

Fiche d'exercices — Nombres complexes

Terminale — Mathématiques expertes

Cette fiche reprend les notions du cours : forme algébrique, calculs dans $\mathbb{C}$, conjugué, équations complexes et formule du binôme de Newton. Les résultats doivent être donnés sous forme algébrique lorsque cela est demandé.

Exercice 1 — Automatismes sur la forme algébrique

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire, puis préciser s'il est réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

1. $z_1 = 5 - 3i$
2. $z_2 = -7i$
3. $z_3 = \sqrt{3}$
4. $z_4 = (2 + i)^2 - (3 + 4i)$
5. $z_5 = i^{2026} + i^{2027}$

Exercice 2 — Calculs dans $\mathbb{C}$

Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique.

1. $A = 4 - 3i - (2i - 5)$
2. $B = (3 - 2i)(1 + 4i)$
3. $C = (1 - 3i)^2$
4. $D = (2 + i)^3$
5. $E = \frac{1}{3 - 2i}$
6. $F = \frac{2 + 5i}{1 - 2i}$
7. $G = \frac{1 - i}{1 + i} + \frac{1 + i}{1 - i}$

Exercice 3 — Égalité de nombres complexes

Déterminer les réels x et y dans chacun des cas suivants.

1. $(2x - 3) + i(y + 4) = 5 - 2i$
2. $(x + iy)(2 - i) = 7 + i$
3. $x^2 - 4 + i(2y - 6) = 0$
4. $(x + y) + i(x - y) = 4 + 2i$

Exercice 4 — Conjugué et propriétés

1. Donner le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = 3 - 5i, \quad z_2 = (2 + i)(1 - 3i), \quad z_3 = \frac{4 - i}{2 + 3i}.$$

2. Soient $z = 2 - 3i$ et $w = -1 + 4i$. Calculer de deux manières différentes :

$$\overline{z + w}, \quad \overline{zw}, \quad \overline{z^3}.$$

3. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les nombres $z + \bar{z}$ et $z\bar{z}$ sont réels.
 4. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $z - \bar{z}$ est imaginaire pur.

Exercice 5 — Équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $3z - 5 = 2z + 4i$
2. $(2 - i)z = 3 + 5i$
3. $\frac{z - 1}{1 + i} = 2 - i$
4. $2z + \bar{z} = 6 + 5i$
5. $3z - 2\bar{z} = 1 - 10i$
6. $z + \bar{z} = 8$ et $z - \bar{z} = -6i$

Exercice 6 — Paramètres réels

Dans cet exercice, a et b désignent des nombres réels.

1. Déterminer a pour que le nombre $z = (a - 2) + (a^2 - 9)i$ soit réel.
2. Déterminer a pour que le nombre $w = (a^2 - 4) + (3a + 6)i$ soit imaginaire pur.
3. Déterminer a et b pour que

$$(a + bi)(2 - i) = 7 + i.$$

4. Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles

$$\frac{m + i}{1 - mi}$$

est un nombre réel.

Exercice 7 — Binôme de Newton

1. Recopier et compléter la ligne d'ordre 7 du triangle de Pascal.
2. Développer et réduire :

$$A = (z + 2)^5, \quad B = (2z - 1)^6, \quad C = (1 + i)^8.$$

3. Déterminer le coefficient de z^4 dans le développement de $(2z - 3)^7$.
4. Déterminer le terme indépendant de z dans le développement de

$$\left(z + \frac{2}{z}\right)^8,$$

où $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 8 — Synthèse

On considère le nombre complexe $z = 1 + 2i$.

1. Calculer z^2 , z^3 et z^4 sous forme algébrique.
2. Calculer $\bar{z}$, puis vérifier que $z\bar{z} = 5$.
3. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ sans effectuer de quotient direct.
4. Simplifier le nombre

$$S = z^4 + \bar{z}^4.$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $z^n + \bar{z}^n$ est réel.

Exercice 9 — Démonstration

Soient z et w deux nombres complexes.

1. Démontrer que

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

2. Démontrer que

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

4. Démontrer que, si $z \neq 0$, alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Exercice 10 — Problème de synthèse

On cherche les nombres complexes z tels que

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

1. Montrer que cette équation équivaut à $(z - 1)^2 = -4$.
2. Déterminer les deux solutions complexes de l'équation.
3. Noter z_1 et z_2 ces solutions. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\bar{z}_1$.
4. Calculer $z_1^5 + z_2^5$ sans développer directement les puissances cinquièmes.

Pour aller plus loin. Déterminer, pour tout entier naturel n , une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) définie par $u_n = z_1^n + z_2^n$.

Exercice 1 — Automatismes sur la forme algébrique

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire, puis préciser s'il est réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

$$z_1 = 5 - 3i, \quad z_2 = -7i, \quad z_3 = \sqrt{3}, \quad z_4 = (2 + i)^2 - (3 + 4i), \quad z_5 = i^{2026} + i^{2027}.$$

Rappel : reconnaître la forme algébrique

Tout nombre complexe s'écrit sous la forme

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

où $i^2 = -1$.

Dans cette écriture :

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = a} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z) = b}.$$

Attention : la partie imaginaire est le *nombre réel* b , et non bi .

On retiendra également :

- z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 0$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$;
- si les deux parties sont non nulles, z n'est ni réel ni imaginaire pur.

Le nombre 0 est un cas particulier : il est à la fois réel et imaginaire pur, car $0 = 0 + 0i$.

1. Étude de $z_1 = 5 - 3i$

Le nombre est déjà écrit sous forme algébrique $a + bi$:

$$z_1 = 5 + (-3)i.$$

On lit donc directement

$$\operatorname{Re}(z_1) = 5, \quad \operatorname{Im}(z_1) = -3.$$

La partie imaginaire n'est pas nulle, donc z_1 n'est pas réel. La partie réelle n'est pas nulle, donc z_1 n'est pas imaginaire pur.

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_1) = 5}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_1) = -3}.$$

Ainsi, z_1 **n'est ni réel ni imaginaire pur**.

2. Étude de $z_2 = -7i$

Pour faire apparaître explicitement la forme $a + bi$, on écrit

$$z_2 = 0 - 7i = 0 + (-7)i.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Re}(z_2) = 0, \quad \operatorname{Im}(z_2) = -7.$$

Comme sa partie réelle est nulle, z_2 est un imaginaire pur. Comme sa partie imaginaire vaut $-7 \neq 0$, il n'est pas réel.

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_2) = 0}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_2) = -7}.$$

Donc z_2 est imaginaire pur.

3. Étude de $z_3 = \sqrt{3}$

Le nombre $\sqrt{3}$ est un nombre réel. Pour l'écrire sous forme algébrique, on peut écrire

$$z_3 = \sqrt{3} + 0i.$$

On obtient alors

$$\operatorname{Re}(z_3) = \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im}(z_3) = 0.$$

Puisque sa partie imaginaire est nulle, z_3 est réel. De plus, $\sqrt{3} \neq 0$, donc sa partie réelle n'est pas nulle : il n'est pas imaginaire pur.

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_3) = \sqrt{3}}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_3) = 0}.$$

Donc z_3 est réel.

4. Étude de $z_4 = (2 + i)^2 - (3 + 4i)$

Ici, il faut d'abord effectuer le calcul pour obtenir la forme algébrique.

Développons le carré :

$$\begin{aligned} (2 + i)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2 \\ &= 4 + 4i + i^2. \end{aligned}$$

Or $i^2 = -1$. Donc

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} z_4 &= (2 + i)^2 - (3 + 4i) \\ &= (3 + 4i) - (3 + 4i) \\ &= 3 + 4i - 3 - 4i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sous forme algébrique,

$$z_4 = 0 + 0i.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Re}(z_4) = 0, \quad \operatorname{Im}(z_4) = 0.$$

Comme sa partie imaginaire est nulle, z_4 est réel. Comme sa partie réelle est également nulle, z_4 est aussi imaginaire pur. C'est précisément le cas particulier du nombre nul.

$$\boxed{z_4 = 0}, \quad \boxed{\operatorname{Re}(z_4) = 0}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_4) = 0}.$$

Ainsi, $z_4 = 0$ est à la fois réel et imaginaire pur.

5. Étude de $z_5 = i^{2026} + i^{2027}$

Cette question utilise les puissances de i . Commençons par rappeler les quatre premières :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

Ensuite,

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1.$$

Les puissances de i se répètent donc par cycles de longueur 4 :

$$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$$

Calcul de i^{2026}

On cherche le reste de la division de 2026 par 4 :

$$2026 = 4 \times 506 + 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} i^{2026} &= i^{4 \times 506 + 2} \\ &= (i^4)^{506} i^2 \\ &= 1^{506} \times (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Calcul de i^{2027}

De même,

$$2027 = 4 \times 506 + 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} i^{2027} &= i^{4 \times 506 + 3} \\ &= (i^4)^{506} i^3 \\ &= 1^{506} \times (-i) \\ &= -i. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer z_5 :

$$\begin{aligned} z_5 &= i^{2026} + i^{2027} \\ &= -1 + (-i) \\ &= -1 - i. \end{aligned}$$

Le nombre est désormais sous forme algébrique :

$$z_5 = -1 + (-1)i.$$

On lit donc

$$\operatorname{Re}(z_5) = -1, \quad \operatorname{Im}(z_5) = -1.$$

Les deux parties sont non nulles : z_5 n'est donc ni réel ni imaginaire pur.

$$\boxed{z_5 = -1 - i},$$

$$\boxed{\operatorname{Re}(z_5) = -1},$$

$$\boxed{\operatorname{Im}(z_5) = -1}.$$

Ainsi, z_5 n'est ni réel ni imaginaire pur.

Bilan

Nombre	Forme algébrique	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
z_1	$5 - 3i$	5	-3
z_2	$-7i$	0	-7
z_3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0
z_4	0	0	0
z_5	$-1 - i$	-1	-1

Classification finale :

z_1 : ni réel ni imaginaire pur,
 z_2 : imaginaire pur,
 z_3 : réel,
 z_4 : réel et imaginaire pur,
 z_5 : ni réel ni imaginaire pur.

Exercice 2 — Calculs dans $\mathbb{C}$

Corrigé détaillé

Énoncé. Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique, c'est-à-dire sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A &= 4 - 3i - (2i - 5), & B &= (3 - 2i)(1 + 4i), & C &= (1 - 3i)^2, \\ D &= (2 + i)^3, & E &= \frac{1}{3 - 2i}, & F &= \frac{2 + 5i}{1 - 2i}, \\ G &= \frac{1 - i}{1 + i} + \frac{1 + i}{1 - i}. \end{aligned}$$

Rappel essentiel

On utilise constamment

$$i^2 = -1.$$

Une expression est sous *forme algébrique* lorsqu'elle est écrite sous la forme

$$a + bi.$$

Pour un quotient contenant un nombre complexe au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué** du dénominateur. En effet,

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

qui est un nombre réel.

1. Calcul de A

On part de

$$A = 4 - 3i - (2i - 5).$$

Le signe $-$ placé devant la parenthèse change le signe de chacun de ses termes :

$$-(2i - 5) = -2i + 5.$$

Donc

$$\begin{aligned} A &= 4 - 3i - 2i + 5 \\ &= (4 + 5) + (-3i - 2i) \\ &= 9 - 5i. \end{aligned}$$

$A = 9 - 5i$

2. Calcul de B

On développe le produit en distribuant chaque terme :

$$B = (3 - 2i)(1 + 4i).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B &= 3 \times 1 + 3 \times 4i + (-2i) \times 1 + (-2i) \times 4i \\ &= 3 + 12i - 2i - 8i^2. \end{aligned}$$

Or $i^2 = -1$, donc

$$-8i^2 = -8(-1) = 8.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} B &= 3 + 12i - 2i + 8 \\ &= (3 + 8) + (12i - 2i) \\ &= 11 + 10i. \end{aligned}$$

$$B = 11 + 10i$$

3. Calcul de C

On utilise l'identité remarquable

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Avec $a = 1$ et $b = 3i$:

$$\begin{aligned} C &= (1 - 3i)^2 \\ &= 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 1 - 6i + 9i^2. \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$,

$$9i^2 = -9.$$

Donc

$$C = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$$

$$C = -8 - 6i$$

4. Calcul de D

Nous devons calculer

$$D = (2 + i)^3.$$

Pour éviter un développement trop rapide, calculons d'abord le carré :

$$\begin{aligned} (2 + i)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2 \\ &= 4 + 4i - 1 \\ &= 3 + 4i. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D &= (2 + i)^2(2 + i) \\ &= (3 + 4i)(2 + i). \end{aligned}$$

Développons :

$$\begin{aligned} D &= 3 \times 2 + 3 \times i + 4i \times 2 + 4i \times i \\ &= 6 + 3i + 8i + 4i^2 \\ &= 6 + 11i - 4 \\ &= 2 + 11i. \end{aligned}$$

$$D = 2 + 11i$$

5. Calcul de E

On a

$$E = \frac{1}{3 - 2i}.$$

Le dénominateur n'est pas réel. Son conjugué est $3 + 2i$. On multiplie donc en haut et en bas par $3 + 2i$:

$$E = \frac{1}{3 - 2i} \times \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{3 + 2i}{(3 - 2i)(3 + 2i)}.$$

Au dénominateur, on reconnaît $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}(3 - 2i)(3 + 2i) &= 3^2 - (2i)^2 \\ &= 9 - 4i^2 \\ &= 9 - 4(-1) \\ &= 13.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E = \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$$

$$E = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

6. Calcul de F

On a

$$F = \frac{2 + 5i}{1 - 2i}.$$

Le conjugué de $1 - 2i$ est $1 + 2i$. Multiplions le numérateur et le dénominateur par ce conjugué :

$$F = \frac{(2 + 5i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}.$$

Calculons d'abord le dénominateur :

$$\begin{aligned}(1 - 2i)(1 + 2i) &= 1^2 - (2i)^2 \\ &= 1 - 4i^2 \\ &= 1 + 4 = 5.\end{aligned}$$

Calculons maintenant le numérateur :

$$\begin{aligned}(2 + 5i)(1 + 2i) &= 2 + 4i + 5i + 10i^2 \\ &= 2 + 9i - 10 \\ &= -8 + 9i.\end{aligned}$$

Donc

$$F = \frac{-8 + 9i}{5} = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i.$$

$$F = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$$

7. Calcul de G

On considère

$$G = \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}.$$

Nous allons mettre séparément chacun des deux quotients sous forme algébrique.

Premier quotient

Le conjugué de $1+i$ est $1-i$:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}.$$

Au dénominateur,

$$(1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2.$$

Au numérateur,

$$\begin{aligned}(1-i)^2 &= 1 - 2i + i^2 \\ &= 1 - 2i - 1 \\ &= -2i.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Deuxième quotient

Le conjugué de $1-i$ est $1+i$:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}.$$

Le dénominateur vaut encore 2. De plus,

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 1 + 2i - 1 \\ &= 2i.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i.$$

Finalement,

$$G = -i + i = 0.$$

Comme $0 = 0 + 0i$, il s'agit bien d'une forme algébrique.

$G = 0$

Bilan

$$A = 9 - 5i,$$

$$B = 11 + 10i,$$

$$C = -8 - 6i,$$

$$D = 2 + 11i,$$

$$E = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i,$$

$$F = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}i,$$

$$G = 0.$$

Exercice 3 – Égalité de nombres complexes

Corrigé détaillé

Énoncé. Déterminer les réels x et y dans chacun des cas suivants :

$$1. (2x - 3) + i(y + 4) = 5 - 2i.$$

$$2. (x + iy)(2 - i) = 7 + i.$$

$$3. x^2 - 4 + i(2y - 6) = 0.$$

$$4. (x + y) + i(x - y) = 4 + 2i.$$

Rappel : égalité de deux nombres complexes

Un nombre complexe sous forme algébrique s'écrit

$$z = a + ib,$$

où a est sa partie réelle et b sa partie imaginaire.

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leurs parties réelles sont égales *et* leurs parties imaginaires sont égales :

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

C'est ce principe que nous allons utiliser dans chaque question.

1. Résoudre $(2x - 3) + i(y + 4) = 5 - 2i$

Le membre de gauche est déjà sous forme algébrique :

$$(2x - 3) + i(y + 4).$$

Sa partie réelle est donc $2x - 3$ et sa partie imaginaire est $y + 4$.

Le membre de droite s'écrit

$$5 - 2i = 5 + i(-2).$$

Sa partie réelle est 5 et sa partie imaginaire est -2 .

Puisque les deux nombres complexes sont égaux, on identifie séparément les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} 2x - 3 = 5, \\ y + 4 = -2. \end{cases}$$

Réolvons la première équation :

$$2x - 3 = 5 \iff 2x = 8 \iff x = 4.$$

Puis la seconde :

$$y + 4 = -2 \iff y = -2 - 4 \iff y = -6.$$

$$x = 4 \quad \text{et} \quad y = -6.$$

Vérification. En remplaçant x par 4 et y par -6 :

$$(2 \times 4 - 3) + i(-6 + 4) = 5 - 2i.$$

L'égalité est bien vérifiée.

2. Résoudre $(x + iy)(2 - i) = 7 + i$

Ici, il faut d'abord développer le produit afin de faire apparaître clairement la partie réelle et la partie imaginaire.

On écrit :

$$\begin{aligned}(x + iy)(2 - i) &= x(2 - i) + iy(2 - i) \\ &= 2x - xi + 2iy - i^2y.\end{aligned}$$

Or

$$i^2 = -1,$$

donc

$$-i^2y = -(-1)y = y.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(x + iy)(2 - i) &= 2x + y - xi + 2iy \\ &= (2x + y) + i(-x + 2y).\end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$(2x + y) + i(-x + 2y) = 7 + i.$$

Comme

$$7 + i = 7 + i \times 1,$$

on identifie les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

Résolvons ce système pas à pas. De la première équation,

$$y = 7 - 2x.$$

On remplace cette expression de y dans la seconde équation :

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1, \\ -x + 2(7 - 2x) &= 1, \\ -x + 14 - 4x &= 1, \\ -5x + 14 &= 1, \\ -5x &= -13, \\ x &= \frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} y &= 7 - 2x \\ &= 7 - 2 \times \frac{13}{5} \\ &= \frac{35}{5} - \frac{26}{5} \\ &= \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

$$x = \frac{13}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{9}{5}.$$

Vérification. On a

$$x + iy = \frac{13}{5} + \frac{9}{5}i.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{13}{5} + \frac{9}{5}i\right)(2 - i) &= \frac{26}{5} - \frac{13}{5}i + \frac{18}{5}i - \frac{9}{5}i^2 \\ &= \frac{26}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5}i \\ &= 7 + i. \end{aligned}$$

3. Résoudre $x^2 - 4 + i(2y - 6) = 0$

Le nombre 0 peut être écrit sous forme algébrique :

$$0 = 0 + 0i.$$

L'équation s'écrit donc

$$(x^2 - 4) + i(2y - 6) = 0 + 0i.$$

Par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Pour la première équation :

$$x^2 - 4 = 0.$$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

Ainsi,

$$(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul, donc

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0,$$

d'où

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Pour la seconde équation :

$$2y - 6 = 0 \iff 2y = 6 \iff y = 3.$$

Il y a donc deux couples possibles.

$$(x, y) = (2, 3) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-2, 3).$$

Vérification. Dans les deux cas, $x^2 = 4$ et $y = 3$. Par conséquent,

$$x^2 - 4 + i(2y - 6) = 4 - 4 + i(6 - 6) = 0.$$

4. Résoudre $(x + y) + i(x - y) = 4 + 2i$

Le membre de gauche est déjà sous forme algébrique. Sa partie réelle est $x + y$ et sa partie imaginaire est $x - y$.

Le membre de droite est

$$4 + 2i,$$

de partie réelle 4 et de partie imaginaire 2.

On obtient donc le système

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Additionnons les deux équations membre à membre :

$$(x + y) + (x - y) = 4 + 2.$$

Les termes $+y$ et $-y$ s'annulent :

$$2x = 6,$$

d'où

$$x = 3.$$

On remplace alors x par 3 dans la première équation :

$$3 + y = 4,$$

donc

$$y = 1.$$

$$x = 3 \quad \text{et} \quad y = 1.$$

Vérification. Avec $x = 3$ et $y = 1$:

$$(x + y) + i(x - y) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i.$$

Bilan

Les solutions des quatre questions sont :

Question	Solution
1	$(x, y) = (4, -6)$
2	$(x, y) = \left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)$
3	$(x, y) = (2, 3) \text{ ou } (-2, 3)$
4	$(x, y) = (3, 1)$

Exercice 4 — Conjugué et propriétés

Corrigé détaillé

Rappel essentiel

Tout nombre complexe s'écrit sous la forme

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

et son conjugué est

$$\bar{z} = a - bi.$$

Autrement dit, *on conserve la partie réelle et on change le signe de la partie imaginaire*. On utilisera également les propriétés

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

1. Conjugué de trois nombres complexes

a) $z_1 = 3 - 5i$

Le nombre est déjà sous forme algébrique. Sa partie réelle est 3 et sa partie imaginaire est -5 . En changeant le signe de la partie imaginaire,

$$\bar{z}_1 = 3 + 5i.$$

b) $z_2 = (2 + i)(1 - 3i)$

On peut procéder de deux façons.

Première méthode : développer d'abord z_2 .

$$\begin{aligned} z_2 &= (2 + i)(1 - 3i) \\ &= 2 - 6i + i - 3i^2. \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$, on a $-3i^2 = 3$. Ainsi

$$z_2 = 2 + 3 - 5i = 5 - 5i.$$

Donc

$$\bar{z}_2 = 5 + 5i.$$

Deuxième méthode : utiliser le conjugué d'un produit.

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= \overline{(2 + i)(1 - 3i)} \\ &= \overline{(2 + i)} \overline{(1 - 3i)} \\ &= (2 - i)(1 + 3i) \\ &= 2 + 6i - i - 3i^2 \\ &= 2 + 5i + 3 \\ &= 5 + 5i. \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

$$\text{c) } z_3 = \frac{4-i}{2+3i}$$

Pour lire facilement le conjugué, commençons par mettre z_3 sous forme algébrique. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $2-3i$ du dénominateur :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{4-i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} \\ &= \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}. \end{aligned}$$

Au dénominateur,

$$(2+3i)(2-3i) = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Au numérateur,

$$\begin{aligned} (4-i)(2-3i) &= 8 - 12i - 2i + 3i^2 \\ &= 8 - 14i - 3 \\ &= 5 - 14i. \end{aligned}$$

Donc

$$z_3 = \frac{5-14i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i.$$

Par conséquent,

$$\overline{z_3} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

$$\overline{z_1} = 3 + 5i, \quad \overline{z_2} = 5 + 5i, \quad \overline{z_3} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

2. Calculs de deux manières différentes

On considère

$$z = 2 - 3i, \quad w = -1 + 4i.$$

Leurs conjugués sont

$$\bar{z} = 2 + 3i, \quad \bar{w} = -1 - 4i.$$

a) Calcul de $\overline{z + w}$

Première manière : calculer d'abord $z + w$.

$$\begin{aligned} z + w &= (2 - 3i) + (-1 + 4i) \\ &= (2 - 1) + (-3 + 4)i \\ &= 1 + i. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overline{z + w} = 1 - i.}$$

Deuxième manière : utiliser $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ &= (2 + 3i) + (-1 - 4i) \\ &= 1 - i. \end{aligned}$$

Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

b) Calcul de $\overline{zw}$

Première manière : calculer d'abord zw .

$$\begin{aligned} zw &= (2 - 3i)(-1 + 4i) \\ &= -2 + 8i + 3i - 12i^2 \\ &= -2 + 11i + 12 \\ &= 10 + 11i. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overline{zw} = 10 - 11i.}$$

Deuxième manière : utiliser $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$.

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= (2 + 3i)(-1 - 4i) \\ &= -2 - 8i - 3i - 12i^2 \\ &= -2 - 11i + 12 \\ &= 10 - 11i. \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat.

c) Calcul de $\overline{z^3}$ **Première manière : calculer z^3 , puis prendre son conjugué.**Calculons d'abord z^2 :

$$\begin{aligned}
 z^2 &= (2 - 3i)^2 \\
 &= 2^2 - 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 \\
 &= 4 - 12i + 9i^2 \\
 &= 4 - 12i - 9 \\
 &= -5 - 12i.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 z^3 &= z^2 z \\
 &= (-5 - 12i)(2 - 3i) \\
 &= -10 + 15i - 24i + 36i^2 \\
 &= -10 - 9i - 36 \\
 &= -46 - 9i.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\overline{z^3} = -46 + 9i.}$$

Deuxième manière : utiliser $\overline{z^3} = \overline{z}^3$. On a $\overline{z} = 2 + 3i$. Calculons son cube :

$$\begin{aligned}
 (2 + 3i)^2 &= 4 + 12i + 9i^2 = -5 + 12i, \\
 (2 + 3i)^3 &= (-5 + 12i)(2 + 3i) \\
 &= -10 - 15i + 24i + 36i^2 \\
 &= -10 + 9i - 36 \\
 &= -46 + 9i.
 \end{aligned}$$

Donc, là encore,

$$\boxed{\overline{z^3} = -46 + 9i.}$$

$$\boxed{\overline{z + w} = 1 - i, \quad \overline{zw} = 10 - 11i, \quad \overline{z^3} = -46 + 9i.}$$

3. Montrer que $z + \bar{z}$ et $z\bar{z}$ sont réels

Soit un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C}$. Par définition, il existe deux réels a et b tels que

$$z = a + bi.$$

Son conjugué est

$$\bar{z} = a - bi.$$

a) Étude de $z + \bar{z}$

Calculons :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= a + a + bi - bi \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Or $a \in \mathbb{R}$, donc $2a \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$z + \bar{z} \in \mathbb{R}.$$

On remarque que les deux parties imaginaires bi et $-bi$ s'annulent exactement.

b) Étude de $z\bar{z}$

Calculons :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi).$$

Il s'agit d'un produit de la forme $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2. \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$,

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Puisque a et b sont réels, $a^2 + b^2$ est réel. Donc

$$z\bar{z} \in \mathbb{R}.$$

On a même

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que $z - \bar{z}$ est imaginaire pur

Reprenons un nombre complexe quelconque

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

donc

$$\bar{z} = a - bi.$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= a + bi - a + bi \\ &= 2bi. \end{aligned}$$

Or $2b$ est un nombre réel. Ainsi $2bi$ est de la forme

$$ki \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Sa partie réelle est donc nulle. C'est précisément la définition d'un nombre imaginaire pur. Par conséquent,

$$z - \bar{z} \text{ est imaginaire pur.}$$

Plus précisément,

$$z - \bar{z} = 2bi = 2i \operatorname{Im}(z).$$

Si $z = a + bi$, alors

$$z - \bar{z} = 2bi,$$

ce qui est un imaginaire pur pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Bilan

Pour $z = a + bi$, les identités fondamentales obtenues sont

$$\bar{z} = a - bi, \quad z + \bar{z} = 2a, \quad z - \bar{z} = 2bi, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Elles permettent notamment d'isoler directement les parties réelle et imaginaire :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Exercice 5 – Équations dans $\mathbb{C}$

Corrigé détaillé

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z - 5 = 2z + 4i$.

2. $(2 - i)z = 3 + 5i$.

3. $\frac{z-1}{1+i} = 2-i$.

4. $2z + \bar{z} = 6 + 5i$.

5. $3z - 2\bar{z} = 1 - 10i$.

6. $z + \bar{z} = 8$ et $z - \bar{z} = -6i$.

1. Résoudre $3z - 5 = 2z + 4i$

Nous cherchons à isoler z . Partons de

$$3z - 5 = 2z + 4i.$$

On soustrait $2z$ aux deux membres :

$$3z - 2z - 5 = 4i,$$

d'où

$$z - 5 = 4i.$$

On ajoute ensuite 5 aux deux membres :

$$z = 5 + 4i.$$

Le nombre obtenu est déjà sous forme algébrique $a + ib$.

$z = 5 + 4i$

2. Résoudre $(2 - i)z = 3 + 5i$

Comme $2 - i \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par $2 - i$:

$$z = \frac{3 + 5i}{2 - i}.$$

Pour mettre ce quotient sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $2 - i$, qui est $2 + i$:

$$z = \frac{(3 + 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}.$$

Calculons d'abord le dénominateur. En utilisant $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$(2 - i)(2 + i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5.$$

Calculons maintenant le numérateur en développant complètement :

$$\begin{aligned}(3 + 5i)(2 + i) &= 3 \times 2 + 3 \times i + 5i \times 2 + 5i \times i \\ &= 6 + 3i + 10i + 5i^2 \\ &= 6 + 13i + 5(-1) \\ &= 1 + 13i.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$z = \frac{1 + 13i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}i.$$

$$z = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}i$$

3. Résoudre $\frac{z - 1}{1 + i} = 2 - i$

Le dénominateur $1 + i$ est non nul. On peut donc multiplier les deux membres par $1 + i$:

$$z - 1 = (2 - i)(1 + i).$$

Développons le produit :

$$\begin{aligned}(2 - i)(1 + i) &= 2 \times 1 + 2 \times i - i \times 1 - i \times i \\ &= 2 + 2i - i - i^2 \\ &= 2 + i - (-1) \\ &= 3 + i.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$z - 1 = 3 + i.$$

En ajoutant 1 aux deux membres :

$$z = 4 + i.$$

$$z = 4 + i$$

4. Résoudre $2z + \bar{z} = 6 + 5i$

Cette équation fait intervenir à la fois z et son conjugué. On écrit donc z sous sa forme algébrique :

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Son conjugué est alors

$$\bar{z} = x - iy.$$

Remplaçons z et $\bar{z}$ dans l'équation :

$$2(x + iy) + (x - iy) = 6 + 5i.$$

Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 2(x + iy) + (x - iy) &= 2x + 2iy + x - iy \\ &= (2x + x) + (2iy - iy) \\ &= 3x + iy. \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$3x + iy = 6 + 5i.$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales. Nous obtenons ainsi le système

$$\begin{cases} 3x = 6, \\ y = 5. \end{cases}$$

La première équation donne

$$x = \frac{6}{3} = 2,$$

et la seconde donne directement

$$y = 5.$$

Comme $z = x + iy$, on en déduit

$$z = 2 + 5i.$$

Vérification :

$$2z + \bar{z} = 2(2 + 5i) + (2 - 5i) = 4 + 10i + 2 - 5i = 6 + 5i.$$

La valeur trouvée vérifie bien l'équation.

$$z = 2 + 5i$$

5. Résoudre $3z - 2\bar{z} = 1 - 10i$

Comme dans la question précédente, posons

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

d'où

$$\bar{z} = x - iy.$$

On remplace dans l'équation :

$$3(x + iy) - 2(x - iy) = 1 - 10i.$$

Développons avec attention :

$$\begin{aligned}3(x + iy) - 2(x - iy) &= 3x + 3iy - 2x + 2iy \\&= (3x - 2x) + (3iy + 2iy) \\&= x + 5iy.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x + 5iy = 1 - 10i.$$

Par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x = 1, \\ 5y = -10. \end{cases}$$

Donc

$$y = \frac{-10}{5} = -2.$$

Par conséquent,

$$z = x + iy = 1 - 2i.$$

Vérification : pour $z = 1 - 2i$, on a $\bar{z} = 1 + 2i$. Alors

$$\begin{aligned}3z - 2\bar{z} &= 3(1 - 2i) - 2(1 + 2i) \\&= 3 - 6i - 2 - 4i \\&= 1 - 10i.\end{aligned}$$

La solution est donc correcte.

$$z = 1 - 2i$$

6. Résoudre simultanément $z + \bar{z} = 8$ et $z - \bar{z} = -6i$

Nous devons trouver un même nombre complexe z vérifiant les deux égalités

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 8, \\ z - \bar{z} = -6i. \end{cases}$$

Posons, comme précédemment,

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

alors

$$\bar{z} = x - iy.$$

Première équation

Calculons $z + \bar{z}$:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (x + iy) + (x - iy) \\ &= x + x + iy - iy \\ &= 2x. \end{aligned}$$

La première équation $z + \bar{z} = 8$ devient donc

$$2x = 8,$$

d'où

$$x = 4.$$

Deuxième équation

Calculons maintenant $z - \bar{z}$:

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (x + iy) - (x - iy) \\ &= x + iy - x + iy \\ &= 2iy. \end{aligned}$$

La seconde équation $z - \bar{z} = -6i$ devient

$$2iy = -6i.$$

Comme $i \neq 0$, on peut diviser les deux membres par i :

$$2y = -6,$$

puis par 2 :

$$y = -3.$$

Nous avons donc

$$x = 4 \quad \text{et} \quad y = -3.$$

Ainsi,

$$z = x + iy = 4 - 3i.$$

Vérification : si $z = 4 - 3i$, alors $\bar{z} = 4 + 3i$. Par conséquent,

$$z + \bar{z} = (4 - 3i) + (4 + 3i) = 8$$

et

$$z - \bar{z} = (4 - 3i) - (4 + 3i) = -6i.$$

Les deux conditions sont bien vérifiées.

$$z = 4 - 3i$$

Bilan des solutions

1. $z = 5 + 4i$,
2. $z = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}i$,
3. $z = 4 + i$,
4. $z = 2 + 5i$,
5. $z = 1 - 2i$,
6. $z = 4 - 3i$.

Exercice 6 – Paramètres réels

Corrigé détaillé

Énoncé. Dans cet exercice, a et b désignent des nombres réels.

1. Déterminer a pour que le nombre

$$z = (a - 2) + (a^2 - 9)i$$

soit réel.

2. Déterminer a pour que le nombre

$$w = (a^2 - 4) + (3a + 6)i$$

soit imaginaire pur.

3. Déterminer a et b pour que

$$(a + bi)(2 - i) = 7 + i.$$

4. Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles

$$\frac{m + i}{1 - mi}$$

est un nombre réel.

1. Condition pour que z soit réel

Un nombre complexe écrit sous forme algébrique

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

est **réel** si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire si $y = 0$.

Ici,

$$z = (a - 2) + (a^2 - 9)i.$$

Sa partie réelle est $a - 2$ et sa partie imaginaire est $a^2 - 9$.

Pour que z soit réel, il faut donc et il suffit que

$$a^2 - 9 = 0.$$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a - 3)(a + 3).$$

Ainsi,

$$(a - 3)(a + 3) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$a - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad a + 3 = 0.$$

Donc

$$a = 3 \quad \text{ou} \quad a = -3.$$

Vérifions rapidement :

$$a = 3 \implies z = (3 - 2) + (9 - 9)i = 1,$$

et

$$a = -3 \implies z = (-3 - 2) + (9 - 9)i = -5.$$

Dans les deux cas, z est bien réel.

$$a \in \{-3, 3\}.$$

2. Condition pour que w soit imaginaire pur

Un nombre complexe $x + iy$ est **imaginaire pur** lorsque sa partie réelle est nulle. Il s'écrit alors sous la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.

On a

$$w = (a^2 - 4) + (3a + 6)i.$$

La partie réelle de w est donc

$$\operatorname{Re}(w) = a^2 - 4.$$

Pour que w soit imaginaire pur, on impose

$$a^2 - 4 = 0.$$

Or

$$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2).$$

Donc

$$(a - 2)(a + 2) = 0,$$

d'où

$$a = 2 \quad \text{ou} \quad a = -2.$$

Vérifions les deux valeurs.

Si $a = 2$, alors

$$w = (4 - 4) + (6 + 6)i = 12i,$$

qui est bien imaginaire pur.

Si $a = -2$, alors

$$w = (4 - 4) + (-6 + 6)i = 0.$$

Le nombre 0 s'écrit $0i$: avec la convention usuelle, il est donc également imaginaire pur (et il est aussi réel).

Avec la convention usuelle $\operatorname{Re}(w) = 0$:

$$a \in \{-2, 2\}.$$

Si l'on exigeait exceptionnellement un imaginaire pur *non nul*, seule la valeur $a = 2$ conviendrait.

3. Détermination de a et b

Nous cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a + bi)(2 - i) = 7 + i.$$

Commençons par développer soigneusement le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(a + bi)(2 - i) &= a(2 - i) + bi(2 - i) \\ &= 2a - ai + 2bi - bi^2.\end{aligned}$$

Comme

$$i^2 = -1,$$

on obtient

$$-bi^2 = -b(-1) = b.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(a + bi)(2 - i) &= 2a + b - ai + 2bi \\ &= (2a + b) + (2b - a)i.\end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$(2a + b) + (2b - a)i = 7 + i.$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} 2a + b = 7, \\ 2b - a = 1. \end{cases}$$

Réolvons-le pas à pas. La première équation donne

$$b = 7 - 2a.$$

On remplace b par $7 - 2a$ dans la deuxième équation :

$$2(7 - 2a) - a = 1.$$

Développons :

$$14 - 4a - a = 1,$$

donc

$$14 - 5a = 1.$$

En soustrayant 14 aux deux membres,

$$-5a = -13,$$

d'où

$$a = \frac{13}{5}.$$

Revenons à

$$b = 7 - 2a.$$

Alors

$$\begin{aligned}b &= 7 - 2 \times \frac{13}{5} \\ &= \frac{35}{5} - \frac{26}{5} \\ &= \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

Vérification :

$$2a + b = 2 \times \frac{13}{5} + \frac{9}{5} = \frac{26 + 9}{5} = 7,$$

$$2b - a = 2 \times \frac{9}{5} - \frac{13}{5} = \frac{18 - 13}{5} = 1.$$

Les deux équations sont satisfaites.

$$a = \frac{13}{5} \quad \text{et} \quad b = \frac{9}{5}.$$

4. Valeurs de m pour lesquelles le quotient est réel

On considère

$$Z = \frac{m + i}{1 - mi}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Nous voulons savoir pour quelles valeurs de m ce nombre est réel.

Étape 1 : vérifier que le dénominateur n'est jamais nul

Le dénominateur est

$$1 - mi.$$

S'il était nul, on aurait simultanément une partie réelle nulle et une partie imaginaire nulle. Or sa partie réelle vaut toujours 1. Il ne peut donc jamais être nul pour $m \in \mathbb{R}$.

Le quotient est ainsi défini pour tout réel m .

Étape 2 : mettre le quotient sous forme algébrique

Pour supprimer le nombre complexe au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1 - mi$.

Le conjugué de $1 - mi$ est

$$1 + mi.$$

Ainsi,

$$Z = \frac{m + i}{1 - mi} \times \frac{1 + mi}{1 + mi} = \frac{(m + i)(1 + mi)}{(1 - mi)(1 + mi)}.$$

Calculons d'abord le dénominateur :

$$\begin{aligned} (1 - mi)(1 + mi) &= 1 - (mi)^2 \\ &= 1 - m^2 i^2 \\ &= 1 + m^2, \end{aligned}$$

car $i^2 = -1$.

Calculons maintenant le numérateur :

$$\begin{aligned} (m + i)(1 + mi) &= m + m^2 i + i + mi^2 \\ &= m + m^2 i + i - m \\ &= (m - m) + (m^2 + 1)i \\ &= (m^2 + 1)i. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Z = \frac{(m^2 + 1)i}{m^2 + 1}.$$

Pour tout réel m ,

$$m^2 \geq 0,$$

donc

$$m^2 + 1 > 0.$$

On peut donc simplifier par $m^2 + 1$:

$$Z = i.$$

Ainsi, fait remarquable, le quotient ne dépend même pas de m :

$$\frac{m + i}{1 - mi} = i \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{R}.$$

Or

$$i = 0 + 1i$$

a une partie imaginaire égale à 1, qui n'est pas nulle. Le nombre i n'est donc pas réel.

Il n'existe par conséquent **aucune** valeur réelle de m pour laquelle le quotient demandé soit réel.

Il n'existe aucun $m \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions est

$$\emptyset.$$

Bilan

$$1. a = -3 \text{ ou } a = 3,$$

$$2. a = -2 \text{ ou } a = 2,$$

$$3. a = \frac{13}{5}, \quad b = \frac{9}{5},$$

$$4. \text{ aucune valeur réelle de } m.$$

Exercice 7 – Binôme de Newton

Corrigé détaillé

Énoncé.

1. Recopier et compléter la ligne d'ordre 7 du triangle de Pascal.
2. Développer et réduire :

$$A = (z + 2)^5, \quad B = (2z - 1)^6, \quad C = (1 + i)^8.$$

3. Déterminer le coefficient de z^4 dans le développement de $(2z - 3)^7$.
4. Déterminer le terme indépendant de z dans le développement de

$$\left(z + \frac{2}{z}\right)^8,$$

où $z \in \mathbb{C}^*$.

Rappel : formule du binôme de Newton

Pour tous nombres a et b et tout entier naturel n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux. Ils apparaissent sur la ligne d'ordre n du triangle de Pascal.

1. Ligne d'ordre 7 du triangle de Pascal

Les premières lignes sont construites en plaçant 1 aux extrémités et, à l'intérieur, en additionnant les deux nombres situés juste au-dessus.

La ligne d'ordre 6 est

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

On construit alors la ligne d'ordre 7 :

$$\begin{aligned} 1, \quad 1 + 6 = 7, \quad 6 + 15 = 21, \quad 15 + 20 = 35, \\ 20 + 15 = 35, \quad 15 + 6 = 21, \quad 6 + 1 = 7, \quad 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

1	7	21	35	35	21	7	1
---	---	----	----	----	----	---	---

Ce sont précisément

$$\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \binom{7}{3}, \binom{7}{4}, \binom{7}{5}, \binom{7}{6}, \binom{7}{7}.$$

2. Développer et réduire

a) Calcul de $A = (z + 2)^5$

La ligne d'ordre 5 du triangle de Pascal est

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

Avec $a = z$ et $b = 2$, la formule de Newton donne

$$(z + 2)^5 = \binom{5}{0} z^5 + \binom{5}{1} z^4 (2) + \binom{5}{2} z^3 (2)^2 + \binom{5}{3} z^2 (2)^3 + \binom{5}{4} z (2)^4 + \binom{5}{5} (2)^5.$$

Calculons chaque terme :

$$\begin{aligned} \binom{5}{0} z^5 &= z^5, \\ \binom{5}{1} z^4 (2) &= 5 \times 2z^4 = 10z^4, \\ \binom{5}{2} z^3 (2)^2 &= 10 \times 4z^3 = 40z^3, \\ \binom{5}{3} z^2 (2)^3 &= 10 \times 8z^2 = 80z^2, \\ \binom{5}{4} z (2)^4 &= 5 \times 16z = 80z, \\ \binom{5}{5} (2)^5 &= 32. \end{aligned}$$

Donc

$$A = z^5 + 10z^4 + 40z^3 + 80z^2 + 80z + 32.$$

b) Calcul de $B = (2z - 1)^6$

La ligne d'ordre 6 est

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1.$$

On écrit $2z - 1 = 2z + (-1)$. Ainsi,

$$(2z - 1)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2z)^{6-k} (-1)^k.$$

Développons terme par terme :

$$\begin{aligned} (2z - 1)^6 &= (2z)^6 + 6(2z)^5(-1) + 15(2z)^4(-1)^2 \\ &\quad + 20(2z)^3(-1)^3 + 15(2z)^2(-1)^4 \\ &\quad + 6(2z)(-1)^5 + (-1)^6. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (2z)^6 &= 64z^6, \quad (2z)^5 = 32z^5, \quad (2z)^4 = 16z^4, \\ (2z)^3 &= 8z^3, \quad (2z)^2 = 4z^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(2z - 1)^6 &= 64z^6 - 6 \times 32z^5 + 15 \times 16z^4 - 20 \times 8z^3 \\ &\quad + 15 \times 4z^2 - 6 \times 2z + 1 \\ &= 64z^6 - 192z^5 + 240z^4 - 160z^3 + 60z^2 - 12z + 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$B = 64z^6 - 192z^5 + 240z^4 - 160z^3 + 60z^2 - 12z + 1.$$

c) Calcul de $C = (1 + i)^8$

On pourrait développer directement avec le binôme de Newton. Cependant, comme $i^2 = -1$, des calculs successifs sont ici plus simples tout en restant exacts.

Commençons par le carré :

$$(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Puis

$$(1 + i)^4 = ((1 + i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4.$$

Enfin,

$$(1 + i)^8 = ((1 + i)^4)^2 = (-4)^2 = 16.$$

Donc

$$C = 16.$$

Vérification avec Newton. La ligne d'ordre 8 est

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.$$

Ainsi,

$$(1 + i)^8 = 1 + 8i + 28i^2 + 56i^3 + 70i^4 + 56i^5 + 28i^6 + 8i^7 + i^8.$$

En utilisant $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ et la périodicité des puissances de i , les parties imaginaires s'annulent et la partie réelle vaut

$$1 - 28 + 70 - 28 + 1 = 16.$$

On retrouve bien $C = 16$.

3. Coefficient de z^4 dans $(2z - 3)^7$

On applique Newton à

$$(2z - 3)^7 = (2z + (-3))^7.$$

Le terme général du développement est

$$T_k = \binom{7}{k} (2z)^{7-k} (-3)^k.$$

La puissance de z contenue dans ce terme est z^{7-k} . Nous cherchons le terme contenant z^4 . Il faut donc imposer

$$7 - k = 4.$$

D'où

$$k = 3.$$

Le terme recherché est donc

$$T_3 = \binom{7}{3} (2z)^4 (-3)^3.$$

Calculons séparément :

$$\binom{7}{3} = 35, \quad (2z)^4 = 2^4 z^4 = 16z^4, \quad (-3)^3 = -27.$$

Par conséquent,

$$T_3 = 35 \times 16 \times (-27) z^4.$$

Or

$$35 \times 16 = 560$$

et

$$560 \times (-27) = -15120.$$

Ainsi,

$$T_3 = -15120z^4.$$

Le coefficient de z^4 est donc

-15120.

4. Terme indépendant de z dans $\left(z + \frac{2}{z}\right)^8$

Comme $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z \neq 0$, donc $\frac{2}{z}$ est bien défini.

Appliquons la formule de Newton avec

$$a = z \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{z}.$$

On obtient

$$\left(z + \frac{2}{z}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} z^{8-k} \left(\frac{2}{z}\right)^k.$$

Simplifions le terme général :

$$\begin{aligned} T_k &= \binom{8}{k} z^{8-k} \frac{2^k}{z^k} \\ &= \binom{8}{k} 2^k z^{8-k-k} \\ &= \binom{8}{k} 2^k z^{8-2k}. \end{aligned}$$

Un terme est indépendant de z exactement lorsque la puissance de z vaut 0. Il faut donc résoudre

$$8 - 2k = 0.$$

Ainsi,

$$2k = 8 \quad \implies \quad k = 4.$$

Il n'y a donc qu'un seul terme indépendant de z . Pour $k = 4$,

$$T_4 = \binom{8}{4} 2^4 z^0.$$

Or

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70,$$

et

$$2^4 = 16, \quad z^0 = 1.$$

Donc

$$T_4 = 70 \times 16 = 1120.$$

Par conséquent, le terme indépendant de z est

1120.

Bilan

Ligne d'ordre 7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$A = z^5 + 10z^4 + 40z^3 + 80z^2 + 80z + 32$

$B = 64z^6 - 192z^5 + 240z^4 - 160z^3 + 60z^2 - 12z + 1$

$C = 16$

coeff $_{z^4}(2z - 3)^7 = -15120$

et

terme constant = 1120.

Exercice 8 – Synthèse

Corrigé détaillé

Énoncé

On considère le nombre complexe

$$z = 1 + 2i.$$

1. Calculer z^2 , z^3 et z^4 sous forme algébrique.
2. Calculer $\bar{z}$, puis vérifier que $z\bar{z} = 5$.
3. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ sans effectuer de quotient direct.
4. Simplifier le nombre

$$S = z^4 + \bar{z}^4.$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $z^n + \bar{z}^n$ est réel.

Correction détaillée

1. Calcul de z^2 , z^3 et z^4

On part de

$$z = 1 + 2i,$$

et on rappelle la relation fondamentale

$$i^2 = -1.$$

Calcul de z^2 . On élève z au carré :

$$\begin{aligned} z^2 &= (1 + 2i)^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 \\ &= 1 + 4i + 4i^2. \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} z^2 &= 1 + 4i - 4 \\ &= -3 + 4i. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{z^2 = -3 + 4i}.$$

Calcul de z^3 . Plutôt que de tout redévelopper depuis le début, on utilise

$$z^3 = z^2 z.$$

Donc

$$\begin{aligned}z^3 &= (-3 + 4i)(1 + 2i) \\&= -3 - 6i + 4i + 8i^2 \\&= -3 - 2i - 8 \\&= -11 - 2i.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{z^3 = -11 - 2i}.$$

Calcul de z^4 . De même,

$$z^4 = z^3 z.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}z^4 &= (-11 - 2i)(1 + 2i) \\&= -11 - 22i - 2i - 4i^2 \\&= -11 - 24i + 4 \\&= -7 - 24i.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{z^4 = -7 - 24i}.$$

Bilan :

$$\boxed{z^2 = -3 + 4i, \quad z^3 = -11 - 2i, \quad z^4 = -7 - 24i.}$$

2. Calcul de $\bar{z}$ et vérification de $z\bar{z} = 5$

Pour un nombre complexe écrit sous la forme

$$a + bi,$$

son conjugué est

$$a - bi.$$

Autrement dit, on conserve la partie réelle et on change le signe de la partie imaginaire.

Ici,

$$z = 1 + 2i,$$

donc

$$\boxed{\bar{z} = 1 - 2i}.$$

Vérifions maintenant le produit $z\bar{z}$:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (1 + 2i)(1 - 2i) \\ &= 1 - 2i + 2i - 4i^2 \\ &= 1 - 4(-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Les deux termes imaginaires $-2i$ et $+2i$ s'annulent.

On a donc bien

$$\boxed{\bar{z} = 1 - 2i \quad \text{et} \quad z\bar{z} = 5.}$$

3. Forme algébrique de $\frac{1}{z}$ sans quotient direct

La question précédente donne

$$z\bar{z} = 5.$$

Nous voulons faire apparaître $\frac{1}{z}$. Comme $z \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par $5z$:

$$\frac{z\bar{z}}{5z} = \frac{5}{5z}.$$

Dans le membre de gauche, le facteur z se simplifie :

$$\frac{\bar{z}}{5} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{5}.$$

Or, d'après la question 2,

$$\bar{z} = 1 - 2i.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1-2i}{5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

C'est bien une forme algébrique $a + bi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

4. Simplification de $S = z^4 + \bar{z}^4$

D'après la question 1,

$$z^4 = -7 - 24i.$$

Pour calculer $\bar{z}^4$ efficacement, on utilise la propriété

$$\overline{z^4} = \bar{z}^4.$$

Le conjugué de $z^4 = -7 - 24i$ est

$$\overline{z^4} = -7 + 24i.$$

Par conséquent,

$$\bar{z}^4 = -7 + 24i.$$

On calcule alors S :

$$\begin{aligned}S &= z^4 + \bar{z}^4 \\ &= (-7 - 24i) + (-7 + 24i) \\ &= -7 - 7 - 24i + 24i \\ &= -14.\end{aligned}$$

Les parties imaginaires s'annulent exactement.

$$S = -14.$$

5. Montrer que $z^n + \bar{z}^n$ est réel pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit n un entier naturel. Posons

$$A = z^n + \bar{z}^n.$$

Nous voulons démontrer que A est réel.

Idée. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. Nous allons donc calculer $\bar{A}$ et vérifier que $\bar{A} = A$.

En utilisant la propriété du conjugué d'une somme,

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \overline{z^n + \bar{z}^n} \\ &= \bar{z}^n + \overline{\bar{z}^n}.\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on a

$$\overline{\bar{z}^n} = z^n.$$

De même,

$$\overline{\bar{z}}^n = \left(\overline{\bar{z}}\right)^n.$$

Or le conjugué du conjugué redonne le nombre initial :

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

Ainsi,

$$\overline{\bar{z}^n} = z^n.$$

En remplaçant dans l'expression de $\bar{A}$, il vient

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bar{z}^n + z^n \\ &= z^n + \bar{z}^n \\ &= A.\end{aligned}$$

Donc A est égal à son conjugué. Par conséquent, A est un nombre réel.

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$z^n + \bar{z}^n \in \mathbb{R}.$$

Une autre façon de comprendre la question 5

La propriété précédente peut aussi se comprendre directement. Le nombre z^n est lui-même un nombre complexe. Il existe donc deux réels a et b tels que

$$z^n = a + bi.$$

Son conjugué vaut alors

$$\overline{z^n} = a - bi.$$

Comme $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, on a

$$\overline{z}^n = a - bi.$$

Par addition,

$$\begin{aligned} z^n + \overline{z}^n &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Or a est réel, donc $2a$ est réel. Cela confirme une nouvelle fois que

$$z^n + \overline{z}^n \in \mathbb{R}.$$

Bilan de l'exercice

Pour $z = 1 + 2i$:

$$z^2 = -3 + 4i,$$

$$z^3 = -11 - 2i,$$

$$z^4 = -7 - 24i,$$

$$\overline{z} = 1 - 2i,$$

$$z\overline{z} = 5,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i,$$

$$S = z^4 + \overline{z}^4 = -14,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n + \overline{z}^n \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9 – Démonstration

Nombres complexes – Corrigé détaillé

Énoncé

Soient z et w deux nombres complexes.

1. Démontrer que

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

2. Démontrer que

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

4. Démontrer que, si $z \neq 0$, alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Correction détaillée

1. Conjugué d'une somme

Solution détaillée.

Pour démontrer une propriété concernant des nombres complexes quelconques, on commence par écrire ces nombres sous forme algébrique. Posons

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad w = c + id,$$

où a, b, c, d sont des nombres réels.

Alors

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Le conjugué d'un nombre complexe $x + iy$ est $x - iy$. Par conséquent,

$$\overline{z + w} = (a + c) - i(b + d).$$

Développons cette expression :

$$\overline{z + w} = a + c - ib - id = (a - ib) + (c - id).$$

Or

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{et} \quad \bar{w} = c - id.$$

Ainsi,

$$\boxed{\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}}.$$

Cette égalité montre que le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués.

2. Conjugué d'un produit

Solution détaillée.

On conserve les écritures

$$z = a + ib \quad \text{et} \quad w = c + id,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Calculons d'abord le produit zw :

$$\begin{aligned} zw &= (a + ib)(c + id) \\ &= ac + aid + ibc + i^2 bd. \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$, on obtient

$$zw = ac - bd + i(ad + bc).$$

Son conjugué vaut donc

$$\overline{zw} = ac - bd - i(ad + bc).$$

Calculons maintenant séparément le produit des conjugués. Nous avons

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{et} \quad \bar{w} = c - id.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \bar{z} \bar{w} &= (a - ib)(c - id) \\ &= ac - aid - ibc + (-i)(-i)bd. \end{aligned}$$

Or

$$(-i)(-i) = i^2 = -1.$$

Donc

$$\bar{z} \bar{w} = ac - bd - i(ad + bc).$$

Nous obtenons exactement la même expression que pour $\overline{zw}$. Par conséquent,

$$\boxed{\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}}.$$

Autrement dit, le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués.

3. Conjugué d'une puissance : démonstration par récurrence

Solution détaillée.

Nous voulons démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, considérons la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Nous allons procéder en trois étapes : initialisation, hérédité et conclusion.

Étape 1 : initialisation.

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut

$$\overline{z^1} = \bar{z},$$

et le membre de droite vaut

$$\bar{z}^1 = \bar{z}.$$

Ainsi,

$$\overline{z^1} = \bar{z}^1.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

Étape 2 : hérédité.

Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons que

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Nous devons montrer qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$.

On part du membre de gauche :

$$\overline{z^{n+1}}.$$

Comme

$$z^{n+1} = z^n z,$$

on a

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z}.$$

D'après la propriété démontrée à la question 2, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués. Donc

$$\overline{z^n z} = \overline{z^n} \bar{z}.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \bar{z}^n \bar{z} \\ &= \bar{z}^{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Étape 3 : conclusion.

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.}$$

4. Conjugué de l'inverse

Solution détaillée.

Supposons $z \neq 0$. Nous voulons démontrer que

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Comme $z \neq 0$, son conjugué $\bar{z}$ est également non nul. En effet, si $z = a + ib$, alors

$$z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0,$$

et dans ce cas seulement

$$\bar{z} = a - ib = 0.$$

Ainsi $1/\bar{z}$ est bien défini.

Partons de l'identité

$$z \times \frac{1}{z} = 1.$$

Prenons le conjugué des deux membres :

$$\overline{\left(z \times \frac{1}{z}\right)} = \bar{1}.$$

D'après la propriété de la question 2,

$$\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1,$$

car $\bar{1} = 1$.

Puisque $\bar{z} \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par $\bar{z}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}}.$$

Vérification directe sous forme algébrique.

Écrivons $z = a + ib$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $a - ib$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}.$$

Les deux expressions sont identiques, ce qui confirme le résultat.

Résultats à retenir

Pour tous nombres complexes z, w et pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}}, \quad \boxed{\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}},$$

$$\boxed{\overline{z^n} = \bar{z}^n}, \quad \boxed{z \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}}.$$

Exercice 10 – Problème de synthèse

Corrigé détaillé

Énoncé. On cherche les nombres complexes z tels que

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

1. Montrer que cette équation équivaut à $(z - 1)^2 = -4$.
2. Déterminer les deux solutions complexes de l'équation.
3. Noter z_1 et z_2 ces solutions. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\overline{z_1}$.
4. Calculer $z_1^5 + z_2^5$ sans développer directement les puissances cinquièmes.

Pour aller plus loin. Déterminer, pour tout entier naturel n , une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) définie par

$$u_n = z_1^n + z_2^n.$$

1. Mise sous la forme $(z - 1)^2 = -4$

Partons de l'équation donnée :

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

L'idée est de reconnaître le début d'une identité remarquable. En effet,

$$(z - 1)^2 = z^2 - 2z + 1.$$

Dans $z^2 - 2z + 5$, on fait donc apparaître $z^2 - 2z + 1$:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 5 = 0 &\iff z^2 - 2z + 1 + 4 = 0 \\ &\iff (z - 1)^2 + 4 = 0 \\ &\iff (z - 1)^2 = -4. \end{aligned}$$

Toutes les transformations étant des équivalences, les deux équations ont exactement les mêmes solutions.

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \iff (z - 1)^2 = -4.$$

2. Détermination des deux solutions complexes

Nous devons résoudre

$$(z - 1)^2 = -4.$$

Dans $\mathbb{C}$, on sait que $i^2 = -1$. Par conséquent,

$$(2i)^2 = 4i^2 = -4 \quad \text{et} \quad (-2i)^2 = 4i^2 = -4.$$

Ainsi, les deux nombres complexes dont le carré vaut -4 sont $2i$ et $-2i$. On obtient donc

$$z - 1 = 2i \quad \text{ou} \quad z - 1 = -2i.$$

Dans le premier cas,

$$z = 1 + 2i,$$

et dans le second,

$$z = 1 - 2i.$$

Les deux solutions sont

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - 2i.$$

3. Calcul de $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\overline{z_1}$

On choisit

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - 2i.$$

a) Somme $z_1 + z_2$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 2i) + (1 - 2i) \\ &= 1 + 1 + 2i - 2i \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc

$$z_1 + z_2 = 2.$$

b) Produit $z_1 z_2$

On remarque que $1 + 2i$ et $1 - 2i$ sont conjugués. On peut utiliser

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 2i)(1 - 2i) \\ &= 1^2 + 2^2 \\ &= 1 + 4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

On peut aussi vérifier directement :

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1 - 2i + 2i - 4i^2 = 1 + 4 = 5,$$

car $i^2 = -1$. Donc

$$z_1 z_2 = 5.$$

c) Conjugué de z_1

Le conjugué d'un nombre $a + bi$ est $a - bi$. Comme

$$z_1 = 1 + 2i,$$

on a

$$\overline{z_1} = 1 - 2i = z_2.$$

Donc

$$\boxed{\overline{z_1} = z_2 = 1 - 2i.}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = 2, \quad z_1 z_2 = 5, \quad \overline{z_1} = z_2.}$$

4. Calcul de $z_1^5 + z_2^5$ sans développer les puissances cinquièmes

Développer directement $(1 + 2i)^5$ et $(1 - 2i)^5$ serait long. On va exploiter l'équation dont z_1 et z_2 sont solutions.

Puisque z_1 et z_2 vérifient

$$z^2 - 2z + 5 = 0,$$

chacun d'eux vérifie

$$z^2 = 2z - 5.$$

Pour $k \in \{1, 2\}$, on a donc

$$z_k^2 = 2z_k - 5.$$

Multiplions successivement cette relation par des puissances de z_k .

D'abord,

$$\begin{aligned} z_k^3 &= z_k z_k^2 \\ &= z_k(2z_k - 5) \\ &= 2z_k^2 - 5z_k \\ &= 2(2z_k - 5) - 5z_k \\ &= 4z_k - 10 - 5z_k \\ &= -z_k - 10. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} z_k^4 &= z_k(-z_k - 10) \\ &= -z_k^2 - 10z_k \\ &= -(2z_k - 5) - 10z_k \\ &= 5 - 12z_k. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} z_k^5 &= z_k(5 - 12z_k) \\ &= 5z_k - 12z_k^2 \\ &= 5z_k - 12(2z_k - 5) \\ &= 5z_k - 24z_k + 60 \\ &= 60 - 19z_k. \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie pour z_1 comme pour z_2 . Ainsi,

$$\begin{aligned} z_1^5 + z_2^5 &= (60 - 19z_1) + (60 - 19z_2) \\ &= 120 - 19(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Or la question précédente a donné $z_1 + z_2 = 2$. Donc

$$\begin{aligned} z_1^5 + z_2^5 &= 120 - 19 \times 2 \\ &= 120 - 38 \\ &= 82. \end{aligned}$$

$$z_1^5 + z_2^5 = 82.$$

Pour aller plus loin : relation de récurrence vérifiée par (u_n)

On définit, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = z_1^n + z_2^n.$$

Nous cherchons une relation permettant de calculer un terme à partir des termes précédents.

Comme z_1 et z_2 sont solutions de

$$z^2 - 2z + 5 = 0,$$

on a, pour $k \in \{1, 2\}$,

$$z_k^2 = 2z_k - 5.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Multiplions cette égalité par z_k^n :

$$z_k^{n+2} = 2z_k^{n+1} - 5z_k^n.$$

On écrit cette relation pour z_1 :

$$z_1^{n+2} = 2z_1^{n+1} - 5z_1^n,$$

puis pour z_2 :

$$z_2^{n+2} = 2z_2^{n+1} - 5z_2^n.$$

Additionnons membre à membre :

$$\begin{aligned} z_1^{n+2} + z_2^{n+2} &= 2z_1^{n+1} + 2z_2^{n+1} - 5z_1^n - 5z_2^n \\ &= 2(z_1^{n+1} + z_2^{n+1}) - 5(z_1^n + z_2^n). \end{aligned}$$

Or, par définition,

$$u_{n+2} = z_1^{n+2} + z_2^{n+2}, \quad u_{n+1} = z_1^{n+1} + z_2^{n+1}, \quad u_n = z_1^n + z_2^n.$$

Donc

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n.$$

Cette relation est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour pouvoir utiliser complètement la récurrence, calculons les deux premiers termes :

$$u_0 = z_1^0 + z_2^0 = 1 + 1 = 2,$$

et

$$u_1 = z_1 + z_2 = 2.$$

Ainsi, la suite est entièrement déterminée par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 2, \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vérification du résultat de la question 4

Cette récurrence permet de retrouver $u_5 = z_1^5 + z_2^5$ sans développer aucune puissance :

$$u_2 = 2u_1 - 5u_0 = 2 \times 2 - 5 \times 2 = -6,$$

$$u_3 = 2u_2 - 5u_1 = 2(-6) - 5 \times 2 = -22,$$

$$u_4 = 2u_3 - 5u_2 = 2(-22) - 5(-6) = -14,$$

$$u_5 = 2u_4 - 5u_3 = 2(-14) - 5(-22) = 82.$$

On retrouve bien

$$u_5 = z_1^5 + z_2^5 = 82.$$