

Correction détaillée – Ondes électromagnétiques

Questions Q15, Q16 et Q17

Données de l'énoncé

Une source laser de longueur d'onde λ dans le vide éclaire une fente fine horizontale de largeur a . La fente est située à la distance

$$D = 3 \text{ m}$$

de l'écran. La tache centrale de diffraction a une largeur

$$L = 38 \text{ mm} = 38 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,038 \text{ m}.$$

On donne également

$$\frac{3800}{6} = 633, \quad \frac{633}{161} = 3,93.$$

La largeur de la fente est indiquée à la question Q15 :

$$a = 10 \times 10^{-5} \text{ m} = 10^{-4} \text{ m}.$$

1. Idée physique essentielle : diffraction par une fente

Pour une fente de largeur a , le premier minimum de diffraction vérifie

$$a \sin \theta = \lambda.$$

Comme l'angle est très petit, on utilise l'approximation

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta.$$

Sur l'écran, la demi-largeur de la tache centrale vaut

$$x = D \tan \theta \simeq D\theta.$$

Or la largeur totale de la tache centrale est deux fois cette demi-largeur :

$$L = 2x.$$

Donc

$$L \simeq 2D\theta.$$

Et puisque

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{a},$$

on obtient immédiatement la relation fondamentale :

$$L = \frac{2D\lambda}{a}.$$

En isolant a :

$$a = \frac{2D\lambda}{L}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Dès qu'on voit « diffraction par une fente » et « largeur de la tache centrale », il faut penser directement à

$$L = \frac{2D\lambda}{a}.$$

Pour un QCM, il est inutile de refaire toute la démonstration : on isole simplement la grandeur demandée.

Q15 – Relation entre a , D , L et λ

Les propositions sont :

$$\text{A. } a = \frac{\lambda}{L}, \quad \text{B. } a = \frac{2\lambda}{L}, \quad \text{C. } a = \frac{2D}{L}, \quad \text{D. } a = \frac{2\lambda D}{L}.$$

La relation obtenue ci-dessus donne directement

$$a = \frac{2D\lambda}{L}.$$

Donc la bonne réponse est

Réponse finale

$$\text{Q15 : D. } a = \frac{2\lambda D}{L}$$

Vérification ultra-rapide par les unités

La largeur a doit avoir l'unité d'une longueur.

Pour la proposition D :

$$\frac{\lambda D}{L} \sim \frac{\text{m} \times \text{m}}{\text{m}} = \text{m}.$$

Elle est donc dimensionnellement possible.

Pour A et B :

$$\frac{\lambda}{L} \sim \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1,$$

c'est sans dimension, donc impossible pour une largeur.

Pour C :

$$\frac{D}{L} \sim 1,$$

également sans dimension.

Méthode QCM la plus rapide

Encore plus rapide : sans faire de calcul, l'analyse dimensionnelle élimine A, B et C. Il ne reste que D. C'est exactement le genre d'astuce qui fait gagner du temps dans un QCM.

2. Calcul de la longueur d'onde du laser

Cette étape est nécessaire pour Q16 et Q17.

À partir de

$$a = \frac{2D\lambda}{L},$$

on isole λ :

$$\lambda = \frac{aL}{2D}.$$

On remplace par les valeurs en unités SI :

$$a = 10^{-4} \text{ m}, \quad L = 38 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad D = 3 \text{ m}.$$

Donc

$$\lambda = \frac{(10^{-4})(38 \times 10^{-3})}{2 \times 3}.$$

Au numérateur :

$$10^{-4} \times 38 \times 10^{-3} = 38 \times 10^{-7}.$$

Ainsi

$$\lambda = \frac{38 \times 10^{-7}}{6} = \frac{3800}{6} \times 10^{-9} \text{ m.}$$

L'énoncé donne précisément

$$\frac{3800}{6} = 633.$$

Donc

$$\lambda = 633 \times 10^{-9} \text{ m} = 633 \text{ nm}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Le choix des nombres dans l'énoncé est volontaire : la donnée $3800/6 = 633$ permet d'éviter la calculatrice. Il faut repérer cette aide et écrire directement

$$\lambda = 633 \text{ nm.}$$

Q16 – Couleur du rayonnement laser

On vient de trouver

$$\lambda = 633 \text{ nm.}$$

Repères approximatifs du spectre visible :

Couleur	Ordre de grandeur de λ
Violet	380 à 450 nm
Bleu	450 à 495 nm
Vert	495 à 570 nm
Rouge	environ 620 à 750 nm

Or

$$633 \text{ nm}$$

se situe dans le rouge.

Réponse finale

Q16 : D. Rouge

Méthode QCM la plus rapide

À connaître de mémoire pour aller vite : un laser autour de 630 à 650 nm est rouge. Dès qu'on trouve 633 nm, la réponse D est immédiate.

Q17 – Longueur d'onde du laser dans le verre

L'indice du verre est

$$n = 1,61.$$

La fréquence d'une onde électromagnétique ne change pas lorsqu'elle passe d'un milieu à un autre. En revanche, sa célérité devient

$$v = \frac{c}{n}.$$

Comme

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

et puisque f reste constante, la longueur d'onde dans le verre est

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}.$$

Ainsi

$$\lambda' = \frac{633}{1,61} \text{ nm.}$$

Pour exploiter la donnée fournie :

$$\frac{633}{1,61} = \frac{63300}{161}.$$

Or

$$\frac{633}{161} = 3,93,$$

donc

$$\frac{63300}{161} = 393.$$

Par conséquent

$$\lambda' = 393 \text{ nm}.$$

Réponse finale

Q17 : B. 393 nm

Méthode QCM la plus rapide

Méthode éclair : dans un milieu d'indice $n > 1$, la longueur d'onde diminue :

$$\lambda' = \lambda/n.$$

Comme $633/1,61 \approx 393$, la réponse est immédiatement B.

Pièges à éviter

Ne pas confondre :

- la fréquence f , qui reste inchangée lors du passage dans le verre ;
- la célérité v , qui diminue ;
- la longueur d'onde λ , qui diminue elle aussi.

Donc on ne multiplie surtout pas 633 nm par 1,61 ; on divise par l'indice.

Résumé final du QCM

Question	Résultat essentiel	Bonne réponse
Q15	$a = \frac{2\lambda D}{L}$	D
Q16	$\lambda = 633 \text{ nm}$, donc couleur rouge	D
Q17	$\lambda' = \frac{633}{1,61} = 393 \text{ nm}$	B

Stratégie optimale en concours

1. Q15 : utiliser l'analyse dimensionnelle pour éliminer A, B et C. Réponse D en quelques secondes.
2. Calculer ensuite une seule fois λ avec $\lambda = aL/(2D)$: on obtient 633 nm.
3. Q16 : 633 nm correspond au rouge, donc D.
4. Q17 : appliquer $\lambda' = \lambda/n$; avec l'aide numérique de l'énoncé on obtient 393 nm, donc B.

Réponses : Q15 = D, Q16 = D, Q17 = B

Correction détaillée – Mécanique

Questions Q18, Q19 et Q20

Données de l'énoncé :

$$m = 10 \text{ kg}, \quad v_A = 45 \text{ m s}^{-1}, \quad v_B = 5 \text{ m s}^{-1}, \quad AB = 100 \text{ m}.$$

La force de frottement est constante. Sur un plan horizontal, le poids et la réaction normale se compensent verticalement. Il reste donc, suivant l'axe horizontal, une force résultante constante : l'accélération est constante. Le mouvement est donc **rectiligne uniformément varié**.

On choisit l'axe horizontal orienté de A vers B . Dans ce repère :

$$v_A > 0, \quad v_B > 0,$$

mais la vitesse diminue ; l'accélération est donc nécessairement négative.

Q18 – Temps nécessaire pour atteindre B

Question 18

À la date t_B , l'objet passe par le point B . Le temps t_B , exprimé en secondes, est égal à :

A. 4 B. 8 C. 10 D. 15 E. Aucune

Comme l'accélération est constante, la vitesse moyenne entre A et B vaut :

$$v_{\text{moy}} = \frac{v_A + v_B}{2}.$$

Donc :

$$v_{\text{moy}} = \frac{45 + 5}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

Or :

$$AB = v_{\text{moy}} t_B.$$

Ainsi :

$$100 = 25 t_B$$

d'où

$$t_B = 4 \text{ s}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Dès qu'on lit **force constante** $\Rightarrow$ **accélération constante**, on peut utiliser directement :

$$\Delta x = \frac{v_i + v_f}{2} \Delta t.$$

Ici, mentalement :

$$\frac{45 + 5}{2} = 25, \quad 100/25 = 4.$$

La réponse tombe en quelques secondes.

Q18 : réponse A

Q19 – Accélération

Question 19

L'accélération, notée a et exprimée en m s^{-2} , subie par l'objet est :

A. 1000 B. 100 C. 10 D. 1 E. Aucune

On utilise :

$$v_B = v_A + a t_B.$$

On remplace :

$$5 = 45 + 4a.$$

Donc :

$$4a = 5 - 45 = -40,$$

et

$$a = -10 \text{ m s}^{-2}.$$

On retrouve exactement le même résultat avec la relation sans le temps :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a AB.$$

Ainsi :

$$5^2 - 45^2 = 2a \times 100,$$

$$25 - 2025 = 200a,$$

$$-2000 = 200a,$$

$$a = -10 \text{ m s}^{-2}.$$

Point important sur le QCM. Si l'axe est orienté de A vers B , l'accélération algébrique est bien

$$-10 \text{ m s}^{-2}.$$

Or cette valeur n'apparaît pas parmi A, B, C ou D. Une lecture mathématiquement stricte conduirait donc à la réponse **E**.

Cependant, le QCM propose 10 m s^{-2} et la question suivante utilise la **valeur** de la force de frottement. Il est donc presque certain que les auteurs attendent ici la **valeur absolue** (ou le module) de l'accélération :

$$|a| = 10 \text{ m s}^{-2}.$$

Dans l'esprit du QCM :

Q19 : réponse C

Méthode QCM la plus rapide

Après Q18, il suffit de faire mentalement :

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_B} = \frac{5 - 45}{4} = -10.$$

Le mouvement ralentit, donc le signe négatif est normal. Si le QCM ne propose que 10, il vise manifestement le module.

Q20 – Force de frottement

Question 20

La valeur de f , exprimée en newtons et déduite à l'aide de la deuxième loi de Newton, est :

A. 10 B. 100 C. 1000 D. 50 E. Aucune

Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical vers le bas ;
- la réaction normale $\vec{N}$, verticale vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f}$, horizontale et opposée au mouvement.

Comme il n'y a pas d'accélération verticale :

$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}.$$

La résultante horizontale est donc uniquement la force de frottement.

Avec l'axe orienté de A vers B , le frottement est dirigé dans le sens négatif :

$$-f = ma.$$

Or :

$$m = 10 \text{ kg} \quad \text{et} \quad a = -10 \text{ m s}^{-2}.$$

Donc :

$$-f = 10 \times (-10) = -100,$$

d'où :

$$\boxed{f = 100 \text{ N}}.$$

On peut aussi raisonner directement sur les modules :

$$f = m|a| = 10 \times 10 = \boxed{100 \text{ N}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Une fois Q19 trouvée, Q20 est immédiate :

$$\boxed{f = m|a|}.$$

Donc :

$$10 \times 10 = 100 \text{ N}.$$

Aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire.

$\boxed{\text{Q20 : réponse B}}$

Résumé ultra-rapide pour le concours

Question	Calcul éclair	Résultat	Réponse
Q18	$t = \frac{2AB}{v_A + v_B} = \frac{200}{50}$	4 s	$\boxed{\text{A}}$
Q19	$a = \frac{5 - 45}{4}$	-10 m s^{-2} , donc $ a = 10$	$\boxed{\text{C}}$ attendu
Q20	$f = m a = 10 \times 10$	100 N	$\boxed{\text{B}}$

Conclusion : les réponses attendues par le QCM sont $\boxed{\text{Q18 : A, Q19 : C, Q20 : B}}$. Pour Q19, le choix C correspond au module $|a| = 10 \text{ m s}^{-2}$, tandis que l'accélération algébrique vaut -10 m s^{-2} .

Correction détaillée – Radioactivité

Questions Q21 à Q25 – Fluor 18 et ^{18}F -FDG

1. Données essentielles

Pour un échantillon radioactif :

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

La constante radioactive λ et la période radioactive (demi-vie) T sont liées par :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Après n demi-vies :

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dans l'énoncé :

$$A_0 = 200 \text{ MBq}, \quad A(6 \text{ h}) = 25 \text{ MBq},$$

et on donne :

$$2^{10} \simeq 10^3.$$

Cette dernière information est une indication très importante pour le QCM : elle permet de reconnaître immédiatement qu'une réduction au millièème correspond pratiquement à **10 demi-vies**.

Q21 – Demi-vie physique du Fluor 18

Question 21

La demi-vie physique $t_{1/2}$ du Fluor 18, notée T_p , est égale à :

A. 1 h B. 1,5 h C. 2 h D. 2,5 h E. Aucune

On calcule d'abord le rapport entre l'activité finale et l'activité initiale :

$$\frac{A(6h)}{A_0} = \frac{25}{200}.$$

Or :

$$\frac{25}{200} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Donc, en 6 heures, l'activité a subi exactement **trois divisions par deux**.

Autrement dit, 6 heures correspondent à 3 demi-vies :

$$6 = 3T_p.$$

D'où :

$$T_p = \frac{6}{3} = 2 \text{ h}.$$

Ainsi :

$$\text{Q21 : réponse C}$$

Méthode QCM la plus rapide

Ne pas utiliser l'exponentielle ni $\ln 2$.

Il suffit de lire :

$$200 \longrightarrow 100 \longrightarrow 50 \longrightarrow 25.$$

Il y a **3 demi-vies** entre 200 MBq et 25 MBq. Comme cela prend 6 h :

$$T_p = 6/3 = 2 \text{ h}.$$

C'est la méthode la plus rapide de très loin.

Q22 – Nombre de périodes pour atteindre le millième

Question 22

Au bout de combien de périodes physiques l'activité initiale sera-t-elle réduite au millième ?

A. 5 B. 10 C. 50 D. 100 E. Aucune

Après n périodes physiques :

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On souhaite :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}.$$

Il faut donc résoudre :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \simeq 10^{-3}.$$

L'énoncé fournit précisément :

$$2^{10} \simeq 10^3.$$

En inversant :

$$\frac{1}{2^{10}} \simeq \frac{1}{10^3}.$$

Donc :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \simeq 10^{-3}.$$

Ainsi :

$$n = 10.$$

Par conséquent :

Q22 : réponse B

Méthode QCM la plus rapide

La donnée

$$2^{10} \simeq 10^3$$

est quasiment la réponse donnée par l'énoncé.

millième $\Longleftrightarrow$ 10 demi-vies

Aucun logarithme n'est nécessaire.

Q23 – Relation entre période effective, physique et biologique

Dans l'organisme, le ^{18}F -FDG disparaît par **deux mécanismes simultanés** :

- la désintégration radioactive, de constante λ_p ;
- l'élimination biologique, de constante λ_b .

La disparition totale est caractérisée par une constante effective λ_{ef} .

Quand deux mécanismes d'élimination indépendants agissent simultanément, les constantes de disparition s'additionnent :

$$\lambda_{\text{ef}} = \lambda_p + \lambda_b.$$

Or, dans chaque cas :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Donc :

$$\frac{\ln 2}{T_{\text{ef}}} = \frac{\ln 2}{T_p} + \frac{\ln 2}{T_b}.$$

On simplifie par $\ln 2 \neq 0$:

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_b}.$$

Question 23

Le ^{18}F -FDG disparaît de l'organisme selon la période T_{ef} , telle que :

$$\text{C. } \frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_b}$$

Ainsi :

Q23 : réponse C

Méthode QCM la plus rapide

Deux causes indépendantes de disparition agissent **en même temps**.

On additionne donc les **constantes de vitesse** :

$$\lambda_{\text{ef}} = \lambda_p + \lambda_b.$$

Comme $\lambda = \ln 2 / T$, cela donne immédiatement :

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_b}.$$

Attention au piège : les demi-vies ne s'additionnent pas.

Point à retenir

Puisque

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_b},$$

on a forcément :

$$T_{\text{ef}} < T_p \quad \text{et} \quad T_{\text{ef}} < T_b.$$

C'est logique : deux mécanismes d'élimination simultanés font disparaître le produit plus rapidement qu'un seul mécanisme.

Q24 – Calcul de la période biologique T_b

Question 24

Sachant que T_{ef} est d'environ 90 min, la période biologique T_b vaut approximativement :

A. 1 h B. 2 h C. 4 h D. 6 h E. Aucune

Nous avons déjà trouvé :

$$T_p = 2 h.$$

L'énoncé donne :

$$T_{\text{ef}} = 90 \text{ min.}$$

On convertit en heures :

$$90 \text{ min} = \frac{90}{60} h = 1,5 h = \frac{3}{2} h.$$

La relation de Q23 est :

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_b}.$$

Donc :

$$\frac{1}{T_b} = \frac{1}{T_{\text{ef}}} - \frac{1}{T_p}.$$

On remplace :

$$\frac{1}{T_b} = \frac{1}{3/2} - \frac{1}{2}.$$

Or :

$$\frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Donc :

$$\frac{1}{T_b} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}.$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T_b} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Par conséquent :

$$T_b = 6 h.$$

Donc :

Q24 : réponse D

Méthode QCM la plus rapide

Faire mentalement :

$$T_{\text{ef}} = 1,5h, \quad T_p = 2h.$$

Puis :

$$\frac{1}{T_b} = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Donc :

$$T_b = 6h.$$

En QCM, on peut aussi tester directement les choix. Pour $T_b = 6h$:

$$\frac{1}{T_{\text{ef}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

donc

$$T_{\text{ef}} = \frac{3}{2} = 1,5h = 90 \text{ min}.$$

Le choix D est validé instantanément.

Q25 – Temps pour que l'activité soit réduite au millième

Question 25

Lorsque l'activité du patient est réduite au millième, il devient quasiment non irradiant. Au bout de combien de temps cela se produit-il ?

A. 6h B. 12h C. 15h D. 18h E. Aucune

Dans l'organisme, il faut utiliser la **demi-vie effective** :

$$T_{\text{ef}} = 90 \text{ min} = 1,5 h.$$

D'après Q22, une réduction au millième nécessite environ :

$$10 \text{ demi-vies}.$$

Le temps nécessaire vaut donc :

$$t = 10T_{\text{ef}}.$$

Ainsi :

$$t = 10 \times 1,5 = 15 h.$$

Donc :

Q25 : réponse C

Méthode QCM la plus rapide

Réutiliser immédiatement le résultat de Q22 :

millième $\Rightarrow$ 10 périodes.

Ici, la période pertinente est la période **effective** :

$$T_{\text{ef}} = 90 \text{ min.}$$

Donc :

$$10 \times 90 = 900 \text{ min.}$$

Et :

$$900/60 = 15 \text{ h.}$$

Réponse C, sans exponentielle ni logarithme.

Résumé final – réponses du QCM

Question	Calcul ou idée éclair	Réponse
Q21	$200 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 : 3 \text{ demi-vies en } 6 \text{ h, donc } T_p = 2h$	☐ C
Q22	$2^{10} \simeq 10^3 \Rightarrow (1/2)^{10} \simeq 10^{-3}$	☐ B
Q23	$\lambda_{\text{ef}} = \lambda_p + \lambda_b \Rightarrow 1/T_{\text{ef}} = 1/T_p + 1/T_b$	☐ C
Q24	$1/T_b = 1/1,5 - 1/2 = 2/3 - 1/2 = 1/6 \Rightarrow T_b = 6h$	☐ D
Q25	millième = 10 demi-vies ; $10 \times 1,5h = 15h$	☐ C

Q21 : C Q22 : B Q23 : C Q24 : D Q25 : C

Correction détaillée – Électricité

Questions Q26, Q27 et Q28 – Décharge d'un condensateur dans un circuit RC

1. Lecture du montage et données

Le condensateur de capacité

$$C = 0,5 \mu\text{F} = 0,5 \times 10^{-6} \text{ F}$$

a été préalablement chargé par le générateur de f.é.m.

$$E = 100 \text{ V.}$$

La résistance vaut

$$R = 10 \text{ k}\Omega = 10^4 \Omega.$$

À l'instant $t = 0$, on relie l'interrupteur K au point D . Le générateur est alors séparé de la branche contenant le condensateur et la résistance : le condensateur se **décharge à travers R** .

La tension étudiée est U_{AB} , c'est-à-dire la tension aux bornes du condensateur. Initialement,

$$U_{AB}(0) = U_0 = E = 100 \text{ V.}$$

La constante de temps du dipôle RC est

$$\tau = RC.$$

Numériquement,

$$\tau = 10^4 \times 0,5 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} \text{ s} = 5 \text{ ms.}$$

Cette valeur n'est pas indispensable pour répondre aux trois QCM, mais elle confirme l'ordre de grandeur du phénomène.

Point clé de physique

Dès que l'on reconnaît une **décharge libre d'un condensateur dans une résistance**, on peut mémoriser les deux résultats fondamentaux :

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \quad \text{et} \quad U_C(t) = U_0 e^{-t/(RC)}.$$

Les Q26 et Q27 sont donc presque immédiates si ce modèle est reconnu.

Q26 – Équation différentielle

Question 26

L'équation différentielle vérifiée par U_{AB} est :

- A. $\frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0$, B. $\frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = R$,
 C. $RC \frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0$, D. $\frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = C$,
 E. Aucune des affirmations n'est correcte.

Étape 1 – Loi des mailles pendant la décharge

Après basculement de K vers D , la maille de décharge contient seulement le condensateur et la résistance. La loi des mailles donne :

$$U_R + U_{AB} = 0.$$

Étape 2 – Relation courant-tension du condensateur

Pour le condensateur :

$$i = C \frac{dU_{AB}}{dt}.$$

Pour la résistance :

$$U_R = Ri.$$

Donc :

$$U_R = RC \frac{dU_{AB}}{dt}.$$

Étape 3 – Substitution dans la loi des mailles

En remplaçant dans

$$U_R + U_{AB} = 0,$$

on obtient :

$$RC \frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0.$$

Ainsi :

$$RC \frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Q26 : réponse C}}$$

Méthode QCM la plus rapide

On peut éliminer A, B et D sans aucun calcul par **analyse dimensionnelle**.

Le terme U_{AB} est une tension, donc s'exprime en volts. Or dU/dt s'exprime en V/s : on ne peut pas additionner directement dU/dt et U .

En revanche,

$$RC \text{ a la dimension d'un temps,}$$

donc

$$RC \frac{dU}{dt}$$

a bien la dimension d'une tension. La seule équation homogène parmi les propositions est donc la proposition C.

C'est la méthode QCM la plus rapide : **2 à 3 secondes**.

Q27 – Solution de l'équation différentielle

Question 27

En prenant $\tau = RC$, la solution de l'équation différentielle établie en Q26 s'écrit sous la forme :

$$\text{A. } U_{AB} = U_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{B. } U_{AB} = U_0 e^{-\tau/t},$$

$$\text{C. } U_{AB} = U_0 e^{-t/C}, \quad \text{D. } U_{AB} = U_0 e^{-t/R},$$

E. Aucune des affirmations n'est correcte.

À partir de Q26 :

$$RC \frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0.$$

Puisque $\tau = RC$:

$$\tau \frac{dU_{AB}}{dt} + U_{AB} = 0.$$

On isole la dérivée :

$$\frac{dU_{AB}}{dt} = -\frac{1}{\tau} U_{AB}.$$

Si $U_{AB} \neq 0$, on sépare les variables :

$$\frac{dU_{AB}}{U_{AB}} = -\frac{dt}{\tau}.$$

On intègre :

$$\int \frac{dU_{AB}}{U_{AB}} = -\int \frac{dt}{\tau},$$

d'où

$$\ln |U_{AB}| = -\frac{t}{\tau} + K.$$

En exponentiant :

$$U_{AB} = Ae^{-t/\tau}.$$

La condition initiale $U_{AB}(0) = U_0$ donne :

$$U_0 = Ae^0 = A.$$

Par conséquent :

$$U_{AB}(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Q27 : réponse A}}$$

Méthode QCM la plus rapide

Deux contrôles ultra-rapides suffisent :

1. Une décharge doit **décroître** avec le temps : l'exposant doit être négatif.
2. L'exposant d'une exponentielle doit être **sans dimension**. Seul t/τ est sans dimension, car t et τ sont tous deux des temps.

Ainsi B, C et D sont immédiatement éliminées. La réponse A est la seule possible.

Q28 – Tension à l'instant $t = \tau$

Question 28

Pour $t_0 = 0$, $U_{AB} = U_0 = E$. Le calcul de U_{AB} pour $t = \tau$ donne :

- A. $U_{AB} = 36,78 \times 10^{-4} \text{ V}$, B. $U_{AB} = 367,8 \text{ V}$,
 C. $U_{AB} = 36,78 \text{ V}$, D. $U_{AB} = 3,678 \text{ V}$,
 E. Aucune des réponses n'est correcte.

La loi de décharge est :

$$U_{AB}(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

À $t = \tau$:

$$U_{AB}(\tau) = U_0 e^{-\tau/\tau}.$$

Donc :

$$U_{AB}(\tau) = U_0 e^{-1}.$$

Or l'énoncé fournit :

$$e^{-1} = 36,78 \times 10^{-2} = 0,3678.$$

Et :

$$U_0 = E = 100 \text{ V}.$$

Ainsi :

$$U_{AB}(\tau) = 100 \times 0,3678.$$

Donc :

$$U_{AB}(\tau) = 36,78 \text{ V}.$$

Par conséquent :

$$\text{Q28 : réponse C}$$

Méthode QCM la plus rapide

À une constante de temps dans une décharge RC, il faut connaître le résultat classique :

$$U(\tau) = \frac{U_0}{e} \approx 0,37U_0.$$

Ici $U_0 = 100 \text{ V}$, donc mentalement :

$$0,37 \times 100 \approx 37 \text{ V}.$$

Le seul choix voisin est immédiatement C : 36,78 V.

Vérifications physiques utiles

1. Valeur initiale :

$$U_{AB}(0) = U_0 e^0 = U_0 = 100 \text{ V}.$$

Correct.

2. À long terme :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_{AB}(t) = 0.$$

Le condensateur finit par être complètement déchargé. Correct.

3. À $t = \tau$:

$$U(\tau) \approx 0,368U_0.$$

Il reste environ 36,8% de la tension initiale. Correct.

4. Constante de temps :

$$\tau = RC = 5 \text{ ms}.$$

La décharge est donc rapide, ce qui est cohérent avec les valeurs de R et C .

Résumé ultra-rapide pour le concours

Question	Méthode éclair	Réponse
Q26	Décharge RC : $RC \, dU/dt + U = 0$. Analyse dimensionnelle : seule C est homogène.	☐ C
Q27	Décharge exponentielle : $U = U_0 e^{-t/(RC)} = U_0 e^{-t/\tau}$.	☐ A
Q28	À $t = \tau$, $U = U_0/e \approx 0,3678 U_0 = 36,78 \text{ V}$.	☐ C

Correction détaillée - Chimie

Questions Q29 à Q32 - Transformations, équilibre et catalyse

Q29 - Transformation chimique incomplète

Question 29

Une transformation chimique est qualifiée d'incomplète lorsque, à l'état final :

- A. Tous les produits se trouvent à l'état gazeux.
- B. Une partie au moins des réactifs est encore présente dans le système.
- C. La transformation est nécessairement exothermique.
- D. La réaction se déroule en une seule étape élémentaire.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

Idée fondamentale. Une transformation est dite **totale** si le réactif limitant est entièrement consommé à l'état final. À l'inverse, elle est dite **incomplète** si l'avancement final x_f reste inférieur à l'avancement maximal $x_{\max}$:

$$x_f < x_{\max}.$$

Cela signifie qu'à l'état final, il reste encore au moins une partie des réactifs présents dans le mélange.

On peut aussi l'exprimer avec le taux d'avancement final :

$$\tau_f = \frac{x_f}{x_{\max}}.$$

Pour une transformation totale, $\tau_f = 1$. Pour une transformation incomplète :

$$0 < \tau_f < 1.$$

Donc l'affirmation B décrit exactement la situation.

Analyse des autres choix :

- A : l'état physique des produits n'a rien à voir avec le caractère total ou incomplet.
- C : une transformation peut être exothermique ou endothermique ; cela ne définit pas son caractère incomplet.
- D : le nombre d'étapes élémentaires relève du mécanisme réactionnel, pas du taux d'avancement final.
- E : faux puisque B est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

Dans un QCM, associer immédiatement :

transformation incomplète $\iff$ réactifs encore présents à l'état final.

Pas besoin de calcul.

Q29 : réponse B

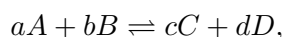
Q30 - Interprétation d'une constante d'équilibre $K \gg 1$

Question 30

Pour une réaction chimique donnée, une constante d'équilibre K nettement supérieure à 1 ($K \gg 1$) traduit le fait que, à l'équilibre :

- A. Les concentrations des réactifs et des produits sont égales.
- B. La réaction s'arrête avant d'atteindre l'état d'équilibre.
- C. La formation des produits est fortement favorisée.
- D. Les réactifs demeurent majoritaires au sein du milieu.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

Pour une réaction générale :



la constante d'équilibre s'écrit, en termes d'activités ou, dans les cas simples, de concentrations :

$$K = \frac{[C]^c [D]^d}{[A]^a [B]^b}.$$

Si $K \gg 1$, le rapport est très grand. Cela signifie que, à l'équilibre, le numérateur est favorisé relativement au dénominateur : le système contient proportionnellement beaucoup de produits par rapport aux réactifs.

Ainsi :

$$K \gg 1 \implies \text{équilibre fortement déplacé vers les produits}.$$

Cela ne signifie pas forcément que les réactifs sont rigoureusement nuls ; cela signifie que la transformation directe est thermodynamiquement très favorisée et que les produits sont majoritaires à l'équilibre.

Analyse des choix :

- A : faux. $K \gg 1$ ne signifie pas égalité des concentrations.
- B : faux. À l'équilibre, le système a précisément atteint son état d'équilibre dynamique.
- C : vrai. C'est l'interprétation directe de $K \gg 1$.
- D : faux. Ce serait plutôt cohérent avec $K \ll 1$.
- E : faux puisque C est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

Mémoriser la règle-éclair :

$$K \gg 1 : \text{produits favorisés} \quad K \ll 1 : \text{réactifs favorisés}.$$

Et $K \approx 1$ signifie qu'aucun côté n'est très fortement favorisé.

Q30 : réponse C

Q31 - Rôle d'un catalyseur

Question 31

Le rôle principal d'un catalyseur dans une transformation chimique est de :

- A. Modifier les coefficients stoechiométriques de l'équation chimique.
- B. Modifier la composition du système à l'état d'équilibre.
- C. Supprimer totalement les réactions secondaires.
- D. Accélérer la transformation en abaissant l'énergie d'activation, sans être consommé lors du bilan global.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

Un catalyseur propose un **mécanisme réactionnel alternatif** dont l'énergie d'activation E_a est plus faible.

Selon la loi d'Arrhenius :

$$k = A e^{-E_a/(RT)}.$$

À température fixée, diminuer E_a augmente le facteur exponentiel, donc augmente la constante de vitesse k : la réaction devient plus rapide.

Le catalyseur est consommé dans certaines étapes intermédiaires puis régénéré dans d'autres. Il n'apparaît donc pas dans l'équation-bilan et n'est pas consommé globalement.

Très important : un catalyseur accélère à la fois la réaction directe et la réaction inverse. Il permet donc d'atteindre l'équilibre plus vite, mais il ne change ni K , ni la composition du mélange à l'équilibre.

Analyse des choix :

- A : faux. Les coefficients stoechiométriques sont imposés par la conservation des éléments et des charges.
- B : faux. Le catalyseur ne déplace pas l'équilibre.
- C : faux. Il peut favoriser certaines voies, mais ne garantit pas la disparition totale des réactions secondaires.
- D : vrai. C'est exactement la définition utile d'un catalyseur.
- E : faux puisque D est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

Repérer les deux mots-clés :

catalyseur $\Rightarrow$ abaisse E_a et n'est pas consommé globalement.

Dès qu'une proposition dit qu'il modifie l'équilibre, elle est fausse.

Pièges à éviter

Le catalyseur ne rend pas une réaction thermodynamiquement plus favorable : il modifie la **cinétique**, pas la valeur de K .

Q31 : réponse D

Q32 - Principe de Le Chatelier

Question 32

L'évolution d'un système chimique soumis à une perturbation (variation de concentration, de pression ou de température) est prévue par :

- A. L'équation de Clapeyron.
- B. Le schéma de Lewis.
- C. Le principe de Le Chatelier.
- D. La loi d'Avogadro.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

Le **principe de Le Chatelier** énonce qu'un système à l'équilibre, soumis à une perturbation, évolue spontanément dans le sens qui tend à **s'opposer à l'effet de cette perturbation**.

Exemples :

- si on ajoute un réactif, le système tend à le consommer : l'équilibre se déplace généralement vers les produits ;
- si on retire un produit, le système tend à en reformer ;
- si on augmente la pression d'un système gazeux, l'évolution est favorisée vers le côté comportant le moins de moles gazeuses ;
- si on augmente la température, le système favorise le sens endothermique, qui absorbe de la chaleur.

Pourquoi les autres propositions sont-elles fausses ?

- A : l'équation de Clapeyron relie principalement les variables d'état d'un gaz parfait, $PV = nRT$; elle ne prévoit pas le déplacement d'un équilibre chimique.
- B : le schéma de Lewis représente les électrons de valence et les liaisons.
- D : la loi d'Avogadro concerne la relation entre quantité de matière et volume des gaz à pression et température données.
- E : faux puisque C est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

Les mots **équilibre + perturbation + concentration/pression/température** doivent déclencher immédiatement :

Le Chatelier.

Aucun calcul n'est nécessaire.

Q32 : réponse C

Résumé ultra-rapide pour le concours

Question	Idée-clé	Réponse
Q29	Incomplète $\Rightarrow$ des réactifs subsistent à l'état final.	B
Q30	$K \gg 1 \Rightarrow$ produits fortement favorisés.	C
Q31	Catalyseur $\Rightarrow$ baisse de E_a , réaction plus rapide, catalyseur régénéré.	D
Q32	Perturbation d'un équilibre $\Rightarrow$ principe de Le Chatelier.	C

Q29 : B Q30 : C Q31 : D Q32 : C

Correction détaillée - Chimie

Questions Q33 à Q35

Q33 - Vitesse volumique de réaction

Question 33

Pour une réaction chimique homogène se déroulant à volume constant, quelle grandeur permet de définir correctement la vitesse volumique de réaction ?

- A. Le rapport des masses molaires des réactifs.
- B. Le rapport entre la concentration finale et la concentration initiale.
- C. La différence entre les quantités de matière à l'équilibre.
- D. La variation de la quantité de matière d'une espèce chimique par unité de temps.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

1. Définition exacte

Pour une transformation chimique décrite par l'avancement ξ , la **vitesse de réaction** est :

$$v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}.$$

Son unité est :

$$\text{mol s}^{-1}.$$

La **vitesse volumique de réaction**, elle, est définie par :

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

où V est le volume du milieu réactionnel.

Son unité est donc :

$$\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$$

si V est exprimé en litres.

Pour une espèce chimique i de coefficient stoechiométrique algébrique ν_i , on a :

$$dn_i = \nu_i d\xi.$$

Donc :

$$\frac{dn_i}{dt} = \nu_i \frac{d\xi}{dt}.$$

Ainsi :

$$v = \frac{1}{\nu_i V} \frac{dn_i}{dt}$$

avec le signe convenable selon que i est un réactif ou un produit.

À volume constant, puisque

$$c_i = \frac{n_i}{V},$$

on peut également écrire :

$$v = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}.$$

2. Analyse des propositions

A. Faux. Le rapport des masses molaires n'a rien à voir avec une vitesse de réaction.

B. Faux. Un rapport de concentrations est sans dimension. Une vitesse volumique doit contenir une variation par unité de temps.

C. Faux. Une différence de quantités de matière ne fait intervenir ni le temps ni le volume.

D. Attention. La grandeur

$$\frac{dn_i}{dt}$$

est bien une variation de quantité de matière par unité de temps, mais son unité est

$$\text{mol s}^{-1}.$$

Ce n'est donc **pas encore une vitesse volumique**. Pour obtenir la vitesse volumique, il faut au minimum diviser par le volume V , et, pour une définition générale à partir d'une espèce, tenir compte du coefficient stoechiométrique.

La proposition D correspond plutôt à une **vitesse de variation de quantité de matière**, et non à la définition rigoureuse de la vitesse volumique.

Par conséquent, si l'on lit le QCM de manière strictement scientifique :

Q33 : réponse E

Point de rigueur important

Il existe ici une petite ambiguïté pédagogique : certains QCM simplifiés peuvent vouloir faire choisir D comme "idée la plus proche". Mais la question demande explicitement la **vitesse volumique**. Le facteur $1/V$ est indispensable.

La définition correcte est :

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

Aucune proposition A-D ne donne cette définition exactement. La réponse rigoureuse est donc E.

Méthode QCM la plus rapide

Regarder les **unités**.

Une vitesse volumique doit avoir une unité du type :

$$\text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}.$$

La proposition D ne donne que :

$$\text{mol s}^{-1}.$$

Il manque le "par unité de volume". Donc D est incomplète et la meilleure réponse rigoureuse est E.

Q34 - Effet d'une élévation modérée de température sur la vitesse

Question 34

Dans les mêmes conditions de pression et de composition, une élévation modérée de la température d'un milieu réactionnel a généralement pour conséquence :

- A. Une décomposition immédiate des produits formés.
- B. Une augmentation systématique du pH du milieu.
- C. Une disparition instantanée des réactifs.
- D. Une augmentation de la vitesse de la transformation chimique.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

1. Explication microscopique

Quand la température augmente, l'agitation thermique des particules augmente.

Les molécules se déplacent en moyenne plus rapidement. Il en résulte :

- davantage de collisions par unité de temps ;
- surtout, une proportion plus grande de collisions possédant une énergie suffisante pour franchir la barrière d'activation.

Une réaction chimique nécessite généralement que les réactifs franchissent une énergie d'activation E_a .

2. Loi d'Arrhenius

La constante de vitesse k est souvent décrite par :

$$k = Ae^{-E_a/(RT)}.$$

Lorsque T augmente, le terme

$$\frac{E_a}{RT}$$

diminue.

Donc :

$$-\frac{E_a}{RT}$$

devient moins négatif et par conséquent :

$$e^{-E_a/(RT)}$$

augmente.

Donc :

$$k \text{ augmente lorsque } T \text{ augmente.}$$

Or la vitesse de réaction dépend de k . Donc, en général :

$$\text{la vitesse de transformation augmente.}$$

Ainsi :

$$\text{Q34 : réponse D}$$

3. Pourquoi les autres réponses sont fausses ?

- A. Faux.** Une hausse modérée de température ne provoque pas nécessairement une décomposition immédiate des produits.
- B. Faux.** Le pH ne monte pas systématiquement avec la température. Son évolution dépend du système chimique.
- C. Faux.** Même si la vitesse augmente, les réactifs ne disparaissent pas instantanément.
- D. Vrai.** C'est l'effet cinétique général attendu.
- E. Faux,** puisque D est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

Pour un QCM de cinétique :

$$\text{température } \uparrow \Rightarrow \text{agitation } \uparrow \Rightarrow \text{collisions efficaces } \uparrow \Rightarrow v \uparrow$$

Il n'est même pas nécessaire d'écrire Arrhenius pour trouver D rapidement.

Q35 - Spontanéité d'une transformation chimique

Question 35

Dans les conditions usuelles, une transformation chimique est spontanément favorisée lorsque :

- A. Elle absorbe de la chaleur tout en s'accompagnant d'une diminution d'entropie.
- B. La variation d'entropie du système est nécessairement nulle.
- C. La température initiale est inférieure à 0°C.
- D. Une réaction spontanée nécessite toujours la présence d'un catalyseur.
- E. Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte.

1. Critère thermodynamique de spontanéité

À température et pression constantes, le critère usuel est basé sur l'énergie libre de Gibbs :

$$\Delta_r G < 0$$

pour une évolution spontanée dans le sens direct.

À l'équilibre :

$$\Delta_r G = 0.$$

Dans le sens non spontané :

$$\Delta_r G > 0.$$

Pour une transformation donnée :

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S.$$

La spontanéité dépend donc conjointement de l'enthalpie ΔH , de l'entropie ΔS et de la température T .

2. Analyse de A

A affirme que la transformation :

- absorbe de la chaleur : $\Delta H > 0$;

— s'accompagne d'une diminution d'entropie : $\Delta S < 0$.

Alors :

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S.$$

Comme :

$$\Delta S < 0,$$

on a :

$$-T\Delta S > 0.$$

Et comme :

$$\Delta H > 0,$$

les deux termes sont positifs :

$$\Delta G = \underbrace{\Delta H}_{>0} + \underbrace{(-T\Delta S)}_{>0} > 0.$$

Donc cette situation est précisément **défavorable** à une évolution spontanée dans le sens direct.

Ainsi A est fausse.

3. Analyse de B

Une transformation spontanée n'exige absolument pas :

$$\Delta S_{\text{système}} = 0.$$

D'ailleurs, la spontanéité ne dépend pas seulement de l'entropie du système. À T et P constantes, on utilise ΔG .

Donc B est fausse.

4. Analyse de C

Le fait que :

$$T < 0^\circ\text{C}$$

ne constitue aucun critère général de spontanéité.

Une réaction peut être spontanée à 100°C , et une autre non spontanée à -20°C .

Donc C est fausse.

5. Analyse de D - piège classique

Un catalyseur **n'a pas pour rôle de rendre une réaction thermodynamiquement spontanée**.

Il diminue l'énergie d'activation et accélère la cinétique, mais il ne modifie pas :

$$\Delta G, \quad K, \quad \text{la position de l'équilibre.}$$

Une réaction peut donc être spontanée sans catalyseur et néanmoins extrêmement lente.

Exemple conceptuel :

$$\text{spontané} \neq \text{rapide.}$$

Donc D est fausse.

Puisque A, B, C et D sont toutes fausses :

Q35 : réponse E

Méthode QCM la plus rapide

Pour une question sur la spontanéité, chercher immédiatement :

$$\Delta G < 0.$$

Aucune proposition ne donne ce critère.

Et élimination ultra-rapide :

- A : endothermique + entropie qui diminue $\Rightarrow$ très défavorable ;
- B : “nécessairement nulle” $\Rightarrow$ faux ;
- C : 0°C n'est pas un critère thermodynamique ;
- D : catalyseur = cinétique, pas spontanéité.

Donc E immédiatement.

Résumé final - réponses du QCM

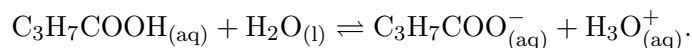
Question	Idée décisive	Réponse
Q33	Une vitesse volumique vaut $v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$. D oublie le facteur $1/V$ et le coefficient stoechiométrique dans la définition générale.	E
Q34	Température plus élevée $\Rightarrow$ davantage de molécules franchissent E_a , donc k et la vitesse augmentent.	D
Q35	Critère : $\Delta G < 0$. A-D ne l'expriment pas et sont toutes fausses.	E

Q33 : E Q34 : D Q35 : E

Correction détaillée - Acide butanoïque

Questions Q36 à Q39

Équilibre étudié :



Données :

$$C = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}, \quad pH = 3,41.$$

On rappelle :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-pH} = 10^{-3,41}.$$

Q36 - Formule développée de l'acide butanoïque

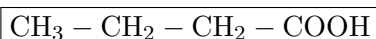
Question 36

La formule développée de l'acide butanoïque est demandée parmi les propositions A à E.

Le nom **butanoïque** indique :

- une chaîne principale de **4 atomes de carbone** ;
- une fonction **acide carboxylique** terminale $-\text{COOH}$.

La formule correcte est donc :



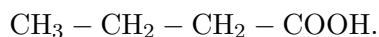
ou, en formule semi-développée :



On compare alors aux propositions visibles sur le QCM :

- A est un acide ramifié de type $(\text{CH}_3)_2\text{CH} - \text{COOH}$: ce n'est pas l'acide butanoïque linéaire ;
- B porte un groupe $\text{HO}-$ supplémentaire à l'extrémité : ce n'est pas l'acide butanoïque ;
- C est ramifié ;
- D est fortement ramifié.

Aucune des structures A à D ne correspond à :



Donc :

Q36 : réponse E

Méthode QCM la plus rapide

Pour un nom comme **acide butanoïque**, compter immédiatement les carbones :

but- = 4 carbones, -oïque = COOH .

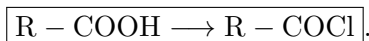
La structure doit être $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$, sans branchement ni autre groupe OH .

Q37 - Réaction avec le chlorure de thionyle

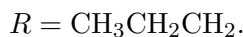
Question 37

L'acide butanoïque réagit avec le chlorure de thionyle SOCl_2 . Quel composé organique est formé ?

Le chlorure de thionyle transforme classiquement un acide carboxylique en **chlorure d'acyle** :



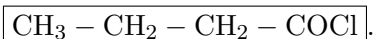
Ici :



Donc :



Le produit attendu est le **chlorure de butanoyle** :



En comparant avec les propositions visibles :

- A est ramifiée ;
- B ne correspond pas à un simple chlorure d'acyle du butanoïque ;
- C comporte un groupe $\text{HO}-$ supplémentaire ;
- D est ramifiée.

Aucune proposition A à D ne représente exactement le chlorure de butanoyle.

Donc :

Q37 : réponse E

Méthode QCM la plus rapide

Réflexe QCM :



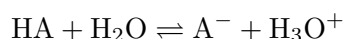
Le squelette carboné **ne change pas**. On remplace seulement le OH du groupe carboxyle par Cl .

Q38 - Effet de l'ajout d'acide butanoïque

Question 38

On rajoute de l'acide butanoïque. Dans quel sens l'équilibre se déplace-t-il ?

L'équilibre est :



avec :



On augmente la concentration d'un **réactif**, ici HA .

D'après le principe de Le Chatelier, le système évolue dans le sens qui tend à **consommer** l'espèce ajoutée.

Il se déplace donc vers la formation de :



C'est donc un déplacement vers la **droite** :

Q38 : réponse C

Méthode QCM la plus rapide

Ajout d'un réactif $\Rightarrow$ l'équilibre se déplace vers le côté qui le consomme :

ajout à gauche $\Rightarrow$ déplacement vers la droite.

Q39 - Calcul du pK_a

Question 39

Déterminer l'expression correcte du pK_a du couple



On pose :



À l'équilibre :

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}]}.$$

1. Concentration en ions oxonium

Le pH vaut 3,41, donc :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-3,41}.$$

Comme l'acide est monoprotique et que l'autoprotolyse de l'eau est négligeable ici :

$$[\text{A}^-] = 10^{-3,41}.$$

La quantité d'acide consommée vaut donc :

$$x = 10^{-3,41}.$$

2. Concentration restante en acide

La concentration initiale est :

$$C = 10^{-2}.$$

À l'équilibre :

$$[\text{HA}] = C - x.$$

Donc :

$$[\text{HA}] = 10^{-2} - 10^{-3,41}.$$

3. Expression de K_a

Ainsi :

$$K_a = \frac{10^{-3,41} \times 10^{-3,41}}{10^{-2} - 10^{-3,41}}.$$

Or :

$$10^{-3,41} \times 10^{-3,41} = 10^{-6,82}.$$

Donc :

$$K_a = \frac{10^{-6,82}}{10^{-2} - 10^{-3,41}}$$

et par définition :

$$pK_a = -\log K_a.$$

Donc :

$$pK_a = -\log \left(\frac{10^{-6,82}}{10^{-2} - 10^{-3,41}} \right)$$

Cette expression correspond à la proposition **D**.

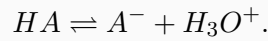
Ainsi :

Q39 : réponse D

Méthode QCM la plus rapide

Le piège principal est le signe au dénominateur.

Pour un acide faible :



Si $x = [H_3O^+]$, alors :

$$[A^-] = x, \quad [HA] = C - x.$$

Donc :

$$K_a = \frac{x^2}{C - x}$$

avec ici :

$$x = 10^{-3,41}.$$

On reconnaît immédiatement :

$$pK_a = -\log \left(\frac{10^{-6,82}}{10^{-2} - 10^{-3,41}} \right)$$

donc D.

Vérification numérique facultative

On peut estimer :

$$10^{-3,41} \approx 3,9 \times 10^{-4}.$$

Donc :

$$K_a \approx \frac{(3,9 \times 10^{-4})^2}{10^{-2} - 3,9 \times 10^{-4}} \approx 1,6 \times 10^{-5}.$$

Ainsi :

$$pK_a \approx 4,8,$$

ce qui est cohérent avec la valeur connue de l'acide butanoïque.

Résumé final - réponses du QCM

Question	Idée décisive	Réponse
Q36	Acide butanoïque = $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COOH}$. Aucune structure A-D ne correspond exactement.	E
Q37	SOCl_2 transforme COOH en COCl , sans modifier le squelette : $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{COCl}$.	E
Q38	Ajout d'un réactif $\Rightarrow$ déplacement dans le sens qui le consomme, donc vers la droite.	C
Q39	$K_a = x^2/(C - x)$ avec $x = 10^{-3,41}$, puis $pK_a = -\log K_a$.	D

Q36 : E	Q37 : E	Q38 : C	Q39 : D
---------	---------	---------	---------

Correction détaillée - Électrolyse

Questions Q40, Q41 et Q42

Données et lecture immédiate de l'énoncé

On électrolyse une solution aqueuse de nitrate de plomb(II) $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ avec :

$$I = 0,85 \text{ A}, \quad \Delta t = 60 \text{ min}, \quad F = 9,65 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}, \quad V_m = 24 \text{ L mol}^{-1}.$$

On observe :

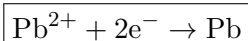
- un **dépôt métallique de plomb** sur l'électrode (A) ;
- un **dégagement de dioxygène** sur l'électrode (B).

Les couples donnés sont :



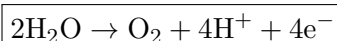
Idée physique essentielle

Le simple fait d'observer du plomb métallique sur A permet de reconnaître immédiatement une **réduction** des ions Pb^{2+} :



Donc A est la **cathode**.

Le dioxygène observé sur B provient de l'**oxydation de l'eau** :



Donc B est l'**anode**.

Q40 - Nature de la transformation

Question 40

L'électrolyse étudiée est une transformation :

A. acide-base B. physique C. forcée D. spontanée E. aucune

1. Pourquoi une électrolyse est-elle une transformation forcée ?

Une électrolyse nécessite l'intervention d'un générateur extérieur qui impose un courant électrique au système. L'énergie électrique fournie par le générateur permet de réaliser une transformation d'oxydoréduction qui ne se produirait pas spontanément dans ce sens dans les conditions considérées.

On dit donc que l'électrolyse est une transformation :

forcée

Ainsi :

Q40 : réponse C

2. Élimination rapide des autres choix

- **A faux** : il ne s'agit pas d'une réaction acide-base mais d'une oxydoréduction.
- **B faux** : de nouvelles espèces chimiques sont formées (Pb et O₂) ; la transformation est donc chimique.
- **C vrai** : le générateur fournit l'énergie nécessaire.
- **D faux** : dans le sens imposé par l'électrolyseur, la transformation n'est pas spontanée.
- **E faux** : puisque C est correcte.

Méthode QCM la plus rapide

En QCM, le mot **électrolyse** doit déclencher immédiatement :

électrolyse = transformation forcée

La question Q40 peut être répondue en une ou deux secondes.

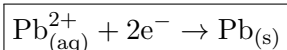
Q41 - Identification de l'anode et de la cathode

Question 41

Pendant cette électrolyse, quelle proposition est correcte ?

1. Électrode A : dépôt de plomb

L'énoncé indique qu'un dépôt de plomb métallique apparaît sur A. Pour former Pb_(s) à partir de Pb²⁺, il faut gagner des électrons :



Il s'agit d'une **réduction**.

Or, par définition :

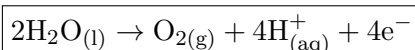
réduction à la cathode

Donc :

A = cathode.

2. Électrode B : dégagement de dioxygène

À B, du dioxygène se forme. L'eau est oxydée selon :



Il s'agit d'une **oxydation**.

Or :

oxydation à l'anode

Donc :

B = anode.

3. Analyse des propositions

- **A : faux.** B est bien l'anode, mais à l'anode se produit une *oxydation*, pas une réduction.
- **B : faux.** B n'est pas la cathode : c'est l'anode.
- **C : faux.** A n'est pas l'anode ; de plus le plomb ne s'y oxyde pas, il s'y forme par réduction.

- **D : vrai.** A est la cathode et les ions Pb^{2+} y sont réduits.
- **E : faux.** D est correcte.

Ainsi :

Q41 : réponse D

Méthode QCM la plus rapide

Deux moyens ultra-rapides :

1. **Dépôt métallique** $\Rightarrow$ gain d'électrons $\Rightarrow$ réduction $\Rightarrow$ cathode.
 2. Mnémonique : **AnOx / RedCat** : *ANode = OXydation ; REDuction = CAThode.*
- Ici, « dépôt de Pb sur A » suffit pour choisir D sans calcul.

Q42 - Volume de dioxygène formé

Question 42

Le volume $v(\text{O}_2)$ de dioxygène formé pendant Δt est :

A. 0,0079 L B. 0,19 L C. 0,0079 mL D. 0,19 mL E. 0,0013 mL

Étape 1 - Convertir la durée en secondes

La charge électrique s'écrit :

$$Q = I \Delta t.$$

Comme I est en ampères (coulombs par seconde), il faut exprimer le temps en secondes :

$$\Delta t = 60 \text{ min} = 60 \times 60 = 3600 \text{ s.}$$

Étape 2 - Calcul de la charge ayant traversé l'électrolyseur

$$Q = 0,85 \times 3600.$$

Donc :

$$Q = 3060 \text{ C.}$$

Étape 3 - Quantité de matière d'électrons

Une mole d'électrons transporte une charge de Faraday F . Donc :

$$n(e^-) = \frac{Q}{F}.$$

Ainsi :

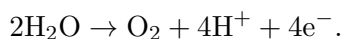
$$n(e^-) = \frac{3060}{9,65 \times 10^4}.$$

On obtient :

$$n(e^-) \simeq 3,17 \times 10^{-2} \text{ mol.}$$

Étape 4 - Relation stoechiométrique avec le dioxygène

À l'anode :



Cette équation montre que :

$$4 \text{ mol } \text{e}^- \longleftrightarrow 1 \text{ mol } \text{O}_2.$$

Donc :

$$n(\text{O}_2) = \frac{n(\text{e}^-)}{4}.$$

D'où :

$$n(\text{O}_2) = \frac{3,17 \times 10^{-2}}{4} \simeq 7,93 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

Ainsi :

$$n(\text{O}_2) \simeq 0,0079 \text{ mol}.$$

Étape 5 - Passage de la quantité de matière au volume

On utilise :

$$V = nV_m.$$

Avec $V_m = 24 \text{ L mol}^{-1}$:

$$V(\text{O}_2) = 0,00793 \times 24.$$

Donc :

$$V(\text{O}_2) \simeq 0,190 \text{ L}.$$

En arrondissant :

$$V(\text{O}_2) \simeq 0,19 \text{ L}.$$

Par conséquent :

$$\text{Q42 : réponse B}$$

Méthode condensée en une seule formule

On peut enchaîner toutes les étapes :

$$V(\text{O}_2) = \frac{I\Delta t}{4F} V_m$$

avec Δt en secondes.

Donc :

$$V(\text{O}_2) = \frac{0,85 \times 3600}{4 \times 9,65 \times 10^4} \times 24.$$

En remarquant $3600 = 36 \times 100$ et $9,65 \times 10^4 = 965 \times 100$, les facteurs 100 se simplifient :

$$V(\text{O}_2) = \frac{0,85 \times 36 \times 24}{4 \times 965}.$$

C'est précisément le calcul fourni dans l'énoncé, qui donne :

$$0,19 \text{ L}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Le QCM donne déjà le calcul utile :

$$\frac{0,85 \times 36 \times 24}{4 \times 965} = 0,19.$$

Il suffit de comprendre à quoi correspond chaque facteur :

$$0,85 (I), \quad 36 (3600/100), \quad 4 (4e^- \text{ par } O_2), \quad 965 (F/100), \quad 24 (V_m).$$

Donc la réponse B peut être reconnue très vite, mais il faut surtout vérifier l'unité : le résultat est en **litres**, pas en millilitres.

Vérification par ordre de grandeur

On a environ :

$$n(e^-) \approx \frac{3,0 \times 10^3}{10^5} \approx 3 \times 10^{-2} \text{ mol.}$$

Donc :

$$n(O_2) \approx \frac{3 \times 10^{-2}}{4} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Puis :

$$V(O_2) \approx 8 \times 10^{-3} \times 24 \approx 0,2 \text{ L.}$$

Cela confirme immédiatement que 0,19 L est plausible, alors que 0,19 mL serait mille fois trop petit.

Résumé final - réponses du QCM

Question	Idée décisive	Réponse
Q40	Une électrolyse nécessite une source d'énergie extérieure : transformation forcée.	☐ C
Q41	Dépôt de Pb sur A : $Pb^{2+} + 2e^- \rightarrow Pb$, donc réduction à la cathode.	☐ D
Q42	$V(O_2) = \frac{I\Delta t}{4F} V_m \simeq 0,19 \text{ L.}$	☐ B

Q40 : C Q41 : D Q42 : B

Correction complète et corrigée - Mathématiques

Questions Q43 à Q50 - Concours d'accès Médecine/Pharmacie/Médecine Dentaire

Réponses finales :

Q43 : C Q44 : B Q45 : D Q46 : A Q47 : C Q48 : B Q49 : C Q50 : D

Correction importante : pour Q44, la bonne réponse est bien B. La proposition D de l'énoncé contient $1 - 4\cos^2 x$ et non $1 - 4\sin^2 x$.

Q43 - Limite

Question 43

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{(1+x)^{2026} - 1}{x}.$$

Choix : A. 0 ; B. 1 ; C. 2026 ; D. $+\infty$; E. aucune.

On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de

$$g(x) = (1+x)^{2026}.$$

En effet, $g(0) = 1$, donc

$$\frac{(1+x)^{2026} - 1}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0).$$

Or

$$g'(x) = 2026(1+x)^{2025},$$

d'où

$$g'(0) = 2026.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{2026} - 1}{x} = 2026$$

et donc

$$\boxed{\text{Q43 : C}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Réflexe à mémoriser :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$

Ici $n = 2026$: la réponse C se lit presque immédiatement.

Vérification / méthode alternative

Avec le binôme de Newton,

$$(1+x)^{2026} = 1 + 2026x + \binom{2026}{2}x^2 + \dots$$

et, après division par x , tous les termes sauf 2026 tendent vers 0.

Q44 - Dérivée de $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$

Question 44

La fonction est

$$f(x) = \sin^2 x \cos 2x.$$

Les choix utiles sont notamment :

B. $\sin(2x)(1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x),$

D. $\sin(2x)(1 - 4 \cos^2 x).$

Appliquons la dérivation d'un produit. Posons

$$u(x) = \sin^2 x, \quad v(x) = \cos 2x.$$

Alors

$$u'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

et

$$v'(x) = -2 \sin 2x.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= \sin 2x \cos 2x - 2 \sin^2 x \sin 2x \\ &= \sin 2x (\cos 2x - 2 \sin^2 x). \end{aligned}$$

Or

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos 2x - 2 \sin^2 x &= 1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \\ &= 1 - 4 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x).$$

Enfin, différence de deux carrés :

$$1 - 4 \sin^2 x = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x).$$

Par conséquent

$$f'(x) = \sin(2x)(1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x).$$

C'est exactement la proposition B :

Q44 : B.

Méthode QCM la plus rapide

La façon la plus rapide est :

$$(\sin^2 x)' = \sin 2x,$$

puis factoriser immédiatement $\sin 2x$:

$$f' = \sin 2x (\cos 2x - 2 \sin^2 x) = \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x).$$

Ensuite

$$1 - 4 \sin^2 x = (1 - 2 \sin x)(1 + 2 \sin x).$$

On voit B. Le piège est D : elle contient $\cos^2 x$, donc elle est fausse.

Q45 - Nature du point $A(1, 0)$

Question 45

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1}.$$

Le point $A(1, 0)$ est-il une intersection avec l'axe des ordonnées, un maximum, un minimum ou un centre de symétrie ?

Posons

$$u = x - 1.$$

Alors

$$f(x) = \frac{u}{u^2 + 1}.$$

La fonction

$$\varphi(u) = \frac{u}{u^2 + 1}$$

est impaire car

$$\varphi(-u) = \frac{-u}{u^2 + 1} = -\varphi(u).$$

Sa courbe a donc l'origine comme centre de symétrie dans le repère en variable u . Comme $u = x - 1$, on a effectué une translation d'une unité vers la droite : le centre devient

$$(1, 0).$$

Donc

$$\boxed{\text{Q45 : D}}.$$

Pour éliminer B et C, on peut aussi noter que

$$f'(x) = \frac{1 - (x-1)^2}{((x-1)^2 + 1)^2}$$

et

$$f'(1) = 1 \neq 0,$$

donc $x = 1$ n'est pas un extremum.

Méthode QCM la plus rapide

Forme à reconnaître :

$$\frac{x-a}{(x-a)^2 + c}$$

avec $c > 0$. Après $u = x - a$, on obtient une fonction impaire. Le centre de symétrie est donc $(a, 0)$. Ici : $(1, 0)$, donc D.

Q46 - Distance d'un point à une droite dans l'espace

Question 46

$$C(-1, 2, 1), \quad (D) : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 2t. \end{cases}$$

On cherche la distance CH , où H est le projeté orthogonal de C sur (D) .

La droite passe par

$$A(1, -1, 0)$$

et possède pour vecteur directeur

$$\vec{u} = (2, -1, 2).$$

On forme

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 3, 1).$$

Dans l'espace,

$$d(C, D) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Calcul du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AC} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (7, 6, -4).$$

Sa norme vaut

$$\sqrt{7^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 36 + 16} = \sqrt{101}.$$

Et

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Ainsi

$$CH = \frac{\sqrt{101}}{3}.$$

Donc

$$\boxed{Q46 : A}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Dès la représentation paramétrique, lire $A = (1, -1, 0)$ et $u = (2, -1, 2)$. Comme $\|u\| = 3$ est immédiat, la formule au produit vectoriel est très efficace.

Vérification / méthode alternative

Par projection orthogonale, un point de la droite est

$$H(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2t).$$

La condition $\overrightarrow{CH} \cdot u = 0$ donne le même résultat, mais elle est plus longue en QCM.

Q47 - Équation logarithmique

Question 47

Pour $x > 0$:

$$\ln x - \ln(\sqrt{2} + 1) = \ln(2(\sqrt{2} - 1)).$$

On utilise

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

Donc

$$\ln \left(\frac{x}{\sqrt{2} + 1} \right) = \ln(2(\sqrt{2} - 1)).$$

La fonction $\ln$ est injective, donc

$$\frac{x}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Ainsi

$$x = 2(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1).$$

Or

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Donc

$$x = 2.$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Q47 : C}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Le produit conjugué est la clé :

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1.$$

Après suppression des logarithmes, le calcul est instantané.

Q48 - Équation cubique

Question 48

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x - 3)^3 + 1 = 0.$$

On écrit

$$(x - 3)^3 = -1.$$

Dans $\mathbb{R}$, la fonction cube est bijective, donc

$$x - 3 = -1.$$

Ainsi

$$x = 2.$$

L'ensemble solution est

$$\boxed{\{2\}},$$

donc

$$\boxed{\text{Q48 : B}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Ne surtout pas développer le cube. Poser $u = x - 3 : u^3 = -1 \Rightarrow u = -1 \Rightarrow x = 2$.

Q49 - Inéquation logarithmique

Question 49

Résoudre

$$\ln(1 - x) \geq 0.$$

D'abord le domaine :

$$1 - x > 0 \iff x < 1.$$

Puis $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$:

$$\ln(1 - x) \geq 0 \iff 1 - x \geq 1.$$

Donc

$$-x \geq 0 \iff x \leq 0.$$

Cette condition est compatible avec $x < 1$. Ainsi

$$S =] - \infty, 0].$$

Donc

$$\boxed{\text{Q49 : C}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

À mémoriser :

$$\boxed{\ln u \geq 0 \iff u \geq 1}.$$

Ici $1 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$. Réponse C.

Q50 - Primitive

Question 50

Déterminer une primitive de

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Posons

$$u(x) = e^x + e^{-x}.$$

Alors

$$u'(x) = e^x - e^{-x}.$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Or

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C.$$

Comme $e^x + e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C.$$

Donc

$$\boxed{\text{Q50 : D}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Chercher la structure u'/u . Ici le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur : réponse $\ln(\text{dénominateur})$, donc D.

Vérification / méthode alternative

$$\frac{d}{dx} \ln(e^x + e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = f(x).$$

Tableau récapitulatif

Question	Idée la plus rapide	Réponse
Q43	Limite remarquable / dérivée de $(1+x)^{2026}$ en 0.	C
Q44	Produit, factorisation $\sin 2x$, puis $1 - 4\sin^2 x = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$.	B
Q45	Translation d'une fonction impaire $u/(u^2 + 1)$.	D
Q46	$d = \ AC \times u\ /\ u\ $.	A
Q47	Logarithmes + produit conjugué.	C
Q48	Cube : $(x - 3)^3 = -1$.	B
Q49	$\ln u \geq 0 \iff u \geq 1$.	C
Q50	Forme u'/u .	D

Q43 : C Q44 : B Q45 : D Q46 : A Q47 : C Q48 : B Q49 : C Q50 : D

Correction détaillée - Mathématiques

Questions Q51 à Q53

Q51 - Équation exponentielle

Question 51

Résoudre :

$$8^{x(1-x)} = \frac{1}{64}.$$

Les choix proposés sont :

A. $\{1; 2\}$, B. $\{1; -2\}$, C. $\{-1; 2\}$, D. $\{-2; 2\}$, E. Aucune.

1. Mettre les deux membres dans la même base

On remarque :

$$64 = 8^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{64} = 8^{-2}.$$

L'équation devient :

$$8^{x(1-x)} = 8^{-2}.$$

Comme la fonction $t \mapsto 8^t$ est strictement croissante et injective, on égalise les exposants :

$$x(1-x) = -2.$$

2. Résoudre l'équation du second degré

Développons :

$$x - x^2 = -2.$$

On rassemble tout dans un même membre :

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

On factorise :

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Donc :

$$(x - 2)(x + 1) = 0.$$

Ainsi :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\{-1; 2\}}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{Q51 : réponse C}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Le calcul peut se faire presque entièrement mentalement :

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{8^2} = 8^{-2}.$$

Donc :

$$x(1 - x) = -2.$$

Puis tester les réponses proposées : la paire $(-1, 2)$ fonctionne immédiatement :

$$(-1)(1 + 1) = -2, \quad 2(1 - 2) = -2.$$

Donc on peut cocher ☐ sans résoudre formellement le trinôme.

Vérification

Vérifions les deux solutions :

Pour $x = -1$:

$$x(1 - x) = (-1)(2) = -2,$$

donc

$$8^{-2} = \frac{1}{64}.$$

Pour $x = 2$:

$$x(1 - x) = 2(-1) = -2,$$

donc là encore :

$$8^{-2} = \frac{1}{64}.$$

Les deux solutions sont correctes.

Q52 - Puissance d'un nombre complexe

Question 52

On a :

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2020} = x + iy.$$

Déterminer $(x; y)$.

Choix :

A. $(0; 1)$, B. $(1; 0)$, C. $(0; -1)$, D. $(-1; 0)$, E. Aucune.

1. Simplifier le quotient

On rationalise le dénominateur en multipliant par le conjugué $1 + i$:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}.$$

Au dénominateur :

$$(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2.$$

Au numérateur :

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$$

Ainsi :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i.$$

L'expression devient donc :

$$i^{2020}.$$

2. Utiliser la périodicité des puissances de i

On sait :

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Les puissances se répètent avec une période 4.

Or :

$$2020 = 4 \times 505.$$

Donc :

$$i^{2020} = (i^4)^{505} = 1^{505} = 1.$$

Ainsi :

$$x + iy = 1 + 0i.$$

Donc :

$$\boxed{x = 1, \quad y = 0}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{Q52 : réponse B}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

La méthode la plus rapide est de reconnaître directement :

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i}.$$

Ensuite :

$$2020 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Donc :

$$i^{2020} = 1.$$

Réponse $\boxed{B}$ en quelques secondes.

Vérification

On peut aussi utiliser les arguments :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}.$$

Donc :

$$\frac{1+i}{1-i} = e^{i\pi/2} = i.$$

On retrouve exactement le même résultat.

Q53 - Suite transformée par un logarithme

Question 53

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = e^3, \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}.$$

On pose :

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

On demande la raison q de la suite (v_n) et son premier terme v_0 .

Choix :

A. $q = \frac{1}{2}, v_0 = 1,$

B. $q = 2, v_0 = \frac{1}{2},$

C. $q = -2, v_0 = -\frac{1}{2},$

D. $q = -\frac{1}{2}, v_0 = -1,$

E. Aucune.

1. Calcul de v_0

Par définition :

$$v_0 = \ln(u_0) - 2.$$

Or :

$$u_0 = e^3.$$

Donc :

$$v_0 = \ln(e^3) - 2.$$

Comme :

$$\ln(e^3) = 3,$$

on obtient :

$$\boxed{v_0 = 1}.$$

À ce stade, dans le QCM, une seule proposition possède $v_0 = 1$: la proposition A.

On peut donc déjà fortement soupçonner la réponse A.

2. Relation de récurrence vérifiée par v_n

On part de :

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n}.$$

On prend le logarithme :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(e\sqrt{u_n}).$$

En utilisant :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

on obtient :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln e + \ln(\sqrt{u_n}).$$

Or :

$$\ln e = 1$$

et :

$$\sqrt{u_n} = u_n^{1/2},$$

donc :

$$\ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \ln(u_n).$$

Ainsi :

$$\ln(u_{n+1}) = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n).$$

Par définition :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2.$$

Donc :

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) - 2.$$

Ainsi :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(u_n) - 1.$$

On factorise :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} (\ln(u_n) - 2).$$

Mais :

$$\ln(u_n) - 2 = v_n.$$

Donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison :

$$q = \frac{1}{2}.$$

Comme :

$$v_0 = 1,$$

on obtient :

$$q = \frac{1}{2}, \quad v_0 = 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{Q53 : réponse A}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Dans ce QCM, calculer v_0 en premier est extrêmement malin :

$$v_0 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Parmi les quatre propositions A-D, seule A propose $v_0 = 1$.

Donc on peut cocher A presque immédiatement.

Si on veut confirmer la raison :

$$\ln u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \ln u_n$$

et la soustraction de 2 a précisément été choisie pour donner :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

Résumé final - réponses du QCM

Question	Méthode éclair	Réponse
Q51	$\frac{1}{64} = 8^{-2}$, donc $x(1-x) = -2$, d'où $x = -1$ ou $x = 2$.	☐ C
Q52	$\frac{1+i}{1-i} = i$ puis $2020 \equiv 0 \pmod{4}$, donc $i^{2020} = 1$.	☐ B
Q53	$v_0 = \ln(e^3) - 2 = 1$, ce qui identifie déjà A ; puis $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.	☐ A

Q51 : C Q52 : B Q53 : A

Correction détaillée - Mathématiques

Questions Q54 à Q56

Q54 - Probabilité de franchir tous les obstacles

Question 54

Un coureur doit franchir n obstacles $O_1, O_2, \dots, O_n$. La probabilité de franchir avec succès l'obstacle O_k est

$$P(O_k) = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Les franchissements sont indépendants. On cherche la probabilité de franchir **tous** les obstacles avec succès.

1. Traduire le mot « tous »

L'événement recherché est l'intersection :

$$O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n.$$

Puisque les franchissements sont **indépendants**, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités :

$$P(O_1 \cap \dots \cap O_n) = P(O_1)P(O_2) \dots P(O_n).$$

Donc :

$$P = \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^3} \times \dots \times \frac{1}{2^n}.$$

2. Regrouper les puissances de 2

On utilise :

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}.$$

Ainsi :

$$P = \frac{1}{2^{1+2+3+\dots+n}}.$$

Or la somme des n premiers entiers vaut :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent :

$$P = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

C'est exactement la proposition D :

Q54 : réponse D.

Méthode QCM la plus rapide

Le mot-clé est **indépendants**. Il faut immédiatement penser :

$$\boxed{\text{intersection} \implies \text{produit}}.$$

Puis :

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{\sum_{k=1}^n k}} = \frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

En QCM, cela prend quelques secondes.

Vérification / autre méthode

Pour $n = 2$, on doit obtenir :

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

La formule donne :

$$\frac{1}{2^{2(3)/2}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Elle est cohérente.

Q55 - Intégrales lues géométriquement sur un graphique

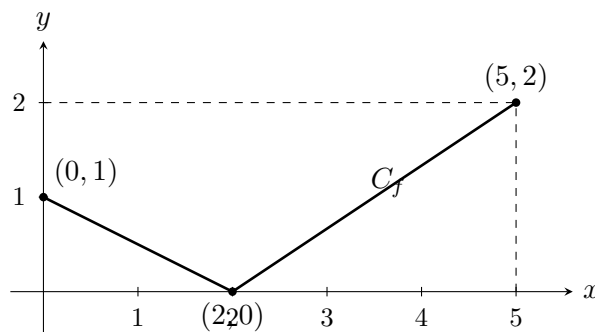
Question 55

La courbe C_f est formée de deux segments reliant les points

$$(0, 1), \quad (2, 0), \quad (5, 2).$$

On considère :

$$I = \int_0^2 f(x) dx, \quad J = \int_2^5 f(x) dx, \quad K = \int_0^5 f(x) dx.$$



1. Idée fondamentale : une intégrale est une aire algébrique

Sur tout l'intervalle $[0, 5]$, le graphe reste sur ou au-dessus de l'axe des abscisses. Ainsi, ici, les intégrales sont simplement les **aires géométriques** situées sous la courbe.

Il n'est donc absolument pas nécessaire de déterminer l'expression de f ni de chercher des primitives.

2. Calcul de I

Entre $x = 0$ et $x = 2$, la région sous la courbe est un triangle rectangle :

— base : $2 - 0 = 2$;

— hauteur : 1.

L'aire d'un triangle est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Donc :

$$I = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \boxed{1}.$$

3. Calcul de J

Entre $x = 2$ et $x = 5$, la région sous la courbe est encore un triangle rectangle :

— base : $5 - 2 = 3$;

— hauteur : 2.

Donc :

$$J = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \boxed{3}.$$

4. Calcul de K

Par additivité des intégrales :

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx.$$

Donc :

$$K = I + J = 1 + 3 = \boxed{4}.$$

Nous obtenons :

$$\boxed{I = 1, \quad J = 3, \quad K = 4}.$$

Cela correspond exactement à la proposition A :

$$\boxed{\text{Q55 : réponse A}}.$$

Méthode QCM la plus rapide

Ne surtout pas chercher les équations des segments !

Il suffit de voir deux triangles :

$$I = \frac{2 \times 1}{2} = 1, \quad J = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$

Puis :

$$K = I + J = 4.$$

Réponse A en moins de 20 secondes.

Vérification / autre méthode

On peut vérifier par calcul analytique.

Sur $[0, 2]$, la droite passant par $(0, 1)$ et $(2, 0)$ a pour équation :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}.$$

Donc :

$$I = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 2 - 1 = 1.$$

Sur $[2, 5]$, la pente vaut :

$$\frac{2 - 0}{5 - 2} = \frac{2}{3},$$

ainsi :

$$f(x) = \frac{2}{3}(x - 2).$$

Alors :

$$J = \int_2^5 \frac{2}{3}(x - 2) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{(x - 2)^2}{2} \right]_2^5 = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$

Tout concorde.

Q56 - Nombre de dispositions de 5 élèves sur 5 chaises

Question 56

Cinq élèves distincts veulent s'asseoir sur cinq chaises numérotées de 1 à 5. Combien de dispositions différentes sont possibles ?

Les élèves sont distincts et les chaises sont également distinguées par leurs numéros.

Pour la chaise n°1, on a :

5 choix.

Une fois un élève installé, il reste 4 élèves pour la chaise n°2 :

4 choix.

Puis :

3 choix, 2 choix, 1 choix.

Par le principe multiplicatif :

$$N = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

C'est la factorielle de 5 :

$$N = 5! = 120.$$

Donc :

Q56 : réponse D.

Méthode QCM la plus rapide

Dès qu'on lit :

"n personnes distinctes sur n places distinctes"

on pense immédiatement :

$$\boxed{n!}.$$

Ici :

$$5! = 120.$$

Réponse D sans autre calcul.

Vérification / autre méthode

Attention au piège :

$$5^5$$

ne convient pas, car cela autoriserait plusieurs élèves sur la même chaise. Ici chaque chaise reçoit exactement un élève et chaque élève occupe exactement une chaise : il s'agit donc d'une permutation.

Résumé final - réponses du QCM

Question	Méthode éclair	Réponse
Q54	Indépendance $\Rightarrow$ produit : $\prod_{k=1}^n 2^{-k} = 2^{-n(n+1)/2}$.	$\boxed{D}$
Q55	Aires de deux triangles : $I = 1$, $J = 3$, puis $K = I + J = 4$.	$\boxed{A}$
Q56	5 élèves distincts sur 5 chaises distinctes : $5! = 120$.	$\boxed{D}$

$\boxed{\text{Q54 : D} \quad \text{Q55 : A} \quad \text{Q56 : D}}$