

Exercice 5 – Limites, asymptotes et représentation graphique

Énoncé

5. Représenter

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	1		$+\infty$
			1

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f .
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f .

Lecture préalable du tableau

Le nombre 3 sépare le tableau en deux intervalles : $] -\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$. Aucune valeur $f(3)$ n'est indiquée et les valeurs de $f(x)$ deviennent infinies lorsque x se rapproche de 3. On lit donc ici

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Sur chacun de ces deux intervalles, la flèche est descendante : la fonction f est donc décroissante sur $] -\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

1. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Il faut examiner séparément les quatre extrémités des deux intervalles constituant D_f .

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

À l'extrémité gauche du tableau, la valeur indiquée est 1. Cela signifie que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 1 lorsque x devient très négatif :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

Lorsque $x \rightarrow 3$ par valeurs inférieures

Sur l'intervalle $] -\infty, 3[$, la fonction décroît de 1 vers $-\infty$. Ainsi, lorsque x se rapproche de 3 tout en restant inférieur à 3,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty.$$

La notation $x \rightarrow 3^-$ signifie précisément : « x tend vers 3 avec $x < 3$ ».

Lorsque $x \rightarrow 3$ par valeurs supérieures

Sur l'intervalle $]3, +\infty[$, la fonction part de $+\infty$ puis décroît. Donc, lorsque x se rapproche de 3 avec $x > 3$,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

À l'extrémité droite du tableau, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 1. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Réponse à la question 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1.\end{aligned}$$

2. Équations des asymptotes

Asymptote verticale

Une droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale lorsque, au moins d'un côté de a , la fonction tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Ici,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty.$$

Les deux branches de la courbe s'approchent donc indéfiniment de la droite verticale passant par l'abscisse 3.

Ainsi,

$$x = 3 \text{ est une asymptote verticale à } \mathcal{C}_f.$$

Asymptote horizontale

Une droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale lorsque $f(x)$ tend vers le nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Or

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 1 aux deux extrémités.

Ainsi,

$$y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f.$$

Réponse à la question 2 : les asymptotes imposées par le tableau sont

$$x = 3 \quad \text{et} \quad y = 1.$$

3. Construction d'une courbe possible

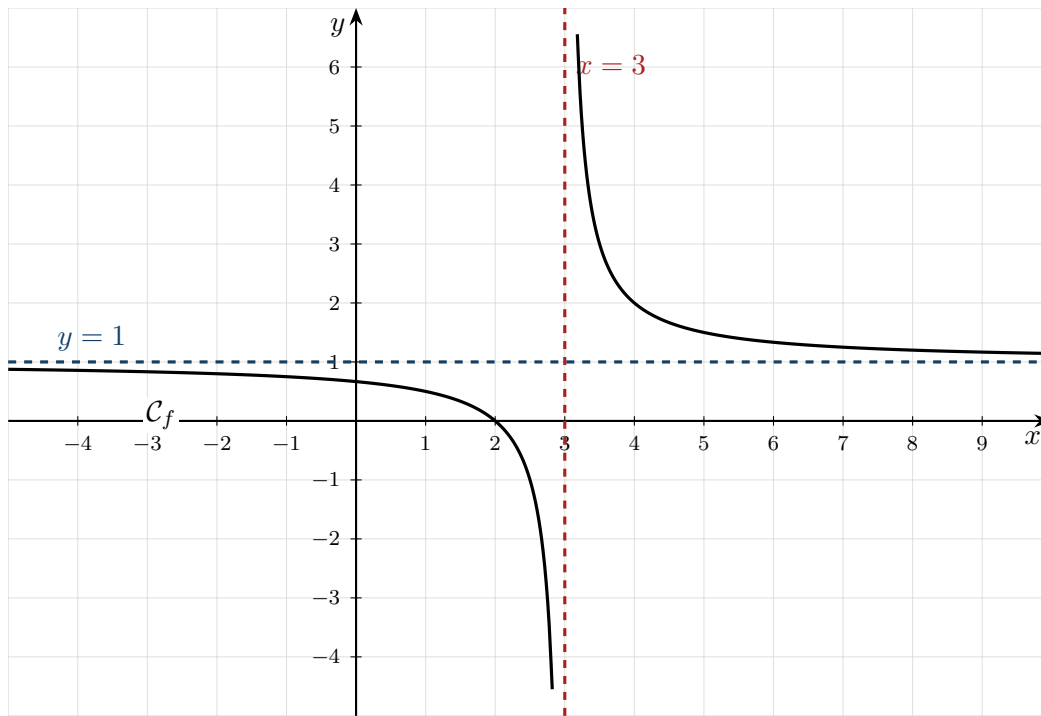
Le tableau ne permet pas de déterminer une courbe unique. Il impose cependant son comportement général. Pour construire une courbe convenable, on respecte successivement les informations suivantes :

- 1) tracer l'asymptote verticale $x = 3$;
- 2) tracer l'asymptote horizontale $y = 1$;
- 3) à gauche de $x = 3$, tracer une branche *décroissante* qui s'approche de $y = 1$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, puis descend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow 3^-$;
- 4) à droite de $x = 3$, tracer une branche *décroissante* qui part vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 3^+$, puis s'approche de $y = 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Une courbe particulièrement simple qui possède exactement ces propriétés est, par exemple, celle de la fonction

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-3}, \quad x \neq 3.$$

Cette formule n'est pas donnée par l'énoncé et n'est pas la seule possibilité : elle sert uniquement à obtenir un tracé conforme au tableau de variation.



Vérification graphique, branche par branche

Branche gauche ($x < 3$). Très loin vers la gauche, la courbe est de plus en plus proche de $y = 1$. En allant de gauche à droite, elle descend continûment. Lorsqu'elle s'approche de $x = 3$, elle plonge vers $-\infty$.

Branche droite ($x > 3$). Juste à droite de $x = 3$, la courbe vient de très haut : $f(x) \rightarrow +\infty$. Puis elle descend lorsque x augmente et se rapproche progressivement de $y = 1$.

Le tracé respecte donc toutes les informations du tableau.

Bilan final

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

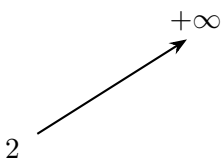
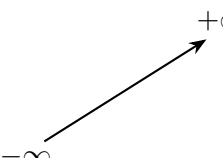
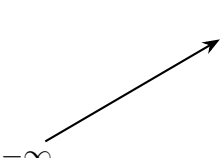
Asymptote verticale : $x = 3$

Asymptote horizontale : $y = 1$

Exercice 6 – Limites, asymptotes et représentation graphique

Énoncé

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f .

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
$f(x)$	2 		$-\infty$ 	2 

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles de la courbe de la fonction f .
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f .

Lecture préalable du tableau

Les doubles barres placées en $x = -5$ et en $x = 0$ indiquent que la fonction n'est pas définie en ces deux valeurs. Ainsi,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$$

Le domaine est donc constitué de trois intervalles :

$$]-\infty, -5[, \quad]-5, 0[, \quad]0, +\infty[.$$

Sur chacun de ces trois intervalles, la flèche du tableau monte de gauche à droite : f y est croissante.

1. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

On lit chaque extrémité du tableau séparément.

Sur $] -\infty, -5[$

Lorsque x part vers $-\infty$, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Lorsque x se rapproche de -5 par valeurs inférieures, la flèche monte sans borne :

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty.$$

Le symbole -5^- signifie que x tend vers -5 en restant à gauche de -5 .

Sur $] -5, 0[$

Juste à droite de -5 , le tableau indique des valeurs arbitrairement négatives :

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty.$$

Puis f est croissante et tend vers $+\infty$ lorsque x approche 0 par la gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

Sur $]0, +\infty[$

Juste à droite de 0, on lit $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Enfin, lorsque $x \rightarrow +\infty$, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Ainsi, les six limites demandées sont

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, & \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2. \end{array}$$

2. Asymptotes de la courbe

Asymptote verticale en $x = -5$

Une droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a au moins d'un côté.

Ici,

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty.$$

Donc

$$x = -5 \text{ est une asymptote verticale.}$$

Asymptote verticale en $x = 0$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Donc

$$x = 0 \text{ est une asymptote verticale.}$$

Asymptote horizontale

Une droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale lorsque $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Or

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Par conséquent,

$$y = 2 \text{ est une asymptote horizontale aux deux extrémités.}$$

Finalement, la courbe possède les trois asymptotes

$$x = -5, \quad x = 0, \quad y = 2.$$

Comment préparer le tracé ?

Il faut d'abord tracer les trois asymptotes en pointillés. Ensuite, on dessine trois branches, une sur chacun des intervalles du domaine. Chacune doit être croissante et respecter les limites trouvées à la question 1.

3. Construction d'une courbe possible

Le tableau ne détermine pas une fonction unique : plusieurs fonctions peuvent avoir exactement ces variations et ces limites. Il suffit donc de construire *une* courbe compatible avec toutes les informations.

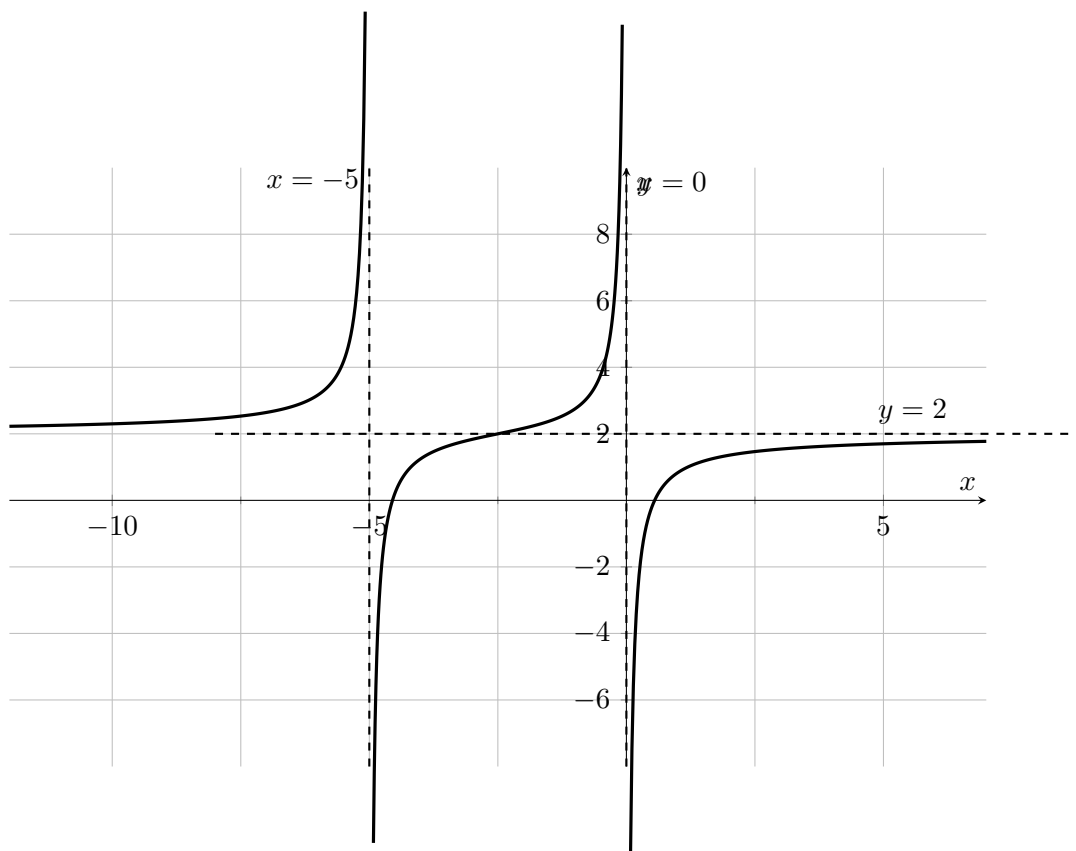
Par exemple, la fonction

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x} \quad (x \neq -5, x \neq 0)$$

convient. En effet,

$$f'(x) = \frac{1}{(x+5)^2} + \frac{1}{x^2} > 0$$

pour tout x de son domaine : elle est bien croissante sur chacun des trois intervalles. Ses limites sont également celles du tableau.



Lecture des trois branches :

- Sur $] -\infty, -5[$, la courbe part au voisinage de l'asymptote $y = 2$ puis monte vers $+\infty$ à l'approche de -5 .
- Sur $] -5, 0[$, elle part de $-\infty$ juste après -5 et monte continûment jusqu'à $+\infty$ lorsque x approche 0 par la gauche.
- Sur $] 0, +\infty[$, elle part de $-\infty$ juste après 0 , puis monte en se rapprochant progressivement de l'asymptote horizontale $y = 2$.

Bilan

À partir du seul tableau de variation, on obtient :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$$

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, & \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty, & \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2. \end{array}$$

Les asymptotes sont

$$x = -5, \quad x = 0, \quad y = 2.$$

La courbe comporte trois branches croissantes séparées par les deux asymptotes verticales.

Exercice 7 – Limites et lecture graphique

Énoncé

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^3}.$$

1. À l'aide d'une calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f .
2. a. Conjecturer graphiquement la limite de f en $+\infty$.
b. Déterminer graphiquement un réel A tel que, pour tout $x > A$,

$$f(x) \in]0,99; 1,01[.$$

3. a. Donner graphiquement la limite de f en $-\infty$.
b. Déterminer graphiquement un réel B tel que, pour tout $x < B$,

$$f(x) \in]0,999; 1,001[.$$

Remarque importante. La formule $\frac{2}{x^3}$ n'a pas de sens pour $x = 0$. Le domaine de définition correspondant à la formule est donc

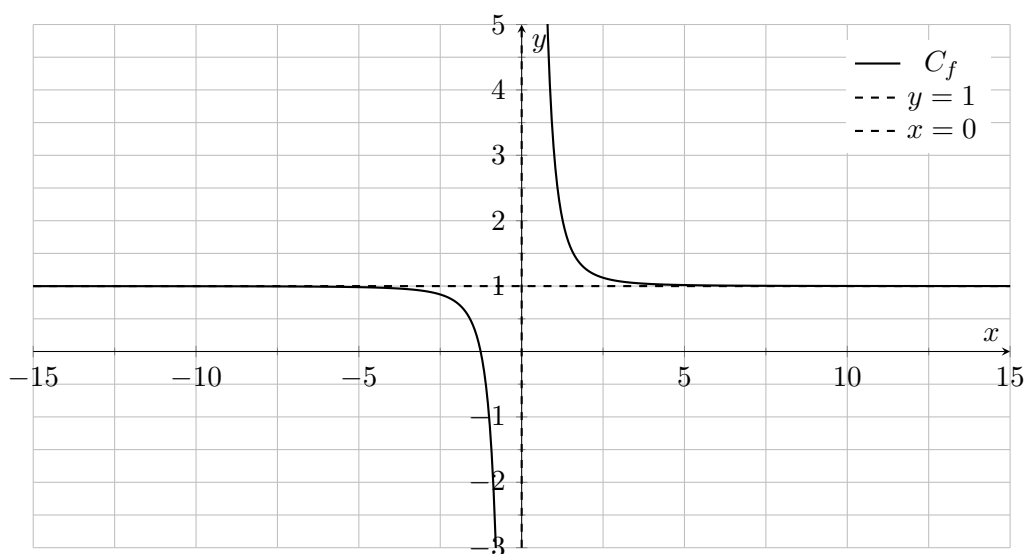
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Tracé de la courbe représentative

On considère

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

La courbe possède deux branches, l'une pour $x < 0$ et l'autre pour $x > 0$. La droite $x = 0$ ne fait pas partie du domaine.



Lorsque $|x|$ devient grand, le terme $\frac{2}{x^3}$ devient très petit : les deux branches se rapprochent donc de la droite horizontale $y = 1$.

2. Étude lorsque $x \rightarrow +\infty$

a) Limite en $+\infty$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $x^3 \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\frac{2}{x^3} \rightarrow 0.$$

Comme

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^3},$$

on obtient

$$f(x) \rightarrow 1 + 0 = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

Graphiquement, cela signifie que la branche droite de C_f se rapproche de la droite $y = 1$ lorsque l'on va très loin vers la droite.

b) Recherche d'un réel A

On souhaite que, pour tout $x > A$,

$$0,99 < f(x) < 1,01.$$

Pour $x > 0$, on a $\frac{2}{x^3} > 0$, donc

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^3} > 1 > 0,99.$$

La borne inférieure est donc automatiquement satisfaite. Il reste à imposer

$$1 + \frac{2}{x^3} < 1,01.$$

On soustrait 1 :

$$\frac{2}{x^3} < 0,01.$$

Pour $x > 0$, on peut multiplier par x^3 sans changer le sens de l'inégalité :

$$2 < 0,01x^3.$$

Donc

$$x^3 > \frac{2}{0,01} = 200,$$

puis

$$x > \sqrt[3]{200} \approx 5,85.$$

Ainsi, une lecture graphique conduit à choisir par exemple

$$\boxed{A = 6}$$

En effet, dès que $x > 6$, la courbe est comprise entre les droites $y = 0,99$ et $y = 1,01$.

3. Étude lorsque $x \rightarrow -\infty$

a) Limite en $-\infty$

Quand $x \rightarrow -\infty$, on a $x^3 \rightarrow -\infty$ et

$$\frac{2}{x^3} \rightarrow 0$$

par valeurs négatives. Ainsi,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^3} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1}$$

Graphiquement, la branche gauche de la courbe se rapproche elle aussi de la droite $y = 1$.

b) Recherche d'un réel B

On veut que, pour tout $x < B$,

$$0,999 < f(x) < 1,001.$$

Pour $x < 0$, $x^3 < 0$, donc

$$\frac{2}{x^3} < 0 \implies f(x) < 1 < 1,001.$$

La borne supérieure est donc automatiquement satisfaite. Il reste à obtenir

$$0,999 < 1 + \frac{2}{x^3}.$$

On soustrait 1 :

$$-0,001 < \frac{2}{x^3}.$$

Une manière simple d'éviter toute erreur de signe consiste à poser $u = -x > 0$. Alors $x^3 = -u^3$ et

$$f(x) = 1 - \frac{2}{u^3}.$$

La condition devient

$$0,999 < 1 - \frac{2}{u^3},$$

d'où

$$\frac{2}{u^3} < 0,001.$$

Ainsi

$$u^3 > \frac{2}{0,001} = 2000,$$

soit

$$u > \sqrt[3]{2000} \approx 12,60.$$

Comme $u = -x$, cela correspond à

$$x < -12,60 \text{ environ.}$$

On peut donc choisir graphiquement, par exemple,

$$\boxed{B = -13}$$

Ainsi, pour tout $x < -13$,

$$0,999 < f(x) < 1,001.$$

Bilan

Résultat	Valeur
Domaine correspondant à la formule	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Limite en $+\infty$	1
Un choix possible pour A	$A = 6$
Limite en $-\infty$	1
Un choix possible pour B	$B = -13$
Asymptote horizontale aux deux infinis	$y = 1$

Interprétation essentielle : les nombres A et B ne sont pas uniques. Il suffit de choisir des valeurs assez éloignées de 0 pour que la courbe reste dans les bandes horizontales demandées. Par exemple, $A = 6$ et $B = -13$ conviennent.

Exercice 11 – Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Énoncé

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto (x^2 + 1)(3 - 4x)$, 2. $x \mapsto -2e^x + 3 + \frac{5}{x}$,
 3. $x \mapsto (2x + 1)(5 - 4x)$, 4. $x \mapsto -x + \frac{2}{3x^2}$.

Correction détaillée

1. $f(x) = (x^2 + 1)(3 - 4x)$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On étudie séparément les deux facteurs :

$$x^2 \longrightarrow +\infty \implies x^2 + 1 \longrightarrow +\infty,$$

et

$$-4x \longrightarrow -\infty \implies 3 - 4x \longrightarrow -\infty.$$

Ainsi,

$$(x^2 + 1)(3 - 4x) \longrightarrow (+\infty) \times (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)(3 - 4x) = -\infty$$

Limite lorsque $x \rightarrow -\infty$.

On a encore

$$x^2 + 1 \longrightarrow +\infty.$$

Mais, cette fois, puisque $x \rightarrow -\infty$,

$$-4x \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$3 - 4x \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$(x^2 + 1)(3 - 4x) \longrightarrow (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)(3 - 4x) = +\infty$$

Vérification par développement.

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(3 - 4x) &= 3x^2 - 4x^3 + 3 - 4x \\ &= -4x^3 + 3x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré est $-4x^3$: il impose bien le comportement du polynôme à l'infini.

2. $g(x) = -2e^x + 3 + \frac{5}{x}$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On connaît les limites usuelles :

$$e^x \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{5}{x} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$-2e^x \longrightarrow -\infty,$$

et ainsi

$$-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \longrightarrow -\infty + 3 + 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \right) = -\infty$$

Limite lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$e^x \longrightarrow 0 \quad \implies \quad -2e^x \longrightarrow 0,$$

et

$$\frac{5}{x} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \longrightarrow 0 + 3 + 0 = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2e^x + 3 + \frac{5}{x} \right) = 3$$

3. $h(x) = (2x + 1)(5 - 4x)$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On a

$$2x + 1 \longrightarrow +\infty$$

et

$$5 - 4x \longrightarrow -\infty.$$

Donc

$$(2x + 1)(5 - 4x) \longrightarrow (+\infty) \times (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)(5 - 4x) = -\infty$$

Limite lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Cette fois,

$$2x + 1 \longrightarrow -\infty,$$

tandis que

$$-4x \longrightarrow +\infty \quad \implies \quad 5 - 4x \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$(2x + 1)(5 - 4x) \longrightarrow (-\infty) \times (+\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)(5 - 4x) = -\infty$$

Vérification par développement.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(5 - 4x) &= 10x - 8x^2 + 5 - 4x \\ &= -8x^2 + 6x + 5. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré est $-8x^2$. Or $x^2 \rightarrow +\infty$ aussi bien lorsque $x \rightarrow +\infty$ que lorsque $x \rightarrow -\infty$. On retrouve donc $-\infty$ dans les deux cas.

4. $k(x) = -x + \frac{2}{3x^2}$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On a

$$-x \longrightarrow -\infty.$$

D'autre part,

$$x^2 \longrightarrow +\infty \implies 3x^2 \longrightarrow +\infty \implies \frac{2}{3x^2} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$-x + \frac{2}{3x^2} \longrightarrow -\infty + 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2}{3x^2} \right) = -\infty$$

Limite lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$-x \longrightarrow +\infty.$$

Et, comme précédemment,

$$\frac{2}{3x^2} \longrightarrow 0.$$

Ainsi,

$$-x + \frac{2}{3x^2} \longrightarrow +\infty + 0 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{2}{3x^2} \right) = +\infty$$

Bilan

Fonction	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$(x^2 + 1)(3 - 4x)$	$+\infty$	$-\infty$
$-2e^x + 3 + \frac{5}{x}$	3	$-\infty$
$(2x + 1)(5 - 4x)$	$-\infty$	$-\infty$
$-x + \frac{2}{3x^2}$	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 12 - Formes indéterminées aux infinis

Énoncé

On s'intéresse aux limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes. Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée, sans chercher à déterminer les limites.

1. $x \mapsto x^2 + x - 1$, 2. $x \mapsto 2x^3 + x^2 - x - 1$,
3. $x \mapsto (2x + 1)x^2$, 4. $x \mapsto \frac{-2}{x + 1}$,
5. $x \mapsto \frac{2x + 1}{e^x}$, 6. $x \mapsto e^x + 1 + \frac{1}{x}$.

Méthode

On ne cherche pas ici la valeur finale de chaque limite. On remplace simplement chaque terme par son comportement lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, puis on regarde la *forme* obtenue.

Les formes indéterminées usuelles sont notamment

$$\boxed{\infty - \infty}, \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\frac{0}{0}}, \quad \boxed{0 \times \infty}.$$

En revanche, des formes comme $+\infty + (+\infty)$, $(-\infty) \times (+\infty)$ ou $\frac{\text{constante non nulle}}{\infty}$ ne sont pas indéterminées.

1. $f(x) = x^2 + x - 1$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

On lit séparément les trois termes :

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty, \quad -1 \rightarrow -1.$$

La forme de la somme est donc

$$(+\infty) + (+\infty) - 1.$$

Il n'y a aucune opposition entre un terme qui tend vers $+\infty$ et un terme qui tend vers $-\infty$.

En $+\infty$: pas de forme indéterminée.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

Cette fois,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty, \quad -1 \rightarrow -1.$$

La somme contient donc simultanément un terme qui tend vers $+\infty$ et un terme qui tend vers $-\infty$:

$$(+\infty) + (-\infty) - 1.$$

On reconnaît la forme

$$\boxed{\infty - \infty}.$$

En $-\infty$: forme indéterminée de type $\infty - \infty$.

2. $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

On a

$$2x^3 \rightarrow +\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty, \quad -x \rightarrow -\infty, \quad -1 \rightarrow -1.$$

La forme obtenue contient donc à la fois $+\infty$ et $-\infty$:

$$(+\infty) + (+\infty) + (-\infty) - 1.$$

C'est une forme de type $\infty - \infty$.

En $+\infty$: forme indéterminée de type $\infty - \infty$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

Attention aux puissances :

$$x^3 \rightarrow -\infty \implies 2x^3 \rightarrow -\infty,$$

mais

$$x^2 \rightarrow +\infty.$$

De plus, puisque $x \rightarrow -\infty$,

$$-x \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, la forme est

$$(-\infty) + (+\infty) + (+\infty) - 1,$$

qui contient encore une opposition $-\infty / +\infty$.

En $-\infty$: forme indéterminée de type $\infty - \infty$.

3. $h(x) = (2x + 1)x^2$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$2x + 1 \rightarrow +\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty.$$

La forme du produit est donc

$$(+\infty) \times (+\infty).$$

Ce n'est pas une forme indéterminée.

En $+\infty$: pas de forme indéterminée.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

$$2x + 1 \rightarrow -\infty, \quad x^2 \rightarrow +\infty.$$

La forme est

$$(-\infty) \times (+\infty).$$

Là encore, ce n'est pas une forme indéterminée. La forme indéterminée concernant un produit est notamment $0 \times \infty$, ce qui n'est pas le cas ici.

En $-\infty$: pas de forme indéterminée.

4. $p(x) = \frac{-2}{x+1}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

Le numérateur reste égal à la constante non nulle -2 , tandis que

$$x + 1 \rightarrow +\infty.$$

La forme est donc

$$\frac{-2}{+\infty}.$$

Ce n'est ni $\frac{0}{0}$ ni $\frac{\infty}{\infty}$.

En $+\infty$: pas de forme indéterminée.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

$$x + 1 \rightarrow -\infty,$$

d'où la forme

$$\frac{-2}{-\infty}.$$

Elle n'est pas indéterminée non plus.

En $-\infty$: pas de forme indéterminée.

5. $q(x) = \frac{2x+1}{e^x}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

Au numérateur,

$$2x + 1 \rightarrow +\infty.$$

Au dénominateur,

$$e^x \rightarrow +\infty.$$

On obtient donc exactement la forme

$$\frac{+\infty}{+\infty},$$

qui est une forme indéterminée.

En $+\infty$: forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

On a

$$2x + 1 \rightarrow -\infty, \quad e^x \rightarrow 0^+.$$

La forme est donc

$$\frac{-\infty}{0^+}.$$

Cette forme n'appartient pas aux formes indéterminées : le numérateur ne tend pas vers 0 et le quotient n'est pas de type $\frac{\infty}{\infty}$.

En $-\infty$: pas de forme indéterminée.

6. $r(x) = e^x + 1 + \frac{1}{x}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$e^x \rightarrow +\infty, \quad 1 \rightarrow 1, \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

La forme est donc

$$(+\infty) + 1 + 0,$$

qui n'est pas indéterminée.

En $+\infty$: pas de forme indéterminée.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

$$e^x \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 1, \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Tous les termes ont ici un comportement déterminé et aucune forme indéterminée n'apparaît.

En $-\infty$: pas de forme indéterminée.

Bilan

Fonction	en $-\infty$	en $+\infty$
$x^2 + x - 1$	FI : $\infty - \infty$	Pas de FI
$2x^3 + x^2 - x - 1$	FI : $\infty - \infty$	FI : $\infty - \infty$
$(2x + 1)x^2$	Pas de FI	Pas de FI
$\frac{-2}{x+1}$	Pas de FI	Pas de FI
$\frac{2x+1}{e^x}$	Pas de FI	FI : $\frac{\infty}{\infty}$
$e^x + 1 + \frac{1}{x}$	Pas de FI	Pas de FI

Exercice 13 - Limites de fonctions polynômes

Énoncé

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes :

1. $x \mapsto x^2 + x - 1$,
2. $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$,
3. $x \mapsto -2x^2 + 4x + 1$,
4. $x \mapsto 2x^3 - 7x^2 + x - 2$.

Méthode

Pour un polynôme, le comportement lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est gouverné par son **terme de plus haut degré**. Pour le montrer sans se contenter d'une règle apprise, on factorise par la plus grande puissance de x puis on étudie chaque facteur.

1. $f(x) = x^2 + x - 1$

On cherche d'abord la limite en $+\infty$.

On factorise par x^2 :

$$f(x) = x^2 + x - 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow 1.$$

Le second facteur tend vers le nombre strictement positif 1. Par conséquent, le produit a le même comportement que x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty.$$

Étudions maintenant $x \rightarrow -\infty$. La même factorisation donne

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Or, lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0,$$

donc le facteur entre parenthèses tend encore vers 1. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty.$$

Interprétation : le terme dominant est x^2 . Comme x^2 tend vers $+\infty$ aux deux extrémités, le polynôme fait de même.

2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Pour faire apparaître le terme dominant, on factorise par x^3 :

$$g(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^3 \rightarrow +\infty, \quad -\frac{3}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x^3} \rightarrow 0.$$

Donc

$$1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \rightarrow 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, la quantité x^3 est négative et sa valeur absolue devient arbitrairement grande :

$$x^3 \rightarrow -\infty.$$

En même temps,

$$1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \rightarrow 1 > 0.$$

Le produit tend donc vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty.$$

Interprétation : le terme dominant est x^3 . Un cube conserve le signe de x : il tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche.

3. $h(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Factorisons cette fois par x^2 :

$$h(x) = x^2 \left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad -2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow -2.$$

Le premier facteur devient très grand et positif, tandis que le second tend vers un nombre strictement négatif. Le produit tend donc vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 4x + 1) = -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a toujours

$$x^2 \rightarrow +\infty$$

et

$$-2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow -2 < 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 4x + 1) = -\infty.$$

Interprétation : le terme dominant est $-2x^2$. Comme $x^2 \rightarrow +\infty$ des deux côtés, la multiplication par -2 entraîne une limite égale à $-\infty$ des deux côtés.

4. $k(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 2$

Le terme de plus haut degré est $2x^3$. Factorisons par x^3 :

$$k(x) = x^3 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^3 \rightarrow +\infty$$

et

$$2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \rightarrow 2 > 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 7x^2 + x - 2) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$x^3 \rightarrow -\infty,$$

tandis que

$$2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \rightarrow 2 > 0.$$

Le produit d'une quantité tendant vers $-\infty$ par une quantité qui reste positive et tend vers 2 tend vers $-\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 7x^2 + x - 2) = -\infty.$$

Bilan

Fonction	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$x^2 + x - 1$	$+\infty$	$+\infty$
$x^3 - 3x^2 + 2$	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x + 1$	$-\infty$	$-\infty$
$2x^3 - 7x^2 + x - 2$	$-\infty$	$+\infty$

À retenir

Pour un polynôme, le terme de plus haut degré suffit à prévoir le comportement à l'infini. Ici :

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &\sim x^2, \\ x^3 - 3x^2 + 2 &\sim x^3, \\ -2x^2 + 4x + 1 &\sim -2x^2, \\ 2x^3 - 7x^2 + x - 2 &\sim 2x^3, \end{aligned} \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Les factorisations précédentes permettent de justifier rigoureusement ces comportements.

Exercice 14 - Limites de fonctions polynômes

Énoncé

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes.

1. $x \mapsto 7x^2 - 2x + 4$, 2. $x \mapsto -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$,
3. $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$, 4. $x \mapsto -2x^4 - 7x + 5$.

Méthode

Pour étudier la limite d'un polynôme à l'infini, le terme de plus haut degré détermine son comportement. Afin de le montrer sans sauter d'étapes, on factorise ici chaque polynôme par sa plus grande puissance de x . Le facteur placé entre parenthèses tend alors vers une constante non nulle.

1. $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$

On factorise par x^2 :

$$f(x) = x^2 \left(7 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{4}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$7 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \rightarrow 7 > 0.$$

Le deuxième facteur reste donc positif et proche de 7 pour x suffisamment grand. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^2 - 2x + 4) = +\infty.$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a encore

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{4}{x^2} \rightarrow 0,$$

et donc

$$7 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \rightarrow 7 > 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^2 - 2x + 4) = +\infty.$$

2. $g(x) = -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$

On factorise par x^3 :

$$g(x) = x^3 \left(-2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Le facteur entre parenthèses vérifie, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$,

$$-2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} \longrightarrow -2 < 0.$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^3 \rightarrow +\infty.$$

On multiplie donc une quantité positive arbitrairement grande par une quantité qui tend vers -2 , donc qui est négative pour x suffisamment grand. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right) = -\infty.$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$x^3 \rightarrow -\infty.$$

Le facteur entre parenthèses tend vers -2 : il est donc négatif. Le produit de deux quantités négatives, dont les valeurs absolues deviennent arbitrairement grandes pour la première, devient positif et arbitrairement grand. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right) = +\infty.$$

3. $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$

On factorise par x^2 :

$$h(x) = x^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\frac{2}{3x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0,$$

donc

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} < 0.$$

Par ailleurs,

$$x^2 \rightarrow +\infty$$

aussi bien lorsque $x \rightarrow +\infty$ que lorsque $x \rightarrow -\infty$.

On obtient donc, aux deux extrémités,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \right) = -\infty.$$

4. $k(x) = -2x^4 - 7x + 5$

On factorise par x^4 :

$$k(x) = x^4 \left(-2 - \frac{7}{x^3} + \frac{5}{x^4} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\frac{7}{x^3} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{x^4} \rightarrow 0,$$

donc

$$-2 - \frac{7}{x^3} + \frac{5}{x^4} \rightarrow -2 < 0.$$

De plus, puisque la puissance 4 est paire,

$$x^4 \rightarrow +\infty$$

aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^4 - 7x + 5) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 - 7x + 5) = -\infty.$$

Bilan

Fonction	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$7x^2 - 2x + 4$	$+\infty$	$+\infty$
$-2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$	$+\infty$	$-\infty$
$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$	$-\infty$	$-\infty$
$-2x^4 - 7x + 5$	$-\infty$	$-\infty$

À retenir

Pour un polynôme, le comportement à l'infini est celui de son terme de plus haut degré. Ici :

$$7x^2, \quad -2x^3, \quad -\frac{1}{2}x^2, \quad -2x^4.$$

Le signe du coefficient dominant et la parité du degré permettent donc de retrouver rapidement les résultats obtenus ci-dessus.

Exercice 15 – Limites de fonctions rationnelles

Énoncé

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes, appelées fonctions rationnelles (le numérateur et le dénominateur sont des fonctions polynômes).

$$\begin{array}{ll} \text{1. } x \mapsto \frac{x+1}{x-1}, & \text{2. } x \mapsto \frac{4x+3}{-2x+1}, \\ \text{3. } x \mapsto \frac{3x-1}{6-x}, & \text{4. } x \mapsto \frac{-3-8x}{5-x}. \end{array}$$

Méthode

Dans les quatre expressions, le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré 1. Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, écrire directement le quotient des limites conduirait à une forme du type

$$\frac{\infty}{\infty},$$

qui est une **forme indéterminée**. On ne peut donc pas conclure immédiatement.

La méthode consiste à **diviser le numérateur et le dénominateur par x** . On fait alors apparaître des termes en $1/x$, qui tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ comme lorsque $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{1. } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Pour $x \neq 0$, divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1.$$

Le dénominateur tend vers 1, qui est non nul. On peut donc appliquer la règle de la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a également $1/x \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

2. $g(x) = \frac{4x + 3}{-2x + 1}$

Divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4x + 3}{-2x + 1} \\ &= \frac{\frac{4x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{-2x}{x} + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{4 + \frac{3}{x}}{-2 + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0$, donc $3/x \rightarrow 0$. Par suite,

$$4 + \frac{3}{x} \rightarrow 4, \quad -2 + \frac{1}{x} \rightarrow -2.$$

Comme $-2 \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{-2x + 1} = \frac{4}{-2} = -2.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{-2x + 1} = -2}$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $1/x \rightarrow 0$ et $3/x \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{-2x + 1} = \frac{4 + 0}{-2 + 0} = -2.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{-2x + 1} = -2}$$

3. $h(x) = \frac{3x - 1}{6 - x}$

Divisons encore le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3x - 1}{6 - x} \\ &= \frac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{6}{x} - \frac{x}{x}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{6}{x} - 1}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{6}{x} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{6 - x} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{6 - x} = -3}$$

Limite en $-\infty$

De même, lorsque $x \rightarrow -\infty$, $1/x \rightarrow 0$ et $6/x \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{6 - x} = \frac{3 - 0}{0 - 1} = -3.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{6 - x} = -3}$$

4. $k(x) = \frac{-3 - 8x}{5 - x}$

Commençons par conserver exactement l'ordre des termes de l'énoncé, puis divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{-3 - 8x}{5 - x} \\ &= \frac{-\frac{3}{x} - \frac{8x}{x}}{\frac{5}{x} - \frac{x}{x}} \\ &= \frac{-\frac{3}{x} - 8}{\frac{5}{x} - 1}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$-\frac{3}{x} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{x} \rightarrow 0.$$

On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 - 8x}{5 - x} = \frac{0 - 8}{0 - 1} = \frac{-8}{-1} = 8.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 - 8x}{5 - x} = 8}$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, les termes $-3/x$ et $5/x$ tendent encore vers 0. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - 8x}{5 - x} = \frac{0 - 8}{0 - 1} = 8.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - 8x}{5 - x} = 8}$$

Bilan des résultats

Fonction	$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}$
$\frac{x+1}{x-1}$	1	1
$\frac{4x+3}{-2x+1}$	-2	-2
$\frac{3x-1}{6-x}$	-3	-3
$\frac{-3-8x}{5-x}$	8	8

À retenir

Pour une fonction rationnelle de la forme

$$F(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0,$$

on peut diviser le numérateur et le dénominateur par x :

$$F(x) = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}.$$

Comme $1/x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}.$$

Autrement dit, lorsque le numérateur et le dénominateur ont le même degré, la limite à l'infini est le quotient des coefficients des termes de plus haut degré.

Exercice 16 – Limites de fonctions rationnelles

Énoncé

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & x \mapsto \frac{x^2 + 1}{1 - x}, \quad 2. & x \mapsto \frac{x + 3}{-2x^2 + 1}, \\ 3. & x \mapsto \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2}, \quad 4. & x \mapsto \frac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1}. \end{array}$$

Correction détaillée

Pour une fonction rationnelle, lorsque le numérateur et le dénominateur deviennent tous les deux très grands en valeur absolue, on évite de conclure directement à partir de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. On transforme l'expression en divisant le numérateur et le dénominateur par une puissance de x adaptée. Les termes contenant $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, etc. tendent alors vers 0.

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le numérateur est de degré 2 et le dénominateur de degré 1. Divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 1}{1 - x} \\ &= \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} \\ &= \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}. \end{aligned}$$

Or, lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - 1 \rightarrow -1.$$

Le quotient d'une quantité tendant vers $+\infty$ par une quantité tendant vers le nombre négatif -1 tend donc vers $-\infty$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = -\infty.}$$

Limite en $-\infty$

On utilise exactement la même écriture :

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$x + \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - 1 \rightarrow -1.$$

Un nombre négatif de très grande valeur absolue divisé par un nombre négatif proche de -1 donne une quantité positive de très grande valeur. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty.$$

2. $g(x) = \frac{x + 3}{-2x^2 + 1}$

Le degré du numérateur est 1 et celui du dénominateur est 2. Divisons cette fois le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x + 3}{-2x^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{-2\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{-2 + \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{3}{x^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad -2 + \frac{1}{x^2} \rightarrow -2.$$

Comme le dénominateur tend vers un nombre non nul,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{-2x^2 + 1} = 0.$$

Limite en $-\infty$

Les mêmes limites élémentaires sont valables :

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{-2x^2 + 1} = 0.$$

3. $h(x) = \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2}$

Le degré du numérateur est encore 1 et celui du dénominateur 2. Divisons par x^2 :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2} \\ &= \frac{-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{-5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$-\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad -5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \rightarrow -5.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2} = 0.$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a encore

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Le numérateur de l'expression transformée tend donc vers 0 et son dénominateur vers -5 . Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 1}{-5x^2 + x - 2} = 0.$$

4. $k(x) = \frac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1}$

Le numérateur est de degré 3 et le dénominateur de degré 2. Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1} \\ &= \frac{\frac{4x^3}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{4x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$4x \rightarrow +\infty, \quad \frac{3}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$4x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty, \quad -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow -1.$$

Le quotient tend donc vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1} = -\infty.$$

Limite en $-\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$4x \rightarrow -\infty, \quad \frac{3}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$4x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty, \quad -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow -1.$$

Le quotient d'une quantité tendant vers $-\infty$ par un nombre négatif proche de -1 tend vers $+\infty$.

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 3x - 1}{-x^2 + x + 1} = +\infty.$$

Bilan

Fonction	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$\frac{x^2 + 1}{1 - x}$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{-2x^2 + 1}{-3x - 1}$	0	0
$\frac{-5x^2 + x - 2}{4x^3 - 3x - 1}$	0	0
$\frac{-x^2 + x + 1}{-x^2 + x + 1}$	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 17 – Limites en $+\infty$

Énoncé

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto xe^x \sqrt{x}$.
2. $x \mapsto x - \sqrt{x}$. On factorisera par $\sqrt{x}$.
3. $x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$. On factorisera le numérateur par $\sqrt{x}$.
4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. On factorisera le dénominateur par $\sqrt{x}$.

Correction détaillée

Pour les quatre questions, on étudie la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. Les expressions contenant $\sqrt{x}$ sont définies pour $x \geq 0$ (et, pour la troisième, le dénominateur impose $x > 0$). Cela ne pose aucune difficulté pour une étude en $+\infty$.

1. $f(x) = xe^x \sqrt{x}$

On étudie séparément les trois facteurs :

$$x \longrightarrow +\infty, \quad e^x \longrightarrow +\infty, \quad \sqrt{x} \longrightarrow +\infty.$$

Pour $x > 0$, ces trois facteurs sont positifs. Leur produit devient donc arbitrairement grand.

On peut aussi regrouper les puissances de x :

$$x\sqrt{x} = x^{3/2},$$

d'où

$$f(x) = x^{3/2}e^x.$$

Or

$$x^{3/2} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad e^x \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x \sqrt{x} = +\infty.}$$

2. $g(x) = x - \sqrt{x}$

Une lecture directe donne la forme

$$+\infty - +\infty,$$

qui est une forme indéterminée. Il faut donc transformer l'expression.

Comme demandé, factorisons par $\sqrt{x}$. Pour $x \geq 0$,

$$x = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x} &= \sqrt{x} \sqrt{x} - \sqrt{x} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1). \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x} \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sqrt{x} - 1 \longrightarrow +\infty.$$

Les deux facteurs sont positifs à partir d'un certain rang, donc

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = +\infty.$$

3. $h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$:

$$2x+1 \longrightarrow +\infty, \quad \sqrt{x} \longrightarrow +\infty.$$

On obtient donc, avant transformation, une forme du type

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Comme demandé, factorisons le numérateur par $\sqrt{x}$. On utilise encore

$$x = \sqrt{x} \sqrt{x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 2\sqrt{x} \sqrt{x} + 1 \\ &= \sqrt{x} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

En effet,

$$\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 1.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sqrt{x} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$2\sqrt{x} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

4. $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x} \longrightarrow +\infty, \quad x+1 \longrightarrow +\infty.$$

La lecture directe conduit donc à la forme indéterminée

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Comme demandé, factorisons le dénominateur par $\sqrt{x}$. Puisque

$$x = \sqrt{x} \sqrt{x},$$

on a

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x} \sqrt{x} + 1 \\ &= \sqrt{x} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}. \end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{x} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty.$$

L'inverse d'une quantité positive qui tend vers $+\infty$ tend vers 0. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0.}$$

Bilan

	Fonction	Limite en $+\infty$
1	$xe^x\sqrt{x}$	$+\infty$
2	$x - \sqrt{x}$	$+\infty$
3	$\frac{2x+1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$
4	$\frac{\sqrt{x}}{x+1}$	0

Exercice 18 – Limites latérales

Énoncé

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3}, & 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3}, \\ 3. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{1-x}, & 4. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2}{1-x}. \end{array}$$

Correction détaillée

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3}$$

La condition $x > 3$ signifie que x s'approche de 3 par des valeurs *supérieures* à 3. On note aussi cette situation $x \rightarrow 3^+$.

Comme $x > 3$, on a

$$x - 3 > 0.$$

Lorsque x se rapproche de 3, la différence $x - 3$ se rapproche de 0, tout en restant positive :

$$x - 3 \longrightarrow 0^+.$$

Or l'inverse d'un nombre positif qui devient de plus en plus petit devient positif et arbitrairement grand :

$$\frac{1}{x-3} \longrightarrow +\infty.$$

Par exemple,

x	3,1	3,01	3,001
$x - 3$	0,1	0,01	0,001
$\frac{1}{x-3}$	10	100	1000

On voit bien que les valeurs augmentent sans borne.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3}$$

Cette fois, $x < 3$: x s'approche donc de 3 par des valeurs *inférieures* à 3. On note aussi $x \rightarrow 3^-$.

Puisque $x < 3$,

$$x - 3 < 0.$$

Quand x se rapproche de 3, $x - 3$ se rapproche de 0 en restant négatif :

$$x - 3 \longrightarrow 0^-.$$

L'inverse d'un nombre négatif dont la valeur absolue devient de plus en plus petite devient négatif et arbitrairement grand en valeur absolue :

$$\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty.$$

Par exemple,

x	2,9	2,99	2,999
$x-3$	-0,1	-0,01	-0,001
$\frac{1}{x-3}$	-10	-100	-1000

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{1-x}$

La condition $x > 1$ signifie que $x \rightarrow 1^+$.

Pour déterminer le signe du dénominateur, partons de

$$x > 1.$$

En multipliant par -1 , le sens de l'inégalité s'inverse :

$$-x < -1.$$

Puis on ajoute 1 :

$$1-x < 0.$$

Ainsi, lorsque $x \rightarrow 1^+$,

$$1-x \rightarrow 0^-.$$

Le numérateur vaut toujours $2 > 0$. Nous divisons donc un nombre positif par un nombre négatif qui se rapproche de 0. Le quotient devient négatif et sa valeur absolue devient arbitrairement grande :

$$\frac{2}{1-x} \rightarrow -\infty.$$

Exemples :

x	1,1	1,01	1,001
$1-x$	-0,1	-0,01	-0,001
$\frac{2}{1-x}$	-20	-200	-2000

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{1-x} = -\infty$$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2}{1-x}$

Ici, $x < 1$, donc $x \rightarrow 1^-$.

Partons de

$$x < 1.$$

En multipliant par -1 , on obtient

$$-x > -1,$$

puis, en ajoutant 1,

$$1 - x > 0.$$

Lorsque x se rapproche de 1 par valeurs inférieures,

$$1 - x \longrightarrow 0^+.$$

Le numérateur 2 est positif. Le quotient d'un nombre positif par un nombre positif qui se rapproche de 0 devient positif et arbitrairement grand :

$$\frac{2}{1 - x} \longrightarrow +\infty.$$

Exemples :

x	0,9	0,99	0,999
$1 - x$	0,1	0,01	0,001
$\frac{2}{1 - x}$	20	200	2000

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 - x} = +\infty$$

Bilan

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty, & \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{1 - x} = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 - x} = +\infty. \end{array}$$

À retenir. Pour une limite de la forme $\frac{a}{u(x)}$ avec $a > 0$ et $u(x) \rightarrow 0$, il est indispensable de déterminer si $u(x)$ tend vers 0^+ ou vers 0^- . C'est ce signe qui permet de décider entre $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 19 – Limites latérales

Énoncé

Calculer. Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-3x}{2x-4}, & 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x}{2x-4}, \\ 3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2-10}{6-2x}, & 4. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2-10}{6-2x}. \end{array}$$

Correction détaillée

Pour une limite latérale d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0, il ne suffit pas d'écrire que le dénominateur tend vers 0. Il faut déterminer s'il tend vers 0^+ ou vers 0^- . Le signe du numérateur permet ensuite de déterminer si le quotient tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-3x}{2x-4}$$

La condition $x > 2$ signifie que x s'approche de 2 *par valeurs supérieures*, donc par la droite.

Étudions séparément le numérateur et le dénominateur.

Pour le numérateur :

$$x \rightarrow 2^+ \implies -3x \rightarrow -6.$$

Le numérateur tend donc vers un nombre strictement négatif.

Pour le dénominateur, on factorise :

$$2x - 4 = 2(x - 2).$$

Comme $x > 2$, on a

$$x - 2 > 0.$$

Lorsque x se rapproche de 2 par valeurs supérieures,

$$x - 2 \rightarrow 0^+,$$

donc

$$2(x - 2) \rightarrow 0^+.$$

Ainsi,

$$-3x \rightarrow -6 < 0 \quad \text{et} \quad 2x - 4 \rightarrow 0^+.$$

Un nombre négatif non nul divisé par un nombre positif de plus en plus petit donne un nombre négatif dont la valeur absolue devient arbitrairement grande :

$$\frac{\text{négatif}}{\text{très petit positif}} \longrightarrow -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-3x}{2x-4} = -\infty$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x}{2x - 4}$$

Cette fois, $x < 2$: x s'approche de 2 par valeurs inférieures, donc par la gauche.

Le numérateur vérifie toujours

$$-3x \rightarrow -6 < 0.$$

Pour le dénominateur :

$$2x - 4 = 2(x - 2).$$

Puisque $x < 2$,

$$x - 2 < 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 2^-$,

$$x - 2 \rightarrow 0^-,$$

d'où

$$2x - 4 \rightarrow 0^-.$$

Nous avons donc

$$-3x \rightarrow -6 < 0 \quad \text{et} \quad 2x - 4 \rightarrow 0^-.$$

Le quotient d'un nombre négatif par un nombre négatif est positif. Comme le dénominateur devient arbitrairement petit en valeur absolue, le quotient devient arbitrairement grand :

$$\frac{\text{négatif}}{\text{très petit négatif}} \longrightarrow +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x}{2x - 4} = +\infty$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x}$$

Ici, x s'approche de 3 par valeurs supérieures.

Commençons par le numérateur. La fonction $x \mapsto x^2 - 10$ est continue en 3, donc

$$x^2 - 10 \rightarrow 3^2 - 10 = 9 - 10 = -1.$$

Ainsi,

$$x^2 - 10 \rightarrow -1 < 0.$$

Pour le dénominateur, écrivons

$$6 - 2x = -2(x - 3).$$

Comme $x > 3$,

$$x - 3 > 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 3^+$,

$$x - 3 \rightarrow 0^+.$$

En multipliant par -2 , le signe s'inverse :

$$-2(x - 3) \rightarrow 0^-.$$

Donc

$$6 - 2x \rightarrow 0^-.$$

Finalement,

$$x^2 - 10 \rightarrow -1 < 0 \quad \text{et} \quad 6 - 2x \rightarrow 0^-.$$

Le quotient est donc positif et sa valeur devient arbitrairement grande :

$$\frac{\text{négatif}}{\text{très petit négatif}} \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x} = +\infty$$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x}$

Cette fois, x s'approche de 3 par valeurs inférieures.

Pour le numérateur :

$$x^2 - 10 \rightarrow -1 < 0.$$

Pour le dénominateur :

$$6 - 2x = -2(x - 3).$$

Comme $x < 3$,

$$x - 3 < 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 3^-$,

$$x - 3 \rightarrow 0^-.$$

En multipliant par -2 , on obtient

$$-2(x - 3) \rightarrow 0^+,$$

donc

$$6 - 2x \rightarrow 0^+.$$

Ainsi,

$$x^2 - 10 \rightarrow -1 < 0 \quad \text{et} \quad 6 - 2x \rightarrow 0^+.$$

Le quotient est négatif et sa valeur absolue devient arbitrairement grande :

$$\frac{\text{négatif}}{\text{très petit positif}} \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x} = -\infty$$

Bilan

	Limite	Résultat
1	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-3x}{2x - 4}$	$-\infty$
2	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-3x}{2x - 4}$	$+\infty$
3	$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x}$	$+\infty$
4	$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 - 10}{6 - 2x}$	$-\infty$

Exercice 20 - Limites

Énoncé

Déterminer les limites suivantes.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x-2)^2}$$

Correction détaillée

1. Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

Lorsque $x \rightarrow 1$, on a

$$x - 1 \rightarrow 0.$$

Mais le dénominateur est un **carré**. Pour tout $x \neq 1$,

$$(x-1)^2 > 0.$$

Ainsi, que x s'approche de 1 par la gauche ou par la droite,

$$(x-1)^2 \rightarrow 0^+.$$

Le numérateur est constant et strictement positif :

$$1 > 0.$$

On utilise alors la règle

$$\frac{\text{nombre positif}}{\text{nombre positif qui tend vers } 0} \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Pour bien voir pourquoi les deux côtés donnent le même résultat, écrivons les limites latérales :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Les deux limites latérales étant égales, la limite en 1 existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut $+\infty$.

2. Calcul de $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x-2)^2}$

Étudions séparément le numérateur et le dénominateur.

Numérateur. Lorsque $x \rightarrow \frac{1}{2}$,

$$-2x \rightarrow -2 \times \frac{1}{2} = -1.$$

Le numérateur tend donc vers un nombre **strictement négatif** :

$$-2x \rightarrow -1 < 0.$$

Dénominateur. Lorsque $x \rightarrow \frac{1}{2}$,

$$4x - 2 \rightarrow 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 0.$$

Comme cette expression est élevée au carré,

$$(4x - 2)^2 \geq 0,$$

et, pour $x \neq \frac{1}{2}$,

$$(4x - 2)^2 > 0.$$

Par conséquent,

$$(4x - 2)^2 \rightarrow 0^+.$$

Nous avons donc un numérateur qui tend vers -1 , nombre négatif non nul, et un dénominateur positif qui devient arbitrairement petit :

$$\frac{-2x}{(4x - 2)^2} \longrightarrow \frac{-1}{0^+}.$$

Or

$$\frac{\text{nombre négatif}}{\text{nombre positif qui tend vers } 0} \longrightarrow -\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x - 2)^2} = -\infty.$$

Ici encore, le carré au dénominateur impose le même signe des deux côtés :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{-2x}{(4x - 2)^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{-2x}{(4x - 2)^2} = -\infty.$$

Bilan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2x}{(4x - 2)^2} = -\infty$$

Idée essentielle : lorsqu'un dénominateur est un carré et tend vers 0, il tend vers 0^+ . Il suffit alors d'étudier le signe du numérateur pour savoir si le quotient tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exercice 21 — Variations et limites d'une fonction polynôme

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement à l'aide de la calculatrice les résultats trouvés.

1. Étude du sens de variation de f

La fonction f est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dérive terme à terme :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Or

$$(x^2)' = 2x, \quad (-2x)' = -2, \quad 5' = 0.$$

Ainsi,

$$f'(x) = 2x - 2.$$

On peut factoriser :

$$f'(x) = 2(x - 1).$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout d'abord

$$f'(x) = 0.$$

Donc

$$2(x - 1) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Comme $2 > 0$, le signe de $f'(x) = 2(x - 1)$ est exactement le signe de $x - 1$:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Nous utilisons maintenant le lien entre le signe de la dérivée et les variations :

- si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante ;
- si $f'(x) > 0$, alors f est croissante.

Par conséquent :

$$f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 1]$$

et

$$f \text{ est strictement croissante sur } [1, +\infty[.$$

Le changement de sens de variation se produit en $x = 1$. Calculons la valeur correspondante :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2 \times 1 + 5 \\ &= 1 - 2 + 5 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un minimum égal à 4, atteint pour $x = 1$:

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 4.}$$

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en mettant f sous forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 5 \\ &= (x^2 - 2x + 1) + 4 \\ &= (x - 1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Comme $(x - 1)^2 \geq 0$, on a bien $f(x) \geq 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

Nous avons

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Pour étudier proprement son comportement à l'infini, factorisons par la plus grande puissance de x , c'est-à-dire x^2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 5 \\ &= x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right). \end{aligned}$$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \rightarrow 1.$$

Ainsi,

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \rightarrow (+\infty) \times 1 = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

Limite lorsque $x \rightarrow -\infty$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, il faut bien remarquer que le carré rend x^2 positif :

$$x^2 \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$\frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{x^2} \rightarrow 0,$$

donc

$$1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \rightarrow (+\infty) \times 1 = +\infty,$$

et finalement

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.}$$

3. Tableau de variation et vérification graphique

Nous rassemblons les résultats obtenus :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
- f est décroissante jusqu'à $x = 1$;
- $f(1) = 4$;
- f est croissante à partir de $x = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		—	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau montre clairement que le point le plus bas de la courbe est obtenu pour $x = 1$ et vaut 4.

Représentation graphique

La forme canonique

$$f(x) = (x - 1)^2 + 4$$

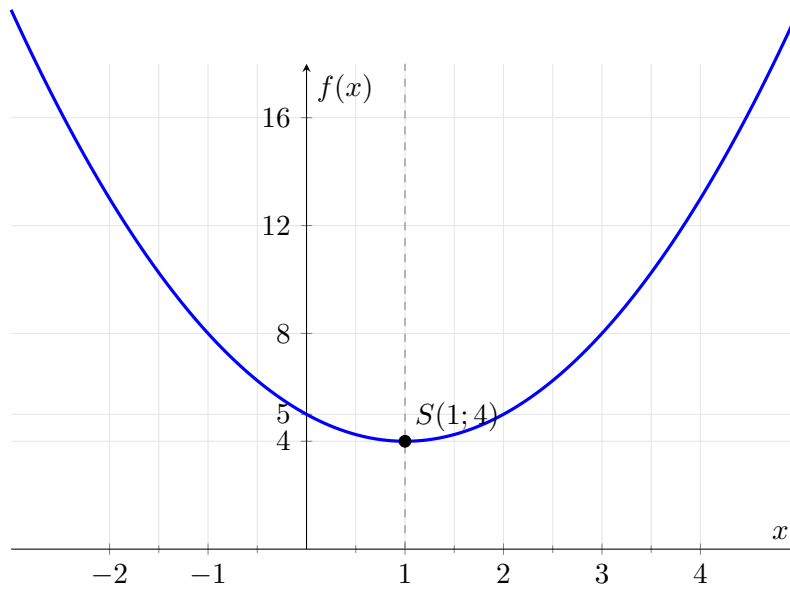
montre que la courbe représentative de f est une parabole :

- ouverte vers le haut ;
- de sommet $S(1; 4)$;
- d'axe de symétrie la droite $x = 1$.

Quelques valeurs permettent de contrôler le tracé :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	5	4	5	8

On remarque la symétrie autour de $x = 1$: par exemple $f(0) = f(2) = 5$ et $f(-1) = f(3) = 8$.



Le graphique confirme donc les résultats du tableau : la courbe descend jusqu'au sommet $S(1; 4)$, puis elle remonte. Aux deux extrémités, elle monte sans borne, ce qui correspond aux deux limites égales à $+\infty$.

Bilan

$$\begin{aligned}
 &f'(x) = 2(x - 1), \\
 &f \text{ décroît sur }]-\infty, 1] \text{ puis croît sur } [1, +\infty[, \\
 &f(1) = 4 \text{ est le minimum de } f, \\
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.
 \end{aligned}$$