

Devoir surveillé – Suites numériques

Terminale – Mathématiques spécialité

Durée : 2 heures – Note : /20

Nom : Prénom :

Classe : Date :

Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées. Pour chaque récurrence, préciser l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Exercice 1 – Limites et formes indéterminées

Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

a) $u_n = \frac{3n-2}{n+150}$

e) $u_n = \frac{\sqrt{2n+3}}{4+\sqrt{n}}$

b) $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{2-n}$

f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+2n+4}}{\sqrt{n^2-n-2}}$

c) $u_n = \frac{6n^2+1}{n(3n+2)}$

g) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$

d) $u_n = \frac{5}{3\sqrt{n}+11}$

h) $u_n = \sqrt{n^2+2n} - n$

Exercice 2 – Encadrement par récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+u_n}.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leq 3.$$

Exercice 3 – Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+3}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 2$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n+3}.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 4 – Raisonnement par récurrence

Inégalité de Bernoulli

Soit un réel $a > 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Exercice 5 – Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. **a.** Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées au centième près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 4$.
b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(n + 4 - u_n).$$

En déduire une validation de la conjecture.

3. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b. En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n + n.$$

- c.** Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à l'aide de la formule obtenue.

Exercice 1 – Limites et formes indéterminées

Énoncé

Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{3n-2}{n+150} \qquad \text{e)} \quad u_n = \frac{\sqrt{2n+3}}{4+\sqrt{n}}$$

$$\text{b)} \quad u_n = \frac{3n^2-2n+1}{2-n} \qquad \text{f)} \quad u_n = \frac{\sqrt{n^2+2n+4}}{\sqrt{n^2-n-2}}$$

$$\text{c)} \quad u_n = \frac{6n^2+1}{n(3n+2)} \qquad \text{g)} \quad u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$$

$$\text{d)} \quad u_n = \frac{5}{3\sqrt{n}+11} \qquad \text{h)} \quad u_n = \sqrt{n^2+2n} - n$$

Correction détaillée

Avant de commencer, rappelons une idée essentielle : lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Lorsqu'un quotient donne une forme du type $\frac{\infty}{\infty}$, on transforme l'expression avant de conclure. Pour une différence de deux racines qui donne la forme $+\infty - \infty$, on utilise souvent l'expression conjuguée.

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{3n-2}{n+150}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$3n-2 \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n+150 \rightarrow +\infty.$$

Nous obtenons donc d'abord la forme indéterminée

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Pour lever cette indétermination, on divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{\frac{3n-2}{n}}{\frac{n+150}{n}} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{150}{n}}.$$

Or

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{150}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$3 - \frac{2}{n} \rightarrow 3 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{150}{n} \rightarrow 1.$$

Le dénominateur tend vers $1 \neq 0$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}.$$

b) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{2 - n}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$3n^2 - 2n + 1 \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad 2 - n \rightarrow -\infty.$$

Pour faire apparaître clairement le comportement de la suite, on divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{3n - 2 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} - 1}.$$

Étudions séparément les deux parties.

D'une part,

$$3n - 2 + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty,$$

car $3n \rightarrow +\infty$, tandis que -2 reste constant et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

D'autre part,

$$\frac{2}{n} - 1 \rightarrow -1.$$

En particulier, pour n suffisamment grand, le dénominateur est négatif et reste proche de -1 .

Nous divisons donc une quantité qui devient arbitrairement grande et positive par une quantité négative proche de -1 . Le quotient devient arbitrairement grand en valeur absolue et négatif :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}.$$

c) $u_n = \frac{6n^2 + 1}{n(3n + 2)}$

Commençons par développer le dénominateur :

$$n(3n + 2) = 3n^2 + 2n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{6n^2 + 1}{3n^2 + 2n}.$$

Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$: il s'agit donc d'une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On divise alors le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$u_n = \frac{6 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n}}.$$

Or

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$6 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 6, \quad 3 + \frac{2}{n} \rightarrow 3,$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{6}{3} = 2}.$$

d) $u_n = \frac{5}{3\sqrt{n} + 11}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$3\sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

puis

$$3\sqrt{n} + 11 \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur, lui, est la constante positive 5. Ainsi,

$$\frac{5}{3\sqrt{n} + 11} \rightarrow 0.$$

Plus précisément, le dénominateur est positif et devient de plus en plus grand, donc la fraction reste positive et se rapproche de 0.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

e) $u_n = \frac{\sqrt{2n+3}}{4 + \sqrt{n}}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{2n+3} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad 4 + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Nous avons donc une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On fait apparaître $\sqrt{n}$ dans le numérateur :

$$2n + 3 = n \left(2 + \frac{3}{n} \right).$$

Comme $n > 0$,

$$\sqrt{2n+3} = \sqrt{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)} = \sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{3}{n}}.$$

De même,

$$4 + \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\frac{4}{\sqrt{n}} + 1 \right).$$

Par conséquent,

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \sqrt{2 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{n}} \right)} = \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n}}}{1 + \frac{4}{\sqrt{n}}}.$$

Or

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{4}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\sqrt{2 + \frac{3}{n}} \rightarrow \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{4}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}}.$$

f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 4}}{\sqrt{n^2 - n - 2}}$

Pour n suffisamment grand, les deux radicandes sont positifs. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: nous avons encore une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Factorisons n^2 sous chaque racine :

$$n^2 + 2n + 4 = n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} \right)$$

et

$$n^2 - n - 2 = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right).$$

Comme n est un entier naturel et $n \rightarrow +\infty$, on a $n > 0$, donc

$$\sqrt{n^2} = n.$$

Ainsi,

$$\sqrt{n^2 + 2n + 4} = n \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}},$$

et

$$\sqrt{n^2 - n - 2} = n \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}.$$

D'où

$$u_n = \frac{n \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow 1$$

et

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

g) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n+3} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n+2} \rightarrow +\infty.$$

L'écriture directe conduit donc à la forme indéterminée

$$+\infty - \infty.$$

Pour lever cette indétermination, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}.$$

On écrit

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}.$$

Au numérateur, on utilise l'identité

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(n + 3) - (n + 2)}{\sqrt{n + 3} + \sqrt{n + 2}} = \frac{1}{\sqrt{n + 3} + \sqrt{n + 2}}.$$

Or

$$\sqrt{n + 3} + \sqrt{n + 2} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

h) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n^2 + 2n} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty.$$

L'expression donne donc la forme indéterminée

$$+\infty - \infty.$$

Comme dans la question précédente, on utilise l'expression conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

On multiplie et on divise par

$$\sqrt{n^2 + 2n} + n.$$

On obtient

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}.$$

Grâce à l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,

$$u_n = \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}.$$

Factorisons maintenant n^2 sous la racine :

$$\sqrt{n^2 + 2n} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = n\sqrt{1 + \frac{2}{n}},$$

car $n > 0$.

Ainsi,

$$u_n = \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + n} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)}.$$

Après simplification par n ,

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}.$$

Comme

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

on a

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$u_n \rightarrow \frac{2}{1+1} = 1.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

Bilan

	a	b	c	d	e	f	g	h
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	3	$-\infty$	2	0	$\sqrt{2}$	1	0	1

Méthodes à retenir :

- pour un quotient de polynômes, faire apparaître les puissances dominantes de n ;
- sous une racine, factoriser la plus grande puissance de n adaptée ;
- devant une différence de deux racines donnant $+\infty - \infty$, penser à l'expression conjuguée ;
- ne jamais conclure directement à partir d'une forme indéterminée : il faut d'abord transformer l'expression.

Exercice 2 – Encadrement par récurrence

Énoncé

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 3$$

et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + u_n}.$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leq 3.$$

Correction détaillée

Nous devons démontrer que *tous* les termes de la suite vérifient simultanément deux inégalités :

$$1 < u_n \quad \text{et} \quad u_n \leq 3.$$

Autrement dit, nous voulons montrer que chaque terme u_n appartient à l'intervalle

$$]1, 3].$$

Comme la suite est définie par une relation de récurrence, nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel n , posons la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad 1 < u_n \leq 3.$$

Nous allons vérifier successivement :

- 1) l'initialisation ;
- 2) l'hérédité ;
- 3) la conclusion.

1. Initialisation

Nous devons vérifier la propriété au premier rang, c'est-à-dire pour $n = 0$.

D'après l'énoncé,

$$u_0 = 3.$$

Il faut vérifier

$$1 < u_0 \leq 3.$$

En remplaçant u_0 par 3, cela donne

$$1 < 3 \leq 3.$$

La première inégalité $1 < 3$ est vraie, et la seconde $3 \leq 3$ est également vraie.

Donc

$$1 < u_0 \leq 3.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Initialisation :

$$1 < u_0 \leq 3$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

2. Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n . C'est l'**hypothèse de récurrence** :

$$1 < u_n \leq 3.$$

Nous devons montrer qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$1 < u_{n+1} \leq 3.$$

Or, par définition de la suite,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + u_n}.$$

Nous allons démontrer séparément les deux inégalités

$$1 < u_{n+1} \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq 3.$$

Première inégalité : montrer que $u_{n+1} > 1$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_n > 1.$$

En ajoutant 1 aux deux membres,

$$1 + u_n > 2.$$

En particulier,

$$1 + u_n > 0.$$

Le numérateur 2 est lui aussi strictement positif. Par conséquent,

$$\frac{2}{1 + u_n} > 0.$$

En ajoutant 1,

$$1 + \frac{2}{1 + u_n} > 1.$$

Mais

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + u_n}.$$

Donc

$$u_{n+1} > 1.$$

Deuxième inégalité : montrer que $u_{n+1} \leq 3$

Nous repartons de l'hypothèse

$$u_n > 1.$$

En ajoutant 1,

$$1 + u_n > 2.$$

Comme $1 + u_n$ est strictement positif, on peut comparer les inverses. Un dénominateur plus grand donne ici une fraction positive plus petite :

$$\frac{1}{1 + u_n} < \frac{1}{2}.$$

En multipliant les deux membres par $2 > 0$,

$$\frac{2}{1 + u_n} < 1.$$

Puis, en ajoutant 1,

$$1 + \frac{2}{1 + u_n} < 2.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} < 2.$$

Or

$$2 < 3.$$

Nous obtenons donc, à plus forte raison,

$$u_{n+1} < 3,$$

et par conséquent

$$\boxed{u_{n+1} \leq 3}.$$

Nous avons donc démontré les deux résultats :

$$u_{n+1} > 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq 3.$$

Ainsi,

$$\boxed{1 < u_{n+1} \leq 3}.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Hérédité : si

$$1 < u_n \leq 3,$$

alors

$$1 < u_{n+1} \leq 3.$$

La propriété est donc héréditaire.

3. Conclusion

Nous avons montré que :

- la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n \leq 3.$$

Remarque importante

Dans la démonstration précédente, nous avons même obtenu, au cours de l'hérédité,

$$1 < u_{n+1} < 2.$$

Cela signifie qu'après le terme initial $u_0 = 3$, tous les termes suivants sont en réalité strictement compris entre 1 et 2 :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 < u_n < 2.$$

Par exemple,

$$u_1 = 1 + \frac{2}{1 + u_0} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2},$$

ce qui vérifie bien

$$1 < \frac{3}{2} < 2 < 3.$$

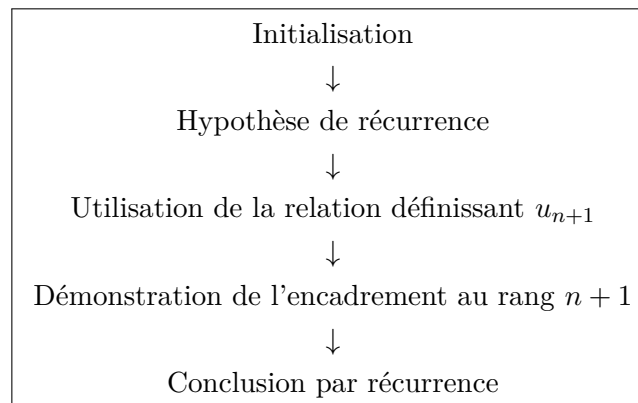
Cette remarque n'est pas nécessaire pour répondre à la question, mais elle permet de mieux comprendre pourquoi l'encadrement demandé

$$1 < u_n \leq 3$$

est conservé par la relation de récurrence.

Schéma du raisonnement à retenir

Pour démontrer par récurrence qu'une suite vérifie un encadrement, on peut suivre le plan suivant :



Exercice 3 – Étude d'une suite récurrente

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 3$$

et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n > 2.$$

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3}.$$

- b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Correction détaillée

1. Démontrer par récurrence que $u_n > 2$

Nous voulons démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2.$$

Pour tout entier naturel n , considérons la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad u_n > 2.$$

Nous allons effectuer une démonstration par récurrence.

Étape 1 : initialisation

Au rang $n = 0$, l'énoncé donne

$$u_0 = 3.$$

Or

$$3 > 2.$$

Donc

$$u_0 > 2.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

$$u_0 = 3 > 2$$

La propriété est donc initialisée au rang 0.

Étape 2 : hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons

$$u_n > 2.$$

C'est notre **hypothèse de récurrence**.

Nous devons démontrer qu'alors

$$u_{n+1} > 2.$$

À partir de la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

Pour comparer u_{n+1} à 2, calculons directement la différence

$$u_{n+1} - 2.$$

On obtient

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - 2.$$

Pour effectuer la soustraction, on écrit 2 avec le même dénominateur :

$$2 = \frac{2(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - \frac{2(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

On regroupe les deux fractions :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 4 - 2(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

Développons le numérateur :

$$3u_n + 4 - 2(u_n + 3) = 3u_n + 4 - 2u_n - 6.$$

Donc

$$3u_n + 4 - 2u_n - 6 = u_n - 2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}}.$$

Étudions maintenant le signe de ce quotient.

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_n > 2.$$

En soustrayant 2,

$$u_n - 2 > 0.$$

De plus, l'énoncé précise que tous les termes de la suite sont strictement positifs. Ainsi,

$$u_n > 0,$$

donc

$$u_n + 3 > 3 > 0.$$

Nous avons donc :

$$u_n - 2 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 3 > 0.$$

Le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif. Ainsi,

$$\frac{u_n - 2}{u_n + 3} > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - 2 > 0.$$

Ce qui signifie exactement que

$$u_{n+1} > 2.$$

Nous avons donc montré que

$$u_n > 2 \implies u_{n+1} > 2.$$

La propriété est héréditaire.

Étape 3 : conclusion de la récurrence

Nous avons montré que :

- la propriété est vraie au rang 0 ;
- si elle est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2.}$$

Tous les termes de la suite sont donc strictement supérieurs à 2 :

$$\boxed{u_n > 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

2.a. Calcul de $u_{n+1} - u_n$

Nous voulons établir que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3}.$$

Partons de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - u_n.$$

Pour soustraire, nous écrivons u_n avec le même dénominateur :

$$u_n = \frac{u_n(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - \frac{u_n(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

On rassemble les deux fractions :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3}.$$

Développons :

$$u_n(u_n + 3) = u_n^2 + 3u_n.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3}.$$

Les termes $3u_n$ et $-3u_n$ s'annulent :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4 - u_n^2}{u_n + 3}.$$

Or

$$4 - u_n^2 = 2^2 - u_n^2.$$

Nous reconnaissons une différence de deux carrés :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Avec $a = 2$ et $b = u_n$, on obtient

$$4 - u_n^2 = (2 - u_n)(2 + u_n).$$

Finalement,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3}.$$

C'est bien l'égalité demandée.

2.b. Sens de variation de la suite

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n.$$

Nous venons d'établir que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3}.$$

Nous devons donc étudier le signe de chacun des trois facteurs qui interviennent.

Signe de $2 - u_n$

D'après la question 1,

$$u_n > 2.$$

En multipliant l'inégalité par -1 , son sens s'inverse :

$$-u_n < -2.$$

En ajoutant 2,

$$2 - u_n < 0.$$

Ainsi,

$$2 - u_n < 0.$$

Signe de $2 + u_n$

L'énoncé précise que tous les termes sont strictement positifs :

$$u_n > 0.$$

Donc

$$2 + u_n > 2 > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{2 + u_n > 0}.$$

Signe de $u_n + 3$

Toujours puisque

$$u_n > 0,$$

nous avons

$$u_n + 3 > 3 > 0.$$

Donc

$$\boxed{u_n + 3 > 0}.$$

Signe du quotient

Nous avons maintenant :

$$\underbrace{2 - u_n}_{<0}, \quad \underbrace{2 + u_n}_{>0}, \quad \underbrace{u_n + 3}_{>0}.$$

Le produit au numérateur est donc négatif :

$$(2 - u_n)(2 + u_n) < 0.$$

Le dénominateur est positif :

$$u_n + 3 > 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3} < 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Cela signifie que

$$u_{n+1} < u_n$$

pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc

$\boxed{\text{strictement décroissante.}}$

Bilan

Nous avons obtenu deux informations importantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$

Ainsi, la suite (u_n) est **strictement décroissante** tout en restant **strictement supérieure** à 2.

On peut résumer la situation de la façon suivante :

$$3 = u_0 > u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots > 2.$$

Par exemple,

$$u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0 + 3} = \frac{3 \times 3 + 4}{3 + 3} = \frac{13}{6},$$

et

$$2 < \frac{13}{6} < 3.$$

Ce premier calcul est donc cohérent avec les deux résultats démontrés : la suite descend, mais ses termes restent au-dessus de 2.

Méthode à retenir.

Pour étudier une suite récurrente, deux calculs sont particulièrement utiles :

$$u_{n+1} - \ell$$

pour montrer qu'elle reste au-dessus ou au-dessous d'un nombre ℓ , et

$$u_{n+1} - u_n$$

pour déterminer son sens de variation.

Ici,

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} > 0$$

permet de conserver la borne 2, tandis que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(2 + u_n)}{u_n + 3} < 0$$

permet de conclure que la suite est strictement décroissante.

Exercice 4 – Raisonnement par récurrence

Inégalité de Bernoulli

Énoncé. Soit un réel $a > 0$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Correction détaillée

Nous devons démontrer une propriété valable pour *tout* entier naturel n . Comme l'énoncé demande une démonstration par récurrence, nous allons suivre les trois étapes classiques : initialisation, hérédité et conclusion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{P}_n : \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1. Initialisation

Nous commençons par vérifier la propriété au rang $n = 0$.

Le membre de gauche vaut

$$(1 + a)^0 = 1.$$

Le membre de droite vaut

$$1 + 0 \times a = 1.$$

Ainsi,

$$(1 + a)^0 = 1 = 1 + 0a.$$

En particulier,

$$(1 + a)^0 \geq 1 + 0a.$$

Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Initialisation :

$$(1 + a)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0a.$$

La propriété est bien vraie au rang 0.

2. Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n . Autrement dit, supposons

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

C'est l'**hypothèse de récurrence**.

Nous devons démontrer que la propriété est alors vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

Partons du membre de gauche. Par les règles sur les puissances,

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a).$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Or $a > 0$, donc

$$1 + a > 0.$$

Nous pouvons donc multiplier les deux membres de l'inégalité par $1 + a$ **sans changer le sens de l'inégalité**. Il vient

$$(1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a).$$

Comme $(1 + a)^n(1 + a) = (1 + a)^{n+1}$,

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a).$$

Développons maintenant le membre de droite :

$$\begin{aligned} (1 + na)(1 + a) &= 1 + a + na + na^2 \\ &= 1 + (n + 1)a + na^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2.$$

Il reste à comparer

$$1 + (n + 1)a + na^2 \quad \text{et} \quad 1 + (n + 1)a.$$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$n \geq 0.$$

De plus, $a > 0$, donc

$$a^2 > 0.$$

Par conséquent,

$$na^2 \geq 0.$$

En ajoutant $1 + (n + 1)a$ aux deux membres,

$$1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.$$

Nous avons donc successivement

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.$$

Finalement,

$$\boxed{(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Hérédité :

$$\boxed{(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \implies \quad (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.}$$

La propriété est héréditaire.

3. Conclusion

Nous avons démontré que :

- la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Ainsi, pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

C'est l'inégalité de Bernoulli dans le cas considéré ici.

Pourquoi le terme na^2 est-il important ?

Le point essentiel de l'hérédité apparaît lors du développement :

$$(1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2.$$

Pour obtenir l'inégalité recherchée au rang $n + 1$, nous voudrions seulement avoir

$$1 + (n + 1)a.$$

Le terme supplémentaire est

$$na^2.$$

Mais ce terme est positif ou nul, car $n \geq 0$ et $a^2 > 0$. Il ne peut donc qu'augmenter le membre de droite :

$$1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.$$

C'est précisément ce qui permet de terminer l'hérédité.

Exemple numérique

Prenons, par exemple, $a = 0,2$ et $n = 3$. L'inégalité affirme que

$$(1 + 0,2)^3 \geq 1 + 3 \times 0,2.$$

Calculons :

$$1,2^3 = 1,728$$

et

$$1 + 3 \times 0,2 = 1,6.$$

On vérifie bien que

$$1,728 \geq 1,6.$$

Cet exemple illustre l'inégalité, mais la démonstration par récurrence précédente prouve qu'elle est vraie pour *tout* $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$.

Schéma du raisonnement à retenir

$$\begin{array}{l} (1+a)^n \geq 1+na \\ \Downarrow \quad \times(1+a) > 0 \\ (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \\ \Downarrow \\ (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \\ \Downarrow \quad na^2 \geq 0 \\ (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \end{array}$$

Exercice 5 – Étude d'une suite

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. a. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées au centième près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 4$.
b. Sans utiliser de raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(n + 4 - u_n).$$

En déduire une validation de la conjecture.

3. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b. En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n + n.$$

- c. Refaire une démonstration de la croissance de la suite (u_n) à l'aide de la formule obtenue.

Correction détaillée

1.a. Calcul de u_1, u_2, u_3 et u_4

La relation

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

Calcul de u_1 . On prend $n = 0$:

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1.$$

Comme $u_0 = 3$,

$$u_1 = \frac{3}{4} \times 3 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}.$$

Donc

$$u_1 = \frac{13}{4} = 3,25.$$

Calcul de u_2 . On prend $n = 1$:

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{13}{4} + \frac{1}{4} + 1.$$

Ainsi

$$u_2 = \frac{39}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{59}{16}.$$

Donc

$$u_2 = \frac{59}{16} = 3,6875 \approx 3,69.$$

Calcul de u_3 . On prend $n = 2$:

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{2}{4} + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{59}{16} + \frac{1}{2} + 1.$$

Donc

$$u_3 = \frac{177}{64} + \frac{32}{64} + \frac{64}{64} = \frac{273}{64}.$$

Ainsi

$$u_3 = \frac{273}{64} = 4,265625 \approx 4,27.$$

Calcul de u_4 . On prend $n = 3$:

$$u_4 = \frac{3}{4}u_3 + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{273}{64} + \frac{3}{4} + 1.$$

Donc

$$u_4 = \frac{819}{256} + \frac{192}{256} + \frac{256}{256} = \frac{1267}{256}.$$

Ainsi

$$u_4 = \frac{1267}{256} = 4,94921875 \approx 4,95.$$

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 3,25, \quad u_2 \approx 3,69, \quad u_3 \approx 4,27, \quad u_4 \approx 4,95.$$

1.b. Conjecture sur le sens de variation

Les premiers termes vérifient

$$3 < 3,25 < 3,69 < 4,27 < 4,95.$$

Ils semblent donc augmenter lorsque n augmente.

Nous pouvons conjecturer que

la suite (u_n) est croissante.

Attention : l'observation de quelques termes ne constitue pas une démonstration. Nous allons maintenant prouver cette conjecture.

2.a. Démonstration par récurrence de $u_n \leq n + 4$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{P}_n : \quad u_n \leq n + 4.$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$u_0 = 3.$$

Et

$$0 + 4 = 4.$$

Donc

$$u_0 = 3 \leq 4 = 0 + 4.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$u_n \leq n + 4.$$

Nous devons montrer

$$u_{n+1} \leq (n + 1) + 4 = n + 5.$$

Comme $\frac{3}{4} > 0$, nous pouvons multiplier l'hypothèse par $\frac{3}{4}$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 4).$$

En ajoutant $\frac{1}{4}n + 1$ aux deux membres,

$$\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}(n + 4) + \frac{1}{4}n + 1.$$

Le membre de gauche est précisément u_{n+1} . Donc

$$u_{n+1} \leq \frac{3n}{4} + 3 + \frac{n}{4} + 1.$$

Or

$$\frac{3n}{4} + \frac{n}{4} = n$$

et

$$3 + 1 = 4.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \leq n + 4.$$

Nous avons même obtenu une borne plus forte que celle nécessaire. En effet,

$$n + 4 \leq n + 5 = (n + 1) + 4.$$

Donc

$$u_{n+1} \leq (n + 1) + 4.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion

Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq n + 4.}$$

Dans l'hérédité, obtenir une inégalité plus forte que celle demandée ne pose aucun problème :

$$u_{n+1} \leq n + 4 \implies u_{n+1} \leq n + 5.$$

2.b. Calcul de $u_{n+1} - u_n$ et validation de la conjecture

Partons de la relation de définition :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

Soustrayons u_n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - u_n.$$

Comme

$$\frac{3}{4}u_n - u_n = \left(\frac{3}{4} - 1\right)u_n = -\frac{1}{4}u_n,$$

on obtient

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

Écrivons $1 = \frac{4}{4}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + \frac{4}{4}.$$

On factorise par $\frac{1}{4}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(n + 4 - u_n).$$

D'après la question 2.a,

$$u_n \leq n + 4.$$

En soustrayant u_n ,

$$n + 4 - u_n \geq 0.$$

Comme $\frac{1}{4} > 0$,

$$\frac{1}{4}(n + 4 - u_n) \geq 0.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Donc

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi,

$$\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}$$

La conjecture formulée à la question 1.b est donc validée.

3.a. Montrer que (v_n) est géométrique

On définit

$$v_n = u_n - n.$$

Pour montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, nous cherchons à établir

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n.$$

Par définition,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1).$$

En utilisant la relation de récurrence de (u_n) ,

$$v_{n+1} = \left(\frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1\right) - (n + 1).$$

Développons :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1.$$

Les termes $+1$ et -1 s'annulent :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n - n.$$

Or

$$\frac{1}{4}n - n = \left(\frac{1}{4} - 1\right)n = -\frac{3}{4}n.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n.$$

On factorise par $\frac{3}{4}$:

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n - n).$$

Mais $u_n - n = v_n$. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n.$$

Par conséquent,

$$(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{3}{4}.$$

3.b. Expression de v_n , puis de u_n

Calculons le premier terme :

$$v_0 = u_0 - 0 = 3.$$

Une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q vérifie

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ici,

$$v_0 = 3 \quad \text{et} \quad q = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$v_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Or

$$v_n = u_n - n.$$

Ainsi,

$$u_n - n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

En ajoutant n aux deux membres :

$$u_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n + n.$$

$$v_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n \quad \text{et} \quad u_n = n + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

3.c. Nouvelle démonstration de la croissance de (u_n)

Nous disposons maintenant de la formule explicite

$$u_n = n + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Calculons u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n+1) + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}.$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left[n + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n\right].$$

On développe :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Factorisons $3 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ dans les deux derniers termes :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4} - 1\right).$$

Or

$$\frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Comme

$$\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

nous obtenons

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \geq 1$. Comme

$$0 < \frac{3}{4} < 1,$$

on a

$$0 < \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} < 1.$$

Ainsi,

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Cette seconde démonstration apporte même une précision : alors que la question 2.b permettait de conclure que la suite était croissante, la formule explicite montre directement que

$$u_{n+1} > u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Bilan général

Les principaux résultats de l'exercice sont :

$$u_n \leq n + 4$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(n + 4 - u_n)$$

$$v_n = 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$u_n = n + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

et finalement

(u_n) est strictement croissante.

Idées à retenir.

Une suite récurrente peut être étudiée de plusieurs façons complémentaires :

- calculer ses premiers termes pour formuler une conjecture ;
- établir un encadrement par récurrence ;
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer les variations ;
- introduire une suite auxiliaire bien choisie afin d'obtenir une suite géométrique ;
- utiliser ensuite la formule explicite obtenue pour retrouver les variations.