \approx 5,1 \times 10^3.$$

Ainsi

$$m \approx 5,1 \times 10^3 \times 10^{-14} = 5,1 \times 10^{-11} \text{ g}.$$

Comme

$$1 \mu\text{g} = 10^{-6} \text{ g},$$

on a

$$m \approx 5,1 \times 10^{-5} \mu\text{g}.$$

4.3 Calcul de la fraction q

La fraction cherchée est

$$q = \frac{m}{R}.$$

Donc

$$q = \frac{5,1 \times 10^{-5}}{125}.$$

Comme $125 \approx 1,25 \times 10^2$,

$$q \approx \frac{5,1}{1,25} \times 10^{-7} \approx 4,1 \times 10^{-7}.$$

On réécrit sous la forme utilisée dans les propositions :

$$4,1 \times 10^{-7} = 41 \times 10^{-8} \approx 42 \times 10^{-8}.$$

Réponse Q25

$$q \approx 42 \times 10^{-8}$$

La bonne proposition est donc D.

Méthode QCM rapide et maligne

On cherche seulement l'ordre de grandeur. Un atome d'iode a une masse de l'ordre de

$$\frac{125}{6 \times 10^{23}} \sim 2 \times 10^{-22} \text{ g.}$$

Pour $2,5 \times 10^{11}$ atomes :

$$m \sim 5 \times 10^{-11} \text{ g} = 5 \times 10^{-5} \mu\text{g.}$$

Puis

$$q \sim \frac{5 \times 10^{-5}}{125} \sim 4 \times 10^{-7} = 40 \times 10^{-8}.$$

On choisit immédiatement 42×10^{-8} , donc D.

5. Synthèse des réponses et stratégie générale

Question	Résultat essentiel	Réponse
Q23	$t = \ln 3 / \lambda = 1 / 0,05 = 20 \text{ h}$	B
Q24	$100 \mu\text{Ci} = 10^{-4} \text{ Ci} = 3,7 \times 10^6 \text{ Bq} = 3,7 \text{ MBq}$	A
Q25	$q \approx 4,1 \times 10^{-7} \approx 42 \times 10^{-8}$	D

Les trois réflexes à avoir en QCM

1. **Simplifier avant de calculer** : en Q23, A_0 s'élimine immédiatement.
2. **Maîtriser les préfixes** : $\mu = 10^{-6}$, $\text{M} = 10^6$. Cela rend Q24 quasi instantanée.
3. **Utiliser l'ordre de grandeur** : en Q25, le choix correct se repère sans avoir besoin d'une précision excessive.

6. Vérifications indépendantes

Q23 : avec $t = 20 \text{ h}$,

$$e^{-\lambda t} = e^{-0,05 \times 20} = e^{-1} \approx 0,368,$$

très proche de $1/3 \approx 0,333$, l'écart venant de l'approximation fournie $\ln 3 = 1$ au lieu de 1,099.

Q24 : la médecine nucléaire emploie couramment des activités en MBq : quelques MBq pour $100 \mu\text{Ci}$ est cohérent.

Q25 : une injection radioactive contient une masse d'iode extrêmement faible par rapport à une ration alimentaire de $125 \mu\text{g}$, donc $q \ll 1$, ce qui élimine immédiatement les choix gigantesques 42×10^8 et 42×10^9 .

Réponses finales

Q23 = B Q24 = A Q25 = D

Correction détaillée – Q26

Radioactivité : comparaison de deux décroissances exponentielles

Énoncé reconstitué

Dans les explorations de la thyroïde, on dispose d'une source radioactive constituée d'un mélange de deux radioéléments : **iode radioactif 124** et **iode radioactif 125**, d'activités initiales A et B égales et de demi-vies physiques respectives

$$T_1 = 4 \text{ jours}, \quad T_2 = 60 \text{ jours}.$$

On donne :

$$\log_{10}(2) = 0,3 \quad \text{et} \quad \frac{6}{14} = 0,43.$$

Q26. Le temps, en jours, au bout duquel l'activité de l'un des radioéléments sera inférieure à 0,1% de celle de l'autre est :

A. 4300

B. 430

C. 43

D. 4,3

E. Aucune des réponses n'est juste

Idée physique essentielle. L'iode 124 a la demi-vie la plus courte (4 j contre 60 j), donc son activité décroît beaucoup plus vite. Après un certain temps, c'est donc l'activité de l'iode 124 qui devient très petite devant celle de l'iode 125.

1. Loi de décroissance radioactive

Pour un radioélément de demi-vie T , l'activité suit

$$A(t) = A_0 2^{-t/T}.$$

Pour les deux isotopes :

$$A_{124}(t) = A_0 2^{-t/4}, \quad A_{125}(t) = A_0 2^{-t/60},$$

car les activités initiales sont égales.

Le rapport recherché est donc

$$\begin{aligned} \frac{A_{124}(t)}{A_{125}(t)} &= \frac{A_0 2^{-t/4}}{A_0 2^{-t/60}} \\ &= 2^{-t/4+t/60} \\ &= 2^{-t(\frac{1}{4}-\frac{1}{60})}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{60} = \frac{15-1}{60} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{A_{124}(t)}{A_{125}(t)} = 2^{-\frac{7t}{30}}}.$$

2. Traduction exacte de « inférieur à 0,1% »

On a

$$0,1\% = \frac{0,1}{100} = 0,001 = 10^{-3}.$$

La condition est donc

$$\frac{A_{124}(t)}{A_{125}(t)} < 10^{-3},$$

soit

$$2^{-\frac{7t}{30}} < 10^{-3}.$$

À la frontière entre les deux situations, on résout l'égalité

$$2^{-\frac{7t}{30}} = 10^{-3}.$$

3. Calcul complet avec les logarithmes

On applique le logarithme décimal aux deux membres :

$$\log_{10} \left(2^{-\frac{7t}{30}} \right) = \log_{10}(10^{-3}).$$

Donc

$$-\frac{7t}{30} \log_{10}(2) = -3.$$

Avec $\log_{10}(2) = 0,3$:

$$-\frac{7t}{30} \times 0,3 = -3.$$

En simplifiant les signes :

$$\frac{7t}{30} \times 0,3 = 3.$$

D'où

$$t = \frac{3 \times 30}{7 \times 0,3} = \frac{90}{2,1} \approx 42,86 \text{ jours.}$$

Le temps critique est donc environ 42,9 jours. Comme la question demande le temps au bout duquel l'activité est devenue inférieure à 0,1%, la proposition correspondante est

43 jours.

Réponse correcte : C. 43 jours.

4. Méthode QCM la plus rapide

Dans un QCM, il n'est pas nécessaire de recalculer les deux activités séparément. Il faut immédiatement former leur **rapport** :

$$\frac{A_{124}}{A_{125}} = 2^{-t(\frac{1}{4} - \frac{1}{60})} = 2^{-\frac{14t}{60}}.$$

On veut que ce rapport vaille environ 10^{-3} . Or

$$2^{-x} = 10^{-3} \iff x \log_{10} 2 = 3.$$

Avec $\log_{10} 2 = 0,3$:

$$x = \frac{3}{0,3} = 10.$$

Donc il suffit d'imposer

$$\frac{14t}{60} = 10,$$

soit

$$t = 10 \times \frac{60}{14}.$$

Le sujet donne justement

$$\frac{6}{14} = 0,43,$$

donc

$$\frac{60}{14} = 10 \times 0,43 = 4,3.$$

Ainsi

$$t = 10 \times 4,3 = 43 \text{ jours.}$$

Astuce QCM à retenir :

$$\boxed{0,1\% = 10^{-3}}, \quad \boxed{\log_{10} 2 \simeq 0,3}, \quad \boxed{2^{-10} \simeq 10^{-3}}.$$

Donc il faut simplement que l'écart des "nombres de demi-vies" entre les deux isotopes soit environ 10 :

$$t \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{60} \right) \approx 10.$$

Le résultat tombe presque mentalement : $t \approx 43$ jours.

5. Vérification numérique rapide

À $t = 43$ jours :

$$\frac{A_{124}}{A_{125}} = 2^{-\frac{7 \times 43}{30}} = 2^{-10,03} \approx 9,8 \times 10^{-4}.$$

Or

$$9,8 \times 10^{-4} < 10^{-3}.$$

La condition demandée est donc bien satisfaite.

6. Pourquoi les autres réponses sont fausses ?

- **D. 4,3 jours** : facteur 10 trop petit. À ce temps, le rapport n'a diminué que d'environ un facteur 2, très loin de 10^3 .
- **B. 430 jours** : facteur 10 trop grand. À ce temps, l'iode 124 serait immensément plus faible que 0,1% de l'iode 125.

- **A. 4300 jours** : facteur 100 trop grand, totalement incompatible avec les demi-vies données.
- **E** : faux puisque la proposition C correspond au calcul.

Piège classique. Ne pas chercher le temps pour lequel l'iode 124 vaut 0,1% de *sa propre activité initiale*. La question compare l'activité de l'un des isotopes à celle de l'autre *au même instant*. C'est pourquoi il faut utiliser le rapport $A_{124}(t)/A_{125}(t)$.

7. Résumé express

Donnée clé	$T_{124} = 4 \text{ j}, T_{125} = 60 \text{ j}, \text{ activités initiales égales}$
Rapport	$\frac{A_{124}}{A_{125}} = 2^{-t(1/4-1/60)} = 2^{-7t/30}$
Seuil	$0,1\% = 10^{-3}$
Approximation QCM	$2^{-10} \approx 10^{-3}$
Équation rapide	$\frac{14t}{60} = 10$
Résultat	$t \approx 43 \text{ jours}$
Bonne réponse	C

Concours d'Accès aux Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire

Année universitaire 2025–2026 – 19 juillet 2025

Correction détaillée : Q27 à Q31

Ondes électromagnétiques et cinétique chimique

Objectif. Pour chaque QCM : (1) reconstruire le raisonnement complet, (2) justifier pourquoi les autres choix sont faux, puis (3) donner la stratégie la plus courte utilisable le jour du concours.

Énoncé utile

Q27–Q28. Une source lumineuse émet dans le vide une radiation de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$. On donne $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Dans un milieu transparent, la longueur d'onde devient $\lambda = 400 \text{ nm}$.

Q29. La vitesse d'une transformation chimique est définie comme :

- A. le rapport entre la masse du produit formé et le temps écoulé ;
- B. la somme des concentrations des réactifs ;
- C. la variation de température durant la réaction ;
- D. le rapport entre la variation de la quantité de matière et le temps écoulé ;
- E. aucune proposition n'est correcte.

Q30. Une augmentation de température lors d'une réaction chimique lente a pour effet principal d'augmenter la vitesse de la réaction.

Q31. Le rôle principal d'un catalyseur est d'accélérer une réaction sans être consommé globalement.

Q27 – Fréquence de la radiation dans le vide

1. Relation fondamentale

Pour une onde électromagnétique dans le vide,

$$c = \lambda_0 f$$

d'où

$$f = \frac{c}{\lambda_0}.$$

Il faut impérativement exprimer la longueur d'onde en mètres :

$$600 \text{ nm} = 600 \times 10^{-9} \text{ m} = 6,00 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Donc

$$f = \frac{3,00 \times 10^8}{6,00 \times 10^{-7}} = \frac{3,00}{6,00} \times 10^{8-(-7)} = 0,5 \times 10^{15} = 5,0 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Q27 : réponse A – $f = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

2. Pourquoi les autres unités proposées sont fausses

La valeur numérique 5×10^{14} n'a de sens ici qu'en hertz. Si on écrivait 5×10^{14} kHz, cela vaudrait 5×10^{17} Hz ; en MHz, 5×10^{20} Hz ; en GHz, 5×10^{23} Hz.

Méthode QCM express. Retenir $600 \text{ nm} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}$. Alors $3 \times 10^8 / (6 \times 10^{-7}) = (3/6) \times 10^{15} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$. En moins de 15 secondes, la réponse A est identifiée.

Piège à éviter. Ne pas diviser 3×10^8 directement par 600 : les nanomètres doivent être convertis en mètres.

Q28 – Indice du milieu transparent

1. Ce qui change et ce qui ne change pas

Lorsqu'une radiation passe du vide à un milieu transparent, sa **fréquence reste la même**. En revanche, sa célérité et sa longueur d'onde changent.

Dans le vide :

$$c = \lambda_0 f.$$

Dans le milieu d'indice n :

$$v = \lambda f, \quad n = \frac{c}{v}.$$

Comme f est invariant,

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 f}{\lambda f} = \boxed{\frac{\lambda_0}{\lambda}}.$$

On utilise les deux longueurs d'onde :

$$n = \frac{600}{400} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Q28 : réponse D – $n = 1,5$.

2. Vérification physique

Un milieu transparent ordinaire a généralement $n > 1$. La longueur d'onde doit donc diminuer par rapport au vide : $400 \text{ nm} < 600 \text{ nm}$, ce qui est parfaitement cohérent avec $n = 1,5$.

Méthode QCM express. Dès que l'on voit $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et $\lambda = 400 \text{ nm}$: $n = \lambda_0/\lambda = 600/400 = 1,5$. Aucun besoin de recalculer f ni v .

Piège à éviter. Le rapport est λ_0/λ , pas λ/λ_0 . Le choix 0,66 correspond précisément au rapport inversé $400/600$.

Q29 – Définition de la vitesse d'une transformation chimique

1. Idée physique

Une transformation est d'autant plus rapide que les quantités de matière des réactifs diminuent, ou que celles des produits augmentent, fortement pendant un temps court.

Dans une écriture élémentaire, on peut considérer une vitesse moyenne liée à une variation de quantité de matière :

$$v_{\text{moy}} \propto \frac{\Delta n}{\Delta t}.$$

Plus rigoureusement, en cinétique chimique, on introduit l'avancement ξ :

$$v = \frac{d\xi}{dt},$$

et, pour une vitesse volumique,

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}.$$

Normalement c'est la bonne relation car divisée par le volume et la bonne réponse doit être E

Parmi les propositions du QCM, la formulation correspondant à cette idée est donc la proposition D : *rapport entre la variation de la quantité de matière et le temps écoulé.*

Q29 : réponse D.

2. Élimination rapide des autres choix

- **A : faux.** Une masse de produit divisée par un temps peut définir un débit massique dans un contexte particulier, mais ce n'est pas la définition générale de la vitesse de transformation.
- **B : faux.** Une somme de concentrations décrit un état du système, pas sa rapidité d'évolution.
- **C : faux.** Une variation de température peut accompagner une réaction, mais elle ne définit pas sa vitesse.
- **D : juste.** C'est la seule proposition fondée sur une variation chimique divisée par un intervalle de temps. Attention à l'expression de la vitesse dont vous vous êtes convenu en cours! Normalement la vitesse est en mole par unité de temps et unité de volume et la bonne réponse est E.

Méthode QCM express. Chercher immédiatement une expression du type « variation / temps ». Une vitesse est toujours liée à un changement par unité de temps. La seule proposition de cette forme pertinente est D.

Q30 – Effet de la température sur une réaction lente

1. Explication microscopique

Une réaction chimique nécessite des collisions efficaces entre particules. Pour qu'une collision soit efficace, les réactifs doivent notamment disposer d'une énergie suffisante pour franchir la barrière d'énergie d'activation E_a .

Lorsque la température augmente :

- l'agitation thermique augmente ;
- les collisions deviennent plus fréquentes et surtout plus énergétiques ;
- la fraction des particules ayant une énergie supérieure à E_a augmente ;
- la constante de vitesse k augmente.

La loi d'Arrhenius résume ce dernier point :

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right).$$

Quand T augmente, $-E_a/(RT)$ devient moins négatif ; donc k augmente et la réaction est plus rapide.

Q30 : réponse D – l'augmentation de température augmente la vitesse de la réaction.

2. Pourquoi les autres propositions sont incorrectes

- **A : faux.** Chauffer ne transforme pas automatiquement une réaction en réaction exothermique ; le caractère exothermique dépend du bilan énergétique de la réaction.
- **B : faux.** La température ne change pas l'équation stoechiométrique de la réaction considérée.
- **C : faux.** Une constante d'équilibre ne devient pas nulle par simple chauffage. Elle peut varier avec la température, mais elle reste une grandeur positive.
- **D : juste.**

Méthode QCM express. Pour un QCM de cinétique au niveau concours : « température $\uparrow$ » $\Rightarrow$ « agitation $\uparrow$ » $\Rightarrow$ « collisions efficaces $\uparrow$ » $\Rightarrow$ « vitesse $\uparrow$ ». Réponse D sans calcul.

Q31 – Rôle principal d'un catalyseur

1. Définition

Un catalyseur fournit un chemin réactionnel alternatif dont l'énergie d'activation est plus faible :

$$E_{a,\text{cat}} < E_{a,\text{sans cat}}.$$

Il augmente donc la constante de vitesse et accélère l'établissement de l'équilibre.

Il peut intervenir dans des étapes élémentaires, mais il est régénéré au cours du mécanisme : il n'est donc **pas consommé globalement** par la transformation.

Q31 : réponse C – accélérer une réaction sans être consommé.

2. Ce qu'un catalyseur ne fait pas

- Il ne modifie pas les concentrations à l'équilibre : il accélère les réactions directe et inverse.
- Il ne transforme pas « un produit en réactif » comme rôle général.

- Il ne modifie pas la constante d'équilibre K , qui dépend de la température et de la thermodynamique, pas du catalyseur.

Méthode QCM express. Mot-clé à reconnaître : « catalyseur » = « accélère » + « régénéré ». Dès que la proposition C apparaît, elle est quasiment immédiate.

Piège à éviter. Ne pas confondre vitesse et équilibre. Un catalyseur permet d'atteindre l'équilibre plus vite, mais ne déplace pas la position de l'équilibre.

Synthèse ultra-rapide pour le concours

Question	Réponse	Raccourci décisif
Q27	A	$f = c/\lambda_0 = 3 \times 10^8 / (600 \times 10^{-9}) = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$.
Q28	D	Fréquence inchangée : $n = \lambda_0/\lambda = 600/400 = 1,5$.
Q29	D	Une vitesse est une variation d'une grandeur chimique par unité de temps.
Q30	D	$T \uparrow \Rightarrow$ collisions efficaces $\uparrow \Rightarrow$ vitesse $\uparrow$.
Q31	C	Catalyseur : abaisse E_a , accélère la réaction, est régénéré.

Réponses finales :

Q27=A

Q28=D

Q29=D

Q30=D

Q31=C.

Les cinq réflexes à retenir

1. Toujours convertir les nanomètres en mètres avant d'utiliser $c = \lambda f$.
2. Lors d'un changement de milieu, la fréquence ne change pas ; $n = \lambda_0/\lambda$.
3. En cinétique, penser systématiquement « variation par unité de temps ».
4. Une température plus élevée augmente en général la vitesse d'une réaction.
5. Un catalyseur modifie la cinétique, pas la position de l'équilibre thermodynamique.

Correction détaillée - Q32 à Q36

Équilibres chimiques, spontanéité et principe de Le Chatelier

Méthode complète + raccourcis QCM

Réponses finales :

Q32 = C

Q33 = B

Q34 = B

Q35 = C

Q36 = C

Q32 - Transformation non totale

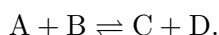
Énoncé : Une transformation est dite non totale lorsque :

- A. La réaction est très rapide.
- B. Tous les produits sont convertis en réactifs.
- C. Les réactifs et produits coexistent à l'équilibre.
- D. La température ne varie pas.
- E. Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

Idée fondamentale

Une transformation **totale** consomme pratiquement le réactif limitant jusqu'à son épuisement. Une transformation **non totale** s'arrête à un état d'équilibre où la réaction directe et la réaction inverse ont la même vitesse macroscopique. Les réactifs ne disparaissent donc pas entièrement : **réactifs et produits coexistent**.

On peut schématiser une transformation réversible par



Au départ, la réaction directe domine. À mesure que les produits se forment, la réaction inverse devient possible. À l'équilibre :

$$v_{\text{directe}} = v_{\text{inverse}}.$$

Cela ne signifie pas que les réactions sont arrêtées : l'équilibre est **dynamique**. Les concentrations deviennent constantes à l'échelle macroscopique, mais les transformations microscopiques continuent.

Conclusion Q32

La proposition correcte est **C** : les **réactifs et les produits coexistent à l'équilibre**.

Méthode QCM ultra-rapide

Dès que vous lisez « transformation non totale », traduisez mentalement par : **équilibre chimique atteint avant disparition complète des réactifs**. La seule réponse parlant de coexistence réactifs/produits est C.

Pourquoi les autres réponses sont fausses ?

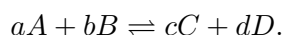
- A : la rapidité concerne la *cinétique*, pas le caractère total ou non total.
- B : ce serait une transformation poussée totalement dans le sens inverse, ce qui n'est pas la définition.
- D : la constance de température ne définit pas le caractère total.
- E : inutile puisque C est correcte.

Q33 - Interprétation d'une constante d'équilibre élevée

Énoncé : Une constante d'équilibre K élevée signifie que :

- A. La réaction est lente.
- B. La réaction favorise les produits à l'équilibre.
- C. Les réactifs sont en grande quantité.
- D. Le système est irréversible.
- E. Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

Considérons de manière générale :



À température donnée, la constante d'équilibre s'écrit, dans un modèle simple en concentrations :

$$K = \frac{[C]^c [D]^d}{[A]^a [B]^b}.$$

Si $K \gg 1$, le numérateur est favorisé par rapport au dénominateur à l'équilibre. Autrement dit, l'état d'équilibre contient relativement beaucoup de produits par rapport aux réactifs.

Attention : thermodynamique $\neq$ cinétique

K décrit la **position de l'équilibre**. Il ne dit rien sur la vitesse à laquelle l'équilibre est atteint. Une réaction peut avoir un K énorme et être extrêmement lente.

On peut aussi relier K à l'énergie libre standard :

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K.$$

Si $K > 1$, alors $\ln K > 0$ et donc $\Delta_r G^\circ < 0$: le sens direct est thermodynamiquement favorisé dans les conditions standard. Pour $K \gg 1$, cette tendance est forte.

Conclusion Q33

La bonne réponse est **B** : la réaction favorise les produits à l'équilibre.

Méthode QCM la plus rapide

Retenir une règle visuelle :

$$K \gg 1 \Rightarrow \text{produits favorisés}, \quad K \ll 1 \Rightarrow \text{réactifs favorisés}.$$

Donc B immédiatement.

Pièges

- A : confond constante d'équilibre et vitesse.
- C : c'est plutôt l'idée associée à $K \ll 1$.
- D : un équilibre suppose justement la possibilité conceptuelle des deux sens ; K élevé ne rend pas la réaction « irréversible ».
- E : B est correcte.

Q34 - Déplacement d'un équilibre perturbé

Énoncé : Le déplacement de l'équilibre chimique d'un système soumis à une perturbation est prédit par :

- A. La loi de Newton.
- B. Le principe de le Chatelier.

- C. La règle du moment cinétique.
- D. La loi de l'électroneutralité.
- E. Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

Principe de Le Chatelier

Lorsqu'un système à l'équilibre subit une perturbation (variation de concentration, de pression/volume pour les gaz, ou de température), il évolue dans le sens qui **tend à s'opposer à l'effet de cette perturbation** et atteint un nouvel équilibre.

Exemples : ajouter un réactif favorise généralement le sens qui le consomme ; retirer un produit favorise le sens qui le reforme ; comprimer un système gazeux favorise le côté comportant le moins de moles gazeuses ; une hausse de température favorise le sens endothermique.

Conclusion Q34

La bonne réponse est **B** : le **principe de Le Chatelier**.

Méthode QCM ultra-rapide

Le mot-clé est « **équilibre soumis à une perturbation** ». C'est presque la formulation exacte du principe de Le Chatelier. Réponse B sans calcul.

Q35 - Spontanéité d'une réaction exothermique

Énoncé : Une réaction chimique exothermique évolue spontanément dans le sens direct si :

- A. $\Delta H^\circ = 0$
- B. $\Delta S^\circ < 0$
- C. $\Delta H^\circ < 0$ ET $\Delta S^\circ > 0$
- D. $\Delta H^\circ > 0$ ET $\Delta S^\circ < 0$
- E. Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

La spontanéité thermodynamique à température et pression constantes est gouvernée par l'énergie libre de Gibbs :

$$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ.$$

Une évolution spontanée dans le sens direct correspond à

$$\Delta G^\circ < 0.$$

Pour une réaction exothermique :

$$\Delta H^\circ < 0.$$

Si, de plus,

$$\Delta S^\circ > 0,$$

alors

$$-T\Delta S^\circ < 0$$

pour toute température absolue $T > 0$. On additionne donc deux termes négatifs :

$$\Delta G^\circ = (\text{négatif}) + (\text{négatif}) < 0.$$

Le sens direct est alors spontanément favorisé pour toute température dans ce cadre thermodynamique standard.

Conclusion Q35

La réponse correcte est **C** :

$$\Delta H^\circ < 0 \quad \text{et} \quad \Delta S^\circ > 0.$$

Méthode QCM la plus maligne

Chercher la combinaison qui rend *certainement* $\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$ négatif :

- $\Delta H^\circ < 0$: premier terme favorable ;
- $\Delta S^\circ > 0$: $-T\Delta S^\circ < 0$, deuxième terme favorable.

Les deux poussent dans le même sens : C.

Analyse des distracteurs

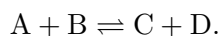
- A : $\Delta H^\circ = 0$ contredit l'information « exothermique ».
- B : $\Delta S^\circ < 0$ seul ne permet pas de conclure ; dans ce cas $-T\Delta S^\circ > 0$, et la température devient déterminante.
- D : $\Delta H^\circ > 0$ décrit une réaction endothermique et $\Delta S^\circ < 0$ rend les deux termes défavorables.
- E : C est correcte.

Q36 - Ajout d'un produit à l'équilibre

Énoncé : Soit un équilibre chimique dans une solution S. On rajoute l'un des produits.

- A. Pas de déplacement d'équilibre.
- B. L'équilibre se déplace vers la droite.
- C. L'équilibre se déplace vers la gauche.
- D. Le déplacement de l'équilibre ne dépend pas des concentrations des produits.
- E. Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

Prenons :



Le quotient réactionnel peut s'écrire :

$$Q_r = \frac{[C][D]}{[A][B]}.$$

À l'équilibre initial :

$$Q_r = K.$$

Si l'on ajoute un produit, par exemple C , le numérateur augmente immédiatement, donc :

$$Q_r > K.$$

Pour revenir vers $Q_r = K$, le système doit consommer une partie des produits et reformer des réactifs : l'évolution spontanée se fait donc vers le sens inverse, c'est-à-dire **vers la gauche**.

Conclusion Q36

La bonne réponse est : l'équilibre se déplace vers la gauche.

Méthode QCM express

Le Chatelier : **on ajoute un produit** $\Rightarrow$ le système cherche à le consommer $\Rightarrow$ déplacement vers les réactifs $\Rightarrow$ **gauche**. Donc C.

Synthèse générale - ce qu'il faut retenir pour le concours

Question	Réflexe QCM	Réponse
Q32	Non totale $\Rightarrow$ équilibre $\Rightarrow$ coexistence réactifs/produits.	C
Q33	$K \gg 1 \Rightarrow$ produits favorisés ; ne rien conclure sur la vitesse.	B
Q34	Équilibre + perturbation $\Rightarrow$ principe de Le Chatelier.	B
Q35	$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$; négatif garanti si $\Delta H^\circ < 0$ et $\Delta S^\circ > 0$.	C
Q36	Ajouter un produit $\Rightarrow$ déplacement dans le sens qui le consomme $\Rightarrow$ gauche.	C

Les 5 réflexes à mémoriser

1. **Équilibre chimique** : état dynamique, pas arrêt des réactions.
2. K renseigne sur la composition à l'équilibre, pas sur la vitesse.
3. **Le Chatelier** prédit qualitativement la réponse à une perturbation.
4. **Spontanéité** : regarder le signe de $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$.
5. **Ajout d'une espèce** : le système évolue dans le sens qui tend à la consommer.

Réponses finales à cocher

Q32 : C

Q33 : B

Q34 : B

Q35 : C

Q36 : C

Correction détaillée – Chimie

Concours d'Accès aux Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire

Questions Q37 à Q42 – méthodes complètes et raccourcis QCM

Réponses finales

Question	Q37	Q38	Q39	Q40	Q41	Q42
Réponse	E	D	E	A	C	A

Données à extraire immédiatement de l'énoncé

À 25°C :

$$K_e = 10^{-14}, \quad C_1 = C_2 = 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}, \quad \text{pH}(S_1) = 11,3, \quad pK_{A2}(\text{HCOOH}/\text{HCOO}^-) = 3,74.$$

Pour la deuxième partie :

$$V_A = 30 \text{ mL}, \quad V_B = 40 \text{ mL}, \quad C_A = C_B = 2 \times 10^{-1} \text{ mol L}^{-1}.$$

Deux réflexes essentiels

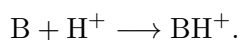
1. Une base de Brønsted *capte* un proton H^+ ; un acide de Brønsted *cède* un proton.
2. Dans un QCM de chimie, avant tout calcul long, vérifier les définitions, les ordres de grandeur, les coefficients stœchiométriques et les espèces spectatrices.

Q37 – Nature de la méthylamine et définition de Brønsted

Question. Parmi les propositions, laquelle est juste ?

1. Élimination par définition

Une base de Brønsted est une espèce chimique capable de **capter** un proton :



Les propositions A et B disent au contraire qu'une base est susceptible de *céder* un proton : elles décrivent le comportement d'un acide. Donc A et B sont fausses.

Une solution basique vérifie

$$[\text{OH}^-] > [\text{H}_3\text{O}^+],$$

et non l'inégalité inverse donnée en C. Donc C est fausse.

2. La méthylamine est-elle forte ou faible ?

Dans S_1 , $C_1 = 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$ et $\text{pH} = 11,3$. Ainsi

$$\text{pOH} = 14 - 11,3 = 2,7,$$

puis, avec la donnée $10^{-2,7} = 2 \times 10^{-3}$,

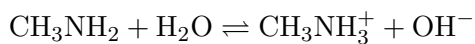
$$[\text{OH}^-] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.$$

Si la méthylamine était une base forte monobasique à la concentration $10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$, on aurait pratiquement

$$[\text{OH}^-] \simeq 10^{-2} \text{ mol L}^{-1},$$

soit un pH voisin de 12. Or on ne trouve que $2 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}$ d'ions hydroxyde : seule une fraction de la méthylamine a réagi avec l'eau.

La réaction



est donc limitée : la méthylamine est une **base faible**.

Conclusion Q37

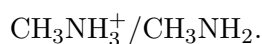
Q37 : E – La méthylamine CH_3NH_2 est une base faible.

Méthode QCM express – Q37

Trois secondes suffisent : **base** = **capte** H^+ ; solution basique = $[\text{OH}^-] > [\text{H}_3\text{O}^+]$; une solution $10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$ de base forte aurait un pH proche de 12, pas 11,3. Il ne reste que **E**.

Q38 – Comparaison des pK_A

Le couple associé à la méthylamine est



On note K_{A1} la constante d'acidité de CH_3NH_3^+ et $pK_{A1} = -\log K_{A1}$.

1. Première élimination immédiate

La proposition A affirme $pK_{A1} = \log K_{A1}$. Or, par définition,

$$\boxed{pK_A = -\log K_A}.$$

A est fausse.

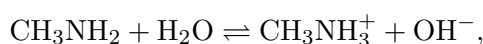
Les expressions B et C ne correspondent pas correctement à l'expression de K_{A1} pour le couple $\text{CH}_3\text{NH}_3^+/\text{CH}_3\text{NH}_2$; il est beaucoup plus sûr, et plus rapide, de calculer pK_{A1} à partir de la basicité de CH_3NH_2 puis de le comparer à $pK_{A2} = 3,74$.

2. Calcul de K_b de la méthylamine

On a déjà obtenu

$$x = [\text{OH}^-] \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.$$

Pour



à l'équilibre :

$$[\text{CH}_3\text{NH}_3^+] \simeq x, \quad [\text{CH}_3\text{NH}_2] \simeq C_1 - x.$$

Donc

$$K_b = \frac{x^2}{C_1 - x} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{10^{-2} - 2 \times 10^{-3}}.$$

Calculons :

$$(2 \times 10^{-3})^2 = 4 \times 10^{-6}, \quad 10^{-2} - 2 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-3},$$

d'où

$$K_b = \frac{4 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-3}} = 0,5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4}.$$

Pour un couple acide/base conjugué :

$$K_{A1}K_b = K_e = 10^{-14}.$$

Ainsi

$$K_{A1} = \frac{10^{-14}}{5 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^{-11}.$$

Puis

$$pK_{A1} = -\log(2 \times 10^{-11}) = 11 - \log 2.$$

Comme $\log 2 \simeq 0,30$,

$$\boxed{pK_{A1} \simeq 10,70}.$$

Or

$$pK_{A2} = 3,74.$$

Donc

$$\boxed{pK_{A1} > pK_{A2}}.$$

Conclusion Q38

$$\text{Q38 : D - } pK_{A1} > pK_{A2}.$$

Méthode QCM express – Q38

Il n'est pas nécessaire d'évaluer pK_{A1} avec une grande précision. Le couple $\text{CH}_3\text{NH}_3^+/\text{CH}_3\text{NH}_2$ a un pK_A voisin de 10–11, alors que l'acide méthanoïque a $pK_A = 3,74$. Donc **D** immédiatement.

Q39 – Mélange méthylamine / acide méthanoïque

On mélange

$$V_1 = 10 \text{ mL de } S_1, \quad V_2 = 30 \text{ mL de } S_2,$$

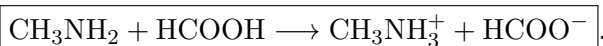
avec $C_1 = C_2 = 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$.

1. Identifier l'échange de proton et lire exactement A

La méthylamine capte un proton et HCOOH le cède :



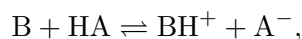
Donc l'équation correcte est



Attention : sur l'énoncé, A imprime CH_3NH_2^+ , et non CH_3NH_3^+ . A n'est donc pas l'équation correcte. B et C comportent elles aussi des espèces incorrectes.

2. Pourquoi la réaction peut-elle être considérée totale ?

Pour une réaction acide-base



on a approximativement

$$K = 10^{pK_A(\text{BH}^+) - pK_A(\text{HA})}.$$

Ici

$$K \simeq 10^{10,70 - 3,74} = 10^{6,96} \gg 1.$$

Le sens direct est donc très fortement favorisé, ce qui justifie l'indication « réaction considérée totale ».

3. Vérification stœchiométrique et élimination de D

Les quantités initiales sont

$$n_1 = C_1 V_1 = 10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-4} \text{ mol},$$

$$n_2 = C_2 V_2 = 10^{-2} \times 30 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-4} \text{ mol}.$$

La réaction est 1 : 1 : la méthylamine est limitante. Elle forme donc

$$n(\text{HCOO}^-) = 10^{-4} \text{ mol}.$$

Le volume final est

$$V_f = 40 \text{ mL} = 4 \times 10^{-2} \text{ L},$$

d'où

$$[\text{HCOO}^-] = \frac{10^{-4}}{4 \times 10^{-2}} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.$$

La proposition D donnerait au contraire

$$\frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{3 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-2}} = 7,5 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1},$$

ce qui correspondrait à compter tout l'acide initial comme ion formiate, ce qui est faux.

Conclusion Q39

Q39 : E – Aucune des propositions ci-dessus n'est correcte.

Méthode QCM express – Q39

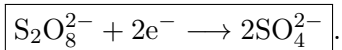
Écrire mentalement la vraie paire conjuguée : CH_3NH_2 capte H^+ et donne CH_3NH_3^+ . Or A imprime CH_3NH_2^+ . A, B et C sont donc fausses ; D est éliminée par la stœchiométrie. Réponse **E**.

Q40 – Équation de la réaction entre $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ et I^-

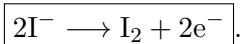
On mélange une solution de peroxydisulfate de sodium et une solution d'iodure de potassium. Les ions Na^+ et K^+ sont des ions spectateurs.

1. Demi-équations électroniques

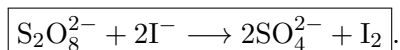
Le peroxydisulfate est réduit :



L'ion iodure est oxydé :



En additionnant et en simplifiant les électrons :



C'est la proposition A.

2. Vérification ultra-rapide des charges

À gauche :

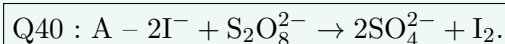
$$-2 + 2(-1) = -4.$$

À droite :

$$2(-2) + 0 = -4.$$

Les charges et les atomes sont équilibrés.

Les propositions B et C font intervenir les ions spectateurs Na^+ ou K^+ comme réactifs rédox : elles sont donc immédiatement suspectes. D correspond au sens inverse de la réaction attendue.

Conclusion Q40**Méthode QCM express – Q40**

Mémoriser le couple oxydant : $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}/\text{SO}_4^{2-}$. Le persulfate oxyde I^- en I_2 . Les ions Na^+ et K^+ sont spectateurs. Donc **A**.

Q41 – Réactif limitant

Données :

$$C_A = C_B = 0,20 \text{ mol L}^{-1}, \quad V_A = 30 \text{ mL}, \quad V_B = 40 \text{ mL}.$$

La réaction est

**1. Quantités initiales**

Pour le peroxydisulfate :

$$n_0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = C_A V_A = 0,20 \times 30 \times 10^{-3} = 6,0 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

Pour l'iodure :

$$n_0(\text{I}^-) = C_B V_B = 0,20 \times 40 \times 10^{-3} = 8,0 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

2. Comparaison stœchiométrique

Il faut 2 moles de I^- pour 1 mole de $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$.

Pour consommer les 6×10^{-3} mol de peroxydisulfate, il faudrait

$$2 \times 6 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

d'iodure. Or il n'y en a que

$$8 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Donc l'iodure s'épuise le premier.

Autre méthode : comparer n_i/ν_i :

$$\frac{n(\text{S}_2\text{O}_8^{2-})}{1} = 6 \times 10^{-3}, \quad \frac{n(\text{I}^-)}{2} = 4 \times 10^{-3}.$$

Le plus petit rapport correspond au réactif limitant : I^- .

Conclusion Q41

Q41 : C – le réactif limitant est I^- .

Méthode QCM express – Q41

Comme les concentrations sont égales, on peut comparer presque directement les volumes en tenant compte des coefficients : $30/1 = 30$ contre $40/2 = 20$. Le plus petit est 20 : c'est donc I^- , réponse **C**. Aucun calcul en moles n'est nécessaire.

Q42 – Évolution de la vitesse de réaction

Les temps sont ordonnés :

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_\infty.$$

On note les vitesses correspondantes

$$V_0, V_1, V_2, V_\infty.$$

1. Idée physique

Au cours de la réaction, les réactifs sont consommés. Leurs concentrations diminuent. Or, pour une réaction chimique ordinaire à température fixée, la vitesse dépend positivement des concentrations des réactifs.

Ainsi, en avançant dans le temps :

$$V_0 > V_1 > V_2 > \dots > V_\infty.$$

Lorsque la transformation est achevée, la vitesse tend vers zéro :

$$V_\infty = 0.$$

2. Analyse des propositions

- A : $V_0 > V_1$: **vrai**.
- B : $V_0 < V_1$: **faux**.
- C : $V_2 > V_1$: **faux**, car la vitesse diminue.
- D : $V_2 < V_\infty$: **faux**, puisque $V_\infty = 0$ et $V_2 > 0$.
- E : $V_0 < V_\infty$: **faux**.

Conclusion Q42

$$\text{Q42 : A - } V_0 > V_1.$$

Méthode QCM express – Q42

Aucune formule : au début, les concentrations des réactifs sont maximales, donc la vitesse est maximale. Elle décroît ensuite jusqu'à 0. Donc la seule relation compatible est $V_0 > V_1$, réponse **A**.

Synthèse ultra-rapide pour le concours

Question	Réponse	Raccourci décisif
Q37	E	Base de Brønsted = capte H^+ ; méthylamine partiellement ionisée donc faible.
Q38	D	$pK_{A1} \approx 10,7$ contre $pK_{A2} = 3,74$.
Q39	E	La vraie réaction forme CH_3NH_3^+ ; A imprime CH_3NH_2^+ . D est aussi fausse.
Q40	A	$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ oxyde I^- en I_2 ; Na^+ et K^+ spectateurs.
Q41	C	Comparer n/ν : 6×10^{-3} contre 4×10^{-3} ; I^- limitant.
Q42	A	La vitesse décroît avec le temps : $V_0 > V_1 > V_2 > V_\infty = 0$.

Réponses : E – D – E – A – C – A

Correction détaillée – Mathématiques

Concours d'Accès aux Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire

Questions Q43 à Q50 – démonstrations complètes et raccourcis QCM

Réponses finales

Question	Q43	Q44	Q45	Q46	Q47	Q48	Q49	Q50
Réponse	C	A	D	B	D	B	D	C

Idée générale pour ce QCM

Ces huit questions sont faites pour être traitées rapidement. Le meilleur réflexe consiste à reconnaître une structure standard avant de calculer : symétrie d'une fonction trigonométrique, dérivée cachée, point fixe d'une suite, identité de module complexe, somme de racines de l'unité, rationalisation, amplitude d'une combinaison sinus-cosinus et simplification d'exponentielles.

Q43 – Intégrale de $|\cos x|$ sur $[0, \pi]$

Énoncé. Soit

$$I = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$$

Quelle est la valeur de I ?

1. Étude du signe de $\cos x$

Sur $[0, \pi/2]$, on a $\cos x \geq 0$, donc

$$|\cos x| = \cos x.$$

Sur $[\pi/2, \pi]$, on a $\cos x \leq 0$, donc

$$|\cos x| = -\cos x.$$

Ainsi

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx.$$

2. Calcul

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1,$$

et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = [-\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = 1.$$

Donc

$$\boxed{I = 2}.$$

Méthode QCM express – Q43

Par symétrie de $|\cos x|$ autour de $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2.$$

Une seule ligne suffit. **Réponse C.**

Q44 – Intégrale avec une dérivée cachée

Énoncé.

$$J = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

1. Reconnaître la bonne dérivée

Calculons la dérivée de

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Par la règle du quotient,

$$g'(x) = \frac{(1)(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

L'intégrande est donc exactement $g'(x)$.

2. Application du théorème fondamental

$$J = \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \left[\frac{1}{2} \right].$$

Méthode QCM express – Q44

Repérer immédiatement

$$\left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Donc $J = \frac{1}{2}$. **Réponse A.**

Piège à éviter – Q44

Ne pas développer $(1+x^2)^2$ ni chercher un changement de variable compliqué : l'exercice est conçu autour d'une dérivée usuelle cachée.

Q45 – Limite de la suite $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ **Énoncé.** $U_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}.$$

On cherche la limite de (U_n) .**1. Montrer que la suite reste dans $[1, 2]$** On a $U_1 = 1 \in [1, 2]$. Supposons $1 \leq U_n \leq 2$. Alors

$$3 \leq 2 + U_n \leq 4,$$

d'où

$$\sqrt{3} \leq U_{n+1} \leq 2.$$

En particulier, $1 \leq U_{n+1} \leq 2$. Par récurrence,

$$\boxed{1 \leq U_n \leq 2 \text{ pour tout } n.}$$

2. Montrer que la suite est croissantePour $x \in [1, 2]$,

$$\sqrt{2+x} \geq x \iff 2+x \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0.$$

Or

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1),$$

et sur $[1, 2]$ on a bien $(x-2)(x+1) \leq 0$. Donc

$$U_{n+1} \geq U_n.$$

La suite est croissante et majorée par 2, donc convergente.

3. Déterminer sa limiteNotons ℓ sa limite. Par continuité de $x \mapsto \sqrt{2+x}$,

$$\ell = \sqrt{2+\ell}.$$

Comme $\ell \geq 0$, on peut élever au carré :

$$\ell^2 = 2 + \ell \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0.$$

Donc $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Mais $\ell \geq 1$, donc

$$\boxed{\ell = 2}.$$

Méthode QCM express – Q45En QCM, on peut aller beaucoup plus vite : si la suite converge vers ℓ , alors

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \Rightarrow \ell \in \{2, -1\}.$$

Comme tous les termes sont positifs, seule $\ell = 2$ est possible. Parmi les choix proposés, c'est immédiatement **D**. La preuve de convergence sert à rendre le raisonnement entièrement rigoureux.**Q46 – Module d'une expression complexe****Énoncé.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq b$ et $|a| = 1$. Calculer

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|.$$

1. Utiliser $|a| = 1$

La condition $|a| = 1$ donne

$$a\bar{a} = |a|^2 = 1.$$

Alors

$$a(1 - \bar{a}b) = a - a\bar{a}b = a - b.$$

Donc

$$a - b = a(1 - \bar{a}b).$$

En prenant les modules,

$$|a - b| = |a| |1 - \bar{a}b| = |1 - \bar{a}b|.$$

Comme $a \neq b$, le dénominateur n'est pas nul : si $1 - \bar{a}b = 0$, alors $b = 1/\bar{a} = a$, contradiction. Ainsi

$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = \frac{|a - b|}{|1 - \bar{a}b|} = \boxed{1}.$$

Méthode QCM express – Q46

Le geste clé est de multiplier mentalement le dénominateur par a :

$$a(1 - \bar{a}b) = a - b$$

car $a\bar{a} = 1$. Les deux modules sont donc égaux. **Réponse B.**

Q47 – Somme trigonométrique et racines de l'unité

Énoncé.

$$C = 1 + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cdots + \cos \frac{9\pi}{5},$$

$$S = \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \cdots + \sin \frac{9\pi}{5},$$

et $z = C + iS$. On cherche z .

1. Regrouper cosinus et sinus

Avec la formule d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Le terme 1 correspond à e^{i0} . Ainsi

$$z = \sum_{k=0}^9 e^{ik\pi/5}.$$

Posons

$$q = e^{i\pi/5}.$$

Alors $q \neq 1$ et

$$q^{10} = e^{i2\pi} = 1.$$

La somme géométrique donne

$$z = 1 + q + q^2 + \cdots + q^9 = \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 0.$$

Donc

$$\boxed{z = 0}.$$

Méthode QCM express – Q47

Les dix nombres $e^{ik\pi/5}$, $k = 0, \dots, 9$, sont les dix racines dixièmes de l'unité. Leur somme vaut 0.

Réponse D.

Lecture géométrique

Les dix nombres complexes sont les sommets d'un décagone régulier centré à l'origine. Leur somme vectorielle est nulle par symétrie.

Q48 – Continuité d'une fonction définie par morceaux

Énoncé.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a la fonction est-elle continue en 0 ?

1. Condition de continuité

Il faut et il suffit que

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

On calcule donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

2. Rationalisation

Multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Pour $x \neq 0$,

$$= \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}.$$

Méthode QCM express – Q48

Expression classique :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Réponse B.

Q49 – Maximum de $\sin x + \cos x$

Énoncé. On cherche la valeur maximale sur $\mathbb{R}$ de

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Méthode 1 – Mise sous forme amplitude-phase

On utilise

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Comme le sinus est au plus égal à 1,

$$f(x) \leq \sqrt{2}.$$

Cette valeur est atteinte lorsque

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

par exemple pour $x = \pi/4$. Ainsi

$$\boxed{\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2}}.$$

Méthode 2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sin x + \cos x = (\sin x, \cos x) \cdot (1, 1).$$

Donc

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

L'égalité est possible pour $\sin x = \cos x = 1/\sqrt{2}$, donc le maximum est bien $\sqrt{2}$.

Méthode QCM express – Q49

Mémoriser la formule : la valeur maximale de $a \sin x + b \cos x$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ici $a = b = 1$, donc $\sqrt{2}$.

Réponse D.

Q50 – Équation exponentielle

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{e^{2x-1}}{\sqrt{e^{2x+4}}} = e^{-x}.$$

1. Simplifier la racine

Comme $e^{2x+4} > 0$,

$$\sqrt{e^{2x+4}} = e^{(2x+4)/2} = e^{x+2}.$$

Ainsi le membre de gauche devient

$$\frac{e^{2x-1}}{e^{x+2}} = e^{(2x-1)-(x+2)} = e^{x-3}.$$

L'équation est donc

$$e^{x-3} = e^{-x}.$$

La fonction exponentielle étant injective,

$$x - 3 = -x.$$

D'où

$$2x = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{3}{2}}.$$

Méthode QCM express – Q50

Tout est dans la règle $\sqrt{e^u} = e^{u/2}$:

$$\frac{e^{2x-1}}{e^{x+2}} = e^{x-3} = e^{-x} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Réponse C.

Piège à éviter – Q50

Ne pas écrire $\sqrt{e^{2x+4}} = e^{2x+2}$. La racine divise tout l'exposant par 2 : $(2x + 4)/2 = x + 2$.

Synthèse ultra-rapide pour le concours

Question	Réponse	Raccourci décisif
Q43	C	$ \cos x $ est symétrique : $2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 2$.
Q44	A	Reconnaître $(x/(1+x^2))'$.
Q45	D	Point fixe : $\ell = \sqrt{2+\ell}$, donc $\ell = 2$ puisque la suite est positive.
Q46	B	$a(1 - \bar{a}b) = a - b$ car $ a = 1$. Les modules sont égaux.
Q47	D	Somme des 10 racines dixièmes de l'unité = 0.
Q48	B	Rationaliser : $(\sqrt{1+x} - 1)/x = 1/(\sqrt{1+x} + 1) \rightarrow 1/2$.
Q49	D	$\max(a \sin x + b \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.
Q50	C	$\sqrt{e^{2x+4}} = e^{x+2}$, puis égalité des exposants.

Réponses à mémoriser

C – A – D – B – D – B – D – C

Correction détaillée – Mathématiques

Concours d'Accès aux Facultés de Médecine, de Pharmacie et de Médecine Dentaire

Questions Q51 à Q56 – démonstrations complètes et raccourcis QCM

Question	Q51	Q52	Q53	Q54	Q55	Q56
Réponse	D	B	B	A	A	C

Idee clé

Le point le plus important est la lecture correcte de Q51 : l'énoncé demande bien

$$P_{\overline{A}}(B) = \mathbb{P}(B \mid \overline{A}),$$

et non $P_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A)$.**Q51 – Probabilité conditionnelle dans une urne**

L'urne contient 9 boules : 5 rouges numérotées de 1 à 5, et 4 noires numérotées de 1 à 4. On tire simultanément deux boules.

On définit :

$$A = \{\text{les deux boules tirées sont de même couleur}\},$$

$$B = \{\text{les deux boules tirées portent un numéro pair}\}.$$

La question demande :

$$P_{\overline{A}}(B) = \mathbb{P}(B \mid \overline{A}).$$

1. Traduire $\overline{A}$ Si A signifie « même couleur », alors

$$\overline{A} = \{\text{les deux boules sont de couleurs différentes}\}.$$

Donc, sous la condition $\overline{A}$, le tirage contient obligatoirement une rouge et une noire.**2. Compter les tirages compatibles avec $\overline{A}$**

Il y a 5 choix pour la boule rouge et 4 choix pour la boule noire :

$$\#(\overline{A}) = 5 \times 4 = 20.$$

Ces 20 couples rouge-noire sont équiprobables.

3. Ajouter la condition B

Pour que les deux numéros soient pairs :

- parmi les rouges $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, les numéros pairs sont 2 et 4 : 2 choix ;
- parmi les noires $\{1, 2, 3, 4\}$, les numéros pairs sont 2 et 4 : 2 choix.

Ainsi,

$$\#(B \cap \overline{A}) = 2 \times 2 = 4.$$

4. Probabilité conditionnelle

Par définition,

$$\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Comme nous travaillons directement dans l'univers réduit $\overline{A}$:

$$\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Q51} = \text{D} : P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{5}}$$

Méthode QCM express

Ne comptez pas les $\binom{9}{2} = 36$ tirages de l'univers complet. Dès que vous voyez $P_{\overline{A}}(B)$, conditionnez mentalement : « couleurs différentes ». Il reste $5 \times 4 = 20$ couples rouge-noire. Les deux numéros pairs donnent $2 \times 2 = 4$ cas. Donc $4/20 = 1/5$ immédiatement.

Q52 – Deux dés : obtenir au moins un 6

On lance deux dés équilibrés à 6 faces et l'on cherche la probabilité d'obtenir *au moins un 6*.

1. Le réflexe : passer par l'événement contraire

L'événement contraire de « au moins un 6 » est « aucun 6 ».

Pour un dé :

$$\mathbb{P}(\text{pas de 6}) = \frac{5}{6}.$$

Les deux lancers étant indépendants :

$$\mathbb{P}(\text{aucun 6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \boxed{\frac{11}{36}}.$$

Conclusion

$$\text{Q52} = B : \frac{11}{36}$$

Méthode QCM express

« Au moins un » $\Rightarrow$ complément. Écrire tout de suite

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

C'est plus court et plus sûr que de compter « exactement un 6 » puis « deux 6 ».

Q53 – Appartenance de $\overrightarrow{AD}$ au plan engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Données :

$$A(1, 1, -2), \quad B(0, 5, 5), \quad C(6, -3, -5), \quad D(1, 2, 0).$$

On cherche s'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

1. Calcul des vecteurs

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4, 7),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (5, -4, -3),$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 1, 2).$$

Ainsi,

$$(0, 1, 2) = x(-1, 4, 7) + y(5, -4, -3).$$

Par identification des coordonnées :

$$\begin{cases} -x + 5y = 0, \\ 4x - 4y = 1, \\ 7x - 3y = 2. \end{cases}$$

2. Résolution rapide

La première équation donne

$$x = 5y.$$

Dans la deuxième :

$$4(5y) - 4y = 1 \iff 16y = 1 \iff y = \frac{1}{16}.$$

Donc

$$x = \frac{5}{16}.$$

Vérification dans la troisième :

$$7 \cdot \frac{5}{16} - 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{35 - 3}{16} = \frac{32}{16} = 2.$$

Le système est compatible.

Conclusion

$$\text{Q53} = \text{B} : x = \frac{5}{16}, \quad y = \frac{1}{16}$$

Méthode QCM express

Utilisez les deux premières coordonnées pour trouver x et y , puis gardez la troisième uniquement comme vérification. Ici $x = 5y$, puis $16y = 1$: le choix B apparaît presque immédiatement.

Q54 – Produit mixte

On a

$$\vec{u} = (1, 2, -1), \quad \vec{v} = (3, 6, -3), \quad \vec{w} = (0, 1, 1),$$

et l'on demande

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Or

$$\vec{v} = 3\vec{u}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Par conséquent,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0},$$

d'où

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{0} \cdot \vec{w} = \boxed{0}.$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Q54} = A : 0}$$

Méthode QCM express

Ne développez surtout pas de déterminant. Voir $\vec{v} = 3\vec{u}$ suffit : colinéarité $\Rightarrow$ produit vectoriel nul $\Rightarrow$ produit mixte nul.

Q55 – Tangente en $O(0, 0)$

La fonction est

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x+e^x}.$$

On cherche l'équation de sa tangente au point $O(0, 0)$.

1. Vérifier que la courbe passe par l'origine

$$f(0) = \frac{\ln 1}{0+e^0} = 0.$$

La tangente est donc de la forme

$$y = f'(0)x.$$

2. Calcul de $f'(0)$

Posons

$$u(x) = \ln(1+x), \quad v(x) = x+e^x.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad v'(x) = 1+e^x.$$

Par la règle du quotient,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

À $x = 0$:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 2.$$

Donc

$$f'(0) = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 2}{1^2} = 1.$$

Ainsi la tangente est

$$\boxed{y = x}.$$

3. Méthode encore plus rapide

Au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x + e^x \longrightarrow 1.$$

Donc

$$f(x) \sim x,$$

ce qui donne directement une pente égale à 1.

Conclusion

$$\boxed{\text{Q55} = \text{A} : y = x}$$

Méthode QCM express

Le dénominateur tend vers 1 et $\ln(1+x) \sim x$. Donc $f(x) \sim x$: la tangente en 0 est immédiatement $y = x$.

Q56 – Partie imaginaire de $(1+i)^{20}$

On considère

$$z = (1+i)^{20}.$$

Méthode 1 : calcul éclair

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$$

Donc

$$(1+i)^{20} = ((1+i)^2)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10}.$$

Or

$$i^{10} = i^8 i^2 = -1.$$

Ainsi

$$z = -2^{10},$$

qui est réel pur. Donc

$$\boxed{\text{Im}(z) = 0}.$$

Méthode 2 : forme trigonométrique

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Alors, par Moivre,

$$(1+i)^{20} = (\sqrt{2})^{20} (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 2^{10}(-1 + 0i) = -2^{10}.$$

Même conclusion.

Conclusion

$$Q56 = C : \operatorname{Im}(z) = 0$$

Méthode QCM express

La voie la plus courte est $(1 + i)^2 = 2i$. Alors $(1 + i)^{20} = (2i)^{10} = -2^{10}$: c'est réel, donc partie imaginaire nulle.

Synthèse ultra-rapide pour le concours

Question	Réponse	Raccourci décisif
Q51	D	Lire correctement $P_{\bar{A}}(B) = P(B \mid \bar{A})$. Sous $\bar{A}$: une rouge + une noire, soit $5 \times 4 = 20$ cas. Numéros pairs : $2 \times 2 = 4$. Donc $1/5$.
Q52	B	« Au moins un 6 » $= 1 - (5/6)^2 = 11/36$.
Q53	B	$\overrightarrow{AB} = (-1, 4, 7)$, $\overrightarrow{AC} = (5, -4, -3)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 2)$; les deux premières coordonnées donnent $x = 5/16$, $y = 1/16$.
Q54	A	$\vec{v} = 3\vec{u}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.
Q55	A	$\ln(1+x) \sim x$ et $x + e^x \rightarrow 1$, donc $f(x) \sim x$: pente 1.
Q56	C	$(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^{20} = (2i)^{10} = -2^{10}$: imaginaire nul.

Réponses finales : $D - B - B - A - A - C$