

Partie A - Raisonnement par récurrence

Exercice 1 - Prise en main

Correction complète et détaillée

Énoncé

Pour chaque propriété, préciser le premier rang à tester puis effectuer uniquement l'initialisation.

1. Pour tout $n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Pour tout $n \geq 2$, $3^n > n^2$.

Rappel : qu'est-ce que l'initialisation ?

Dans un raisonnement par récurrence, l'**initialisation** consiste à vérifier que la propriété est vraie au **premier rang concerné**.

Si une propriété est annoncée :

$$\text{« pour tout } n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ »,}$$

alors le premier rang à tester est $n = n_0$. On remplace simplement n par n_0 dans la propriété et on vérifie l'égalité ou l'inégalité obtenue.

1) Propriété : $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \geq 0$

La propriété est annoncée pour tout entier n tel que

$$n \geq 0.$$

Le plus petit entier qui satisfait cette condition est donc

$$\boxed{n = 0}.$$

Initialisation au rang 0.

On remplace n par 0 dans l'inégalité

$$2^n \geq n + 1.$$

On obtient

$$2^0 \geq 0 + 1.$$

Calculons séparément les deux membres :

$$2^0 = 1$$

et

$$0 + 1 = 1.$$

L'inégalité à vérifier devient donc

$$1 \geq 1,$$

ce qui est vrai, puisque les deux membres sont égaux.

Conclusion

Le premier rang à tester est $\boxed{0}$ et la propriété est vraie au rang 0 :

$$\boxed{2^0 = 1 = 0 + 1}.$$

L'initialisation est donc vérifiée.

2) Propriété : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$

Cette fois, la propriété est annoncée pour tout entier n tel que

$$n \geq 1.$$

Le premier rang à tester est donc

$$\boxed{n = 1}.$$

Initialisation au rang 1.

Pour $n = 1$, le membre de gauche est la somme qui commence à 1 et se termine à 1. Il contient donc un seul terme :

$$1 + 2 + \dots + n = 1.$$

Calculons maintenant le membre de droite :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2}.$$

On simplifie :

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ainsi, au rang 1, les deux membres sont égaux :

$$1 = 1.$$

Conclusion

Le premier rang à tester est $\boxed{1}$ et la propriété est vraie au rang 1 :

$$\boxed{1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1}.$$

L'initialisation est donc vérifiée.

3) Propriété : $3^n > n^2$ pour tout $n \geq 2$

La propriété est annoncée pour tout entier n tel que

$$n \geq 2.$$

Le premier rang à tester est donc

$$\boxed{n = 2}.$$

Initialisation au rang 2.

On remplace n par 2 dans l'inégalité

$$3^n > n^2.$$

On obtient

$$3^2 > 2^2.$$

Calculons les deux membres :

$$3^2 = 3 \times 3 = 9,$$

et

$$2^2 = 2 \times 2 = 4.$$

Il reste donc à vérifier

$$9 > 4,$$

ce qui est vrai.

Conclusion

Le premier rang à tester est $\boxed{2}$ et la propriété est vraie au rang 2 :

$$\boxed{3^2 = 9 > 4 = 2^2}.$$

L'initialisation est donc vérifiée.

Bilan

Propriété	Premier rang	Vérification de l'initialisation
$2^n \geq n + 1$ pour $n \geq 0$	$n = 0$	$2^0 = 1 \geq 1$
$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$	$n = 1$	$1 = \frac{1 \times 2}{2}$
$3^n > n^2$ pour $n \geq 2$	$n = 2$	$3^2 = 9 > 4 = 2^2$

Méthode à retenir

Pour trouver le rang d'initialisation, il suffit de lire la condition sur n :

- si la propriété est annoncée pour $n \geq 0$, on commence à $n = 0$;
- si elle est annoncée pour $n \geq 1$, on commence à $n = 1$;
- si elle est annoncée pour $n \geq 2$, on commence à $n = 2$.

Ensuite, on remplace n par ce premier rang et on vérifie directement la propriété obtenue.

Partie A - Raisonnement par récurrence

Exercice 2 - Somme des carrés

Énoncé. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Mise en place du raisonnement

Pour chaque entier $n \geq 1$, considérons la propriété

$$(P_n) : \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

L'objectif est de démontrer que (P_n) est vraie pour **tout** entier $n \geq 1$.

Un raisonnement par récurrence comporte trois étapes :

1. vérifier la propriété au premier rang : c'est l'**initialisation** ;
2. supposer la propriété vraie à un rang n et montrer qu'elle est alors vraie au rang $n+1$: c'est l'**hérédité** ;
3. conclure grâce au principe de récurrence.

2. Initialisation

La propriété doit être démontrée pour tout $n \geq 1$. Le premier rang à tester est donc

$$n = 1.$$

Au rang $n = 1$, le membre de gauche vaut

$$1^2 = 1.$$

Le membre de droite vaut

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Les deux membres sont donc égaux :

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

La propriété (P_1) est vraie. L'initialisation est donc vérifiée.

3. Hérédité

Soit $n \geq 1$ un entier naturel quelconque.

3.1. Hypothèse de récurrence

Supposons que la propriété soit vraie au rang n . Cela signifie que l'on suppose :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cette égalité est notre **hypothèse de récurrence**.

3.2. Ce qu'il faut démontrer au rang $n+1$

Au rang $n+1$, la formule attendue est obtenue en remplaçant n par $n+1$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Simplifions le membre de droite :

$$(n+1) + 1 = n+2$$

et

$$2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3.$$

Il faut donc parvenir à

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

3.3. Calcul du membre de gauche au rang $n+1$

Partons du membre de gauche :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2.$$

Regroupons les termes jusqu'à n^2 :

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2.$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous pouvons donc remplacer la somme entre parenthèses :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Mettons les deux termes au même dénominateur. On écrit

$$(n+1)^2 = \frac{6(n+1)^2}{6}.$$

Ainsi,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}.$$

Les deux termes du numérateur contiennent le facteur $n+1$. Factorisons :

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}.$$

Développons uniquement l'expression entre crochets :

$$n(2n + 1) = 2n^2 + n$$

et

$$6(n + 1) = 6n + 6.$$

Donc

$$n(2n + 1) + 6(n + 1) = 2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Nous obtenons alors

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}.$$

Il reste à factoriser le trinôme $2n^2 + 7n + 6$. On vérifie que

$$(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Par conséquent,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Mais

$$\frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6}.$$

C'est exactement la formule demandée au rang $n + 1$.

Nous avons montré que, si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie. La propriété est donc héréditaire.

4. Conclusion par récurrence

Nous avons établi :

- (P_1) est vraie ;
- pour tout entier $n \geq 1$, si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

5. Exemple de vérification

Une vérification numérique n'est pas une démonstration, mais elle permet de contrôler la formule.

Prenons $n = 3$.

Membre de gauche :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Membre de droite :

$$\frac{3(3 + 1)(2 \times 3 + 1)}{6} = \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = \frac{84}{6} = 14.$$

Les deux résultats coïncident bien.

6. Méthode à retenir

Pour démontrer par récurrence une identité portant sur une somme :

1. définir clairement la propriété (P_n) ;
2. vérifier le premier rang ;
3. supposer la formule vraie au rang n ;
4. au rang $n + 1$, écrire la somme précédente puis ajouter le nouveau terme ;
5. utiliser l'hypothèse de récurrence ;
6. transformer l'expression jusqu'à retrouver exactement la formule attendue au rang $n + 1$;
7. conclure par le principe de récurrence.

Exercice 3 - Expression explicite d'une suite

Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Énoncé

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 2,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 6n + 5.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Conjecturer une expression de u_n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1) Calcul de u_1 , u_2 et u_3

La relation

$$u_{n+1} = u_n + 6n + 5$$

permet de calculer chaque terme à partir du terme précédent. Il faut donc remplacer successivement n par 0, puis par 1, puis par 2.

Calcul de u_1

Pour obtenir u_1 , on prend $n = 0$ dans la relation de récurrence :

$$u_{0+1} = u_0 + 6 \times 0 + 5.$$

Ainsi,

$$u_1 = 2 + 0 + 5 = 7.$$

Donc

$$u_1 = 7.$$

Calcul de u_2

Pour obtenir u_2 , on prend $n = 1$:

$$u_{1+1} = u_1 + 6 \times 1 + 5.$$

En utilisant $u_1 = 7$,

$$u_2 = 7 + 6 + 5 = 18.$$

Donc

$$u_2 = 18.$$

Calcul de u_3

Pour obtenir u_3 , on prend $n = 2$:

$$u_{2+1} = u_2 + 6 \times 2 + 5.$$

Comme $u_2 = 18$,

$$u_3 = 18 + 12 + 5 = 35.$$

Donc

$$u_3 = 35.$$

Nous avons donc les premiers termes :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 7, \quad u_2 = 18, \quad u_3 = 35.$$

2) Conjecturer une expression de u_n

Une **conjecture** est une formule que l'on pense vraie après avoir observé plusieurs cas. Elle devra ensuite être démontrée.

Observons les accroissements successifs :

$$u_1 - u_0 = 7 - 2 = 5,$$

$$u_2 - u_1 = 18 - 7 = 11,$$

$$u_3 - u_2 = 35 - 18 = 17.$$

On obtient donc

$$5, \quad 11, \quad 17.$$

Les différences entre ces accroissements valent

$$11 - 5 = 6, \quad 17 - 11 = 6.$$

Idée à retenir. Lorsque les différences secondes sont constantes, il est naturel de chercher une expression de u_n sous la forme d'un polynôme du second degré :

$$u_n = an^2 + bn + c.$$

Cherchons donc a , b et c tels que

$$u_n = an^2 + bn + c.$$

Comme $u_0 = 2$, on a

$$u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c = 2.$$

Ainsi,

$$c = 2.$$

Comme $u_1 = 7$,

$$a + b + c = 7.$$

Avec $c = 2$, cela donne

$$a + b = 5. \quad (1)$$

Comme $u_2 = 18$,

$$4a + 2b + c = 18.$$

Avec $c = 2$,

$$4a + 2b = 16,$$

donc, en divisant par 2,

$$2a + b = 8. \quad (2)$$

Soustrayons (1) de (2) :

$$(2a + b) - (a + b) = 8 - 5,$$

d'où

$$a = 3.$$

Puis, avec $a + b = 5$,

$$3 + b = 5,$$

donc

$$b = 2.$$

Nous conjecturons donc que

$$\boxed{u_n = 3n^2 + 2n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Vérification rapide sur les premiers termes

Pour $n = 0$:

$$3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2 = u_0.$$

Pour $n = 1$:

$$3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 2 = 3 + 2 + 2 = 7 = u_1.$$

Pour $n = 2$:

$$3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 2 = 12 + 4 + 2 = 18 = u_2.$$

Pour $n = 3$:

$$3 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2 = 27 + 6 + 2 = 35 = u_3.$$

La formule est donc cohérente avec les termes calculés. Il reste maintenant à la **démontrer pour tout entier naturel n** .

3) Démonstration de la conjecture par récurrence

Nous voulons démontrer la propriété

$$(P_n) : \quad u_n = 3n^2 + 2n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une démonstration par récurrence comporte trois étapes :

1. l'**initialisation** : vérifier la propriété au premier rang ;
2. l'**hérédité** : supposer la propriété vraie à un rang n et montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$;
3. la **conclusion**.

Étape 1 : initialisation

La suite est définie à partir du rang 0. Le premier rang à tester est donc

$$n = 0.$$

D'après l'énoncé,

$$u_0 = 2.$$

D'autre part, la formule conjecturée donne

$$3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2.$$

Ainsi,

$$u_0 = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 2.$$

La propriété (P_0) est donc vraie.

(P_0) est vraie.

Étape 2 : hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété (P_n) soit vraie. Cela signifie que l'on suppose

$$u_n = 3n^2 + 2n + 2.$$

Cette égalité est appelée **hypothèse de récurrence**.

Nous devons montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire montrer que

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2.$$

Partons de la relation de récurrence donnée dans l'énoncé :

$$u_{n+1} = u_n + 6n + 5.$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence $u_n = 3n^2 + 2n + 2$:

$$u_{n+1} = (3n^2 + 2n + 2) + 6n + 5.$$

Regroupons les termes de même nature :

$$u_{n+1} = 3n^2 + (2n + 6n) + (2 + 5).$$

Donc

$$u_{n+1} = 3n^2 + 8n + 7. \quad (1)$$

Calculons maintenant l'expression que nous voulons obtenir :

$$3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2.$$

Développons uniquement les expressions algébriques usuelles :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Ainsi,

$$3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 + 2.$$

Puis

$$= 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 4,$$

d'où

$$3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2 = 3n^2 + 8n + 7. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent donc

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2.$$

C'est exactement la propriété (P_{n+1}) .

Si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie. La propriété est donc héréditaire.

Étape 3 : conclusion

Nous avons montré que :

- la propriété est vraie au rang 0 ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si elle est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n^2 + 2n + 2.$$

Bilan de l'exercice

Premiers termes	$u_0 = 2, u_1 = 7, u_2 = 18, u_3 = 35$
Conjecture	$u_n = 3n^2 + 2n + 2$
Initialisation	Au rang 0 : $u_0 = 2 = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 2$
Hérédité	$u_{n+1} = u_n + 6n + 5 = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 2$
Conclusion	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n^2 + 2n + 2$

Méthode à retenir. Pour conjecturer une formule explicite à partir d'une relation de récurrence :

1. calculer plusieurs premiers termes ;
2. observer les écarts entre termes successifs ;
3. proposer une formule compatible avec ces valeurs ;
4. vérifier la formule sur quelques rangs ;
5. la démontrer ensuite par récurrence.

Exercice 4 - Inégalité et croissance

Énoncé

On définit la suite (v_n) par

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}.$$

1) Démontrer par récurrence que

$$1 \leq v_n < 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2) Montrer que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}.$$

3) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

1) Démontrer que $1 \leq v_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

Pour chaque entier naturel n , considérons la propriété

$$(P_n) : \quad 1 \leq v_n < 3.$$

Étape 1 : initialisation

Le premier terme de la suite est

$$v_0 = 1.$$

Nous devons vérifier que

$$1 \leq v_0 < 3.$$

Or

$$1 \leq 1 < 3.$$

Donc

$$1 \leq v_0 < 3.$$

La propriété (P_0) est donc vraie.

Étape 2 : hérédité

Supposons que, pour un certain entier naturel n , la propriété (P_n) soit vraie. Autrement dit, supposons que

$$1 \leq v_n < 3.$$

Nous devons montrer que

$$1 \leq v_{n+1} < 3.$$

La relation de récurrence est

$$v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}.$$

Borne inférieure. Comme

$$v_n \geq 1,$$

on obtient, en multipliant par $2 > 0$,

$$2v_n \geq 2.$$

Puis, en ajoutant 3,

$$2v_n + 3 \geq 5.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$,

$$\sqrt{2v_n + 3} \geq \sqrt{5}.$$

Or

$$\sqrt{5} > 1.$$

Donc

$$v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3} > 1.$$

En particulier,

$$1 \leq v_{n+1}.$$

Borne supérieure. D'autre part, l'hypothèse de récurrence donne

$$v_n < 3.$$

En multipliant par $2 > 0$,

$$2v_n < 6.$$

Puis en ajoutant 3,

$$2v_n + 3 < 9.$$

Les deux membres étant positifs, on peut prendre leurs racines carrées :

$$\sqrt{2v_n + 3} < \sqrt{9}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} < 3.$$

Nous avons donc établi

$$1 \leq v_{n+1} < 3.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Étape 3 : conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence,

Résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq v_n < 3.$$

Idée clé

L'encadrement $1 \leq v_n < 3$ sera essentiel dans la suite : il permettra de déterminer le signe de $v_{n+1} - v_n$.

2) Expression de $v_{n+1} - v_n$

Nous partons de la relation

$$v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{2v_n + 3} - v_n.$$

Cette expression contient une racine carrée. Pour la simplifier, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée

$$\sqrt{2v_n + 3} + v_n.$$

On obtient

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sqrt{2v_n + 3} - v_n \\ &= \frac{(\sqrt{2v_n + 3} - v_n)(\sqrt{2v_n + 3} + v_n)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}. \end{aligned}$$

Au numérateur, nous utilisons l'identité

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Avec

$$a = \sqrt{2v_n + 3}, \quad b = v_n,$$

on trouve

$$(\sqrt{2v_n + 3} - v_n)(\sqrt{2v_n + 3} + v_n) = (2v_n + 3) - v_n^2.$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n + 3 - v_n^2}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}.$$

Il reste à factoriser le numérateur :

$$2v_n + 3 - v_n^2 = -(v_n^2 - 2v_n - 3).$$

Or

$$v_n^2 - 2v_n - 3 = (v_n - 3)(v_n + 1),$$

car

$$(v_n - 3)(v_n + 1) = v_n^2 + v_n - 3v_n - 3 = v_n^2 - 2v_n - 3.$$

Par conséquent,

$$2v_n + 3 - v_n^2 = -(v_n - 3)(v_n + 1).$$

Finalement,

Résultat

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}.$$

Méthode

Lorsqu'une différence contient une racine carrée, comme

$$\sqrt{A} - B,$$

le réflexe utile est souvent de multiplier par le conjugué $\sqrt{A} + B$. Cela permet de faire disparaître la racine du numérateur grâce à l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

3) Sens de variation de la suite (v_n)

Nous allons étudier le signe de

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}.$$

D'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq v_n < 3.$$

Étudions séparément le signe de chaque facteur.

Signe de $v_n - 3$

Comme

$$v_n < 3,$$

on a

$$v_n - 3 < 0.$$

Donc

$$-(v_n - 3) > 0.$$

Signe de $v_n + 1$

Puisque

$$v_n \geq 1,$$

on obtient

$$v_n + 1 \geq 2 > 0.$$

Donc

$$v_n + 1 > 0.$$

Signe du dénominateur

Nous avons

$$\sqrt{2v_n + 3} \geq 0$$

et, d'après la question 1,

$$v_n \geq 1 > 0.$$

Ainsi,

$$\sqrt{2v_n + 3} + v_n > 0.$$

Conclusion sur le signe de la différence

Le numérateur

$$-(v_n - 3)(v_n + 1)$$

est strictement positif, et le dénominateur est lui aussi strictement positif. Donc

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} > v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Résultat

(v_n) est strictement croissante.

Vérification sur les premiers termes

Cette vérification n'est pas une démonstration, mais elle permet de visualiser le comportement de la suite.

On a

$$v_0 = 1.$$

Puis

$$v_1 = \sqrt{2 \times 1 + 3} = \sqrt{5} \approx 2,236.$$

Ensuite,

$$v_2 = \sqrt{2\sqrt{5} + 3} \approx 2,734.$$

Ainsi,

$$1 = v_0 < v_1 < v_2 < 3,$$

ce qui est cohérent avec les résultats démontrés.

Bilan final

Nous avons établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq v_n < 3,$$

que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n},$$

et que cette différence est strictement positive. Par conséquent,

(v_n) est strictement croissante.

Idée clé

La démarche complète est typique des exercices de suites récurrentes :

1. montrer qu'une suite reste dans un intervalle par récurrence ;
2. transformer $v_{n+1} - v_n$;
3. utiliser l'encadrement obtenu pour étudier son signe ;
4. en déduire la monotonie.

Partie A - Raisonnement par récurrence

Exercice 5 - Bernoulli et estimation

Énoncé

1. À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1,02^n \geq 1 + 0,02n.$$

2. En déduire un entier n garantissant

$$1,02^n \geq 2.$$

3. Cette valeur est-elle le plus petit rang possible ? Vérifier à la calculatrice.

Rappel : l'inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $x \geq -1$ et tout entier naturel n , l'inégalité de Bernoulli affirme que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Cette propriété est particulièrement utile lorsque l'on veut obtenir rapidement une estimation simple d'une puissance de la forme $(1 + x)^n$.

Dans cet exercice,

$$1,02 = 1 + 0,02.$$

Nous allons donc appliquer Bernoulli avec

$$x = 0,02.$$

Comme $0,02 \geq -1$, toutes les conditions d'application sont satisfaites.

1) Montrer que $1,02^n \geq 1 + 0,02n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bernoulli donne

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

En choisissant

$$x = 0,02,$$

on obtient

$$(1 + 0,02)^n \geq 1 + n \times 0,02.$$

Or

$$1 + 0,02 = 1,02.$$

Donc

$$1,02^n \geq 1 + 0,02n.$$

Résultat

Pour tout entier naturel n ,

$$1,02^n \geq 1 + 0,02n.$$

Idée clé

L'intérêt de Bernoulli est qu'il remplace ici une puissance difficile à comparer directement par une expression affine beaucoup plus simple :

$$1 + 0,02n.$$

Il sera donc facile de chercher une valeur de n pour laquelle cette borne inférieure dépasse 2.

2) Trouver un entier n garantissant $1,02^n \geq 2$

Nous savons que

$$1,02^n \geq 1 + 0,02n.$$

Pour être certain que

$$1,02^n \geq 2,$$

il suffit donc d'imposer que la borne inférieure elle-même soit au moins égale à 2 :

$$1 + 0,02n \geq 2.$$

Réolvons cette inégalité pas à pas.

On soustrait 1 aux deux membres :

$$0,02n \geq 1.$$

Puisque $0,02 > 0$, on peut diviser les deux membres par 0,02 sans changer le sens de l'inégalité :

$$n \geq \frac{1}{0,02}.$$

Or

$$0,02 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50},$$

donc

$$\frac{1}{0,02} = 50.$$

Ainsi,

$$n \geq 50.$$

En particulier, pour $n = 50$, Bernoulli donne

$$1,02^{50} \geq 1 + 0,02 \times 50.$$

Calculons le membre de droite :

$$1 + 0,02 \times 50 = 1 + 1 = 2.$$

Donc

$$1,02^{50} \geq 2.$$

Résultat

Un entier garantissant l'inégalité demandée est

$$n = 50.$$

Plus généralement, tout entier $n \geq 50$ garantit

$$1,02^n \geq 2.$$

Point important

Le mot « garantissant » est important. L'inégalité de Bernoulli fournit une condition suffisante : si $n \geq 50$, alors on est certain que $1,02^n \geq 2$. Cela ne signifie pas encore que 50 soit le plus petit entier pour lequel l'inégalité est vraie.

3) La valeur 50 est-elle le plus petit rang possible ?

Nous allons maintenant vérifier directement à la calculatrice les puissances de 1,02 autour du premier franchissement de la valeur 2.

La suite

$$a_n = 1,02^n$$

est strictement croissante, car $1,02 > 1$. Il suffit donc de repérer deux rangs consécutifs tels que

$$1,02^{n-1} < 2 \quad \text{et} \quad 1,02^n \geq 2.$$

À la calculatrice, on obtient :

$$1,02^{35} \approx 1,99988955,$$

donc

$$1,02^{35} < 2.$$

Au rang suivant,

$$1,02^{36} \approx 2,03988734,$$

donc

$$1,02^{36} > 2.$$

Ainsi, le rang 35 ne convient pas, tandis que le rang 36 convient. Comme la suite $(1,02^n)$ est croissante, aucun entier inférieur ou égal à 35 ne peut convenir.

Résultat

Le rang obtenu avec Bernoulli,

$$\boxed{50},$$

n'est pas le plus petit rang possible.

Le plus petit entier n tel que

$$1,02^n \geq 2$$

est

$$\boxed{n = 36.}$$

Pourquoi Bernoulli donne-t-elle 50 alors que le minimum est 36 ?

Il n'y a aucune contradiction. Bernoulli fournit une minoration :

$$1,02^n \geq 1 + 0,02n.$$

La quantité $1 + 0,02n$ augmente de façon linéaire, alors que $1,02^n$ augmente de façon géométrique. La puissance finit donc par croître plus vite que sa borne de Bernoulli.

Par exemple, au rang 36, la borne de Bernoulli vaut seulement

$$1 + 0,02 \times 36 = 1 + 0,72 = 1,72.$$

Bernoulli permet donc d'affirmer

$$1,02^{36} \geq 1,72,$$

mais cette estimation est trop grossière pour prouver à elle seule que $1,02^{36} \geq 2$.

La calculatrice montre pourtant que

$$1,02^{36} \approx 2,03988734 > 2.$$

Idée clé

Une estimation peut être correcte sans être optimale. Ici, Bernoulli donne une valeur sûre, $n = 50$, tandis que la vérification numérique permet de trouver le premier rang exact, $n = 36$.

Bilan final

Étape	Résultat
Bernoulli	$1,02^n \geq 1 + 0,02n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Valeur suffisante	$n = 50$ garantit $1,02^n \geq 2$
Vérification	$1,02^{35} \approx 1,99988955 < 2$
Premier rang exact	$1,02^{36} \approx 2,03988734 > 2$, donc $n = 36$

Méthode à retenir

Lorsqu'une question demande d'utiliser l'inégalité de Bernoulli pour estimer une puissance :

1. écrire la base sous la forme $1 + x$;
2. appliquer

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx;$$

3. résoudre l'inégalité obtenue sur la borne $1 + nx$;
4. distinguer une **valeur suffisante** du **plus petit rang exact** ;
5. si l'énoncé le demande, utiliser la calculatrice pour déterminer ce premier rang exact.

Raisonnement par récurrence - Inégalité de Bernoulli - Estimations

Exercice 6 - Divisibilité

Raisonnement par récurrence

Énoncé

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$7^{n+1} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

Correction détaillée

Nous devons démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels n . La méthode demandée est donc le **raisonnement par récurrence**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons la propriété

$$(P_n) : \quad 7^{n+1} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

Dire que $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6 signifie qu'il existe un entier q tel que

$$7^{n+1} - 1 = 6q.$$

Nous allons vérifier successivement l'initialisation puis l'hérédité.

1. Initialisation

Le premier entier naturel est $n = 0$. Il faut donc vérifier (P_0) .

Pour $n = 0$,

$$7^{0+1} - 1 = 7^1 - 1 = 7 - 1 = 6.$$

Or

$$6 = 6 \times 1,$$

et $1 \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $7^1 - 1$ est divisible par 6.

La propriété (P_0) est vraie.

2. Hypothèse de récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété (P_n) soit vraie.

Cela signifie que

$$7^{n+1} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

Autrement dit, il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$7^{n+1} - 1 = 6q.$$

Cette égalité est notre **hypothèse de récurrence**. Nous devons maintenant montrer que la propriété est vraie au rang suivant $n + 1$.

3. Hérédité

Au rang $n + 1$, la propriété à démontrer est

$$(P_{n+1}) : \quad 7^{(n+1)+1} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

C'est-à-dire

$$7^{n+2} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

Partons de l'expression à étudier :

$$7^{n+2} - 1.$$

On écrit

$$7^{n+2} = 7 \times 7^{n+1},$$

donc

$$7^{n+2} - 1 = 7 \times 7^{n+1} - 1.$$

Pour faire apparaître l'expression $7^{n+1} - 1$ présente dans l'hypothèse de récurrence, on ajoute et on retranche 7 :

$$7 \times 7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^{n+1} - 7 + 6.$$

On factorise les deux premiers termes par 7 :

$$7^{n+2} - 1 = 7(7^{n+1} - 1) + 6.$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$7^{n+1} - 1 = 6q.$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient

$$7^{n+2} - 1 = 7(6q) + 6.$$

Donc

$$7^{n+2} - 1 = 42q + 6.$$

On factorise par 6 :

$$7^{n+2} - 1 = 6(7q + 1).$$

Or $q \in \mathbb{Z}$, donc $7q + 1 \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $7^{n+2} - 1$ est bien un multiple de 6.

Si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie. La propriété est donc héréditaire.

4. Conclusion par récurrence

Nous avons montré que :

- (P_0) est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 6 \mid (7^{n+1} - 1).$$

Autrement dit, pour tout entier naturel n , $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6.

Vérification sur quelques valeurs

Ces calculs ne remplacent pas la démonstration, mais permettent de vérifier le résultat sur les premiers rangs.

Pour $n = 0$:

$$7^1 - 1 = 6 = 6 \times 1.$$

Pour $n = 1$:

$$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 6 \times 8.$$

Pour $n = 2$:

$$7^3 - 1 = 343 - 1 = 342 = 6 \times 57.$$

Pour $n = 3$:

$$7^4 - 1 = 2401 - 1 = 2400 = 6 \times 400.$$

On observe bien que chaque résultat est un multiple de 6.

Pour démontrer par récurrence une divisibilité du type

A_n est divisible par d ,

on peut écrire l'hypothèse de récurrence sous la forme

$$A_n = dq \quad (q \in \mathbb{Z}),$$

puis transformer A_{n+1} de manière à faire apparaître A_n . Il suffit alors de montrer que A_{n+1} peut s'écrire sous la forme $d \times (\text{entier})$.

Dans cet exercice, l'identité essentielle est

$$7^{n+2} - 1 = 7(7^{n+1} - 1) + 6.$$

Elle permet d'utiliser directement l'hypothèse de récurrence.

Bilan final

La démonstration suit exactement les trois étapes fondamentales d'une récurrence :

1. **Initialisation** : la propriété est vraie pour $n = 0$.
2. **Hérédité** : $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$.
3. **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$7^{n+1} - 1 \text{ est divisible par } 6 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Partie B - Limites de suites

Exercice 7 - Limites usuelles

Déterminer les limites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $a_n = 5n^2 - 3n + 7$.

2. $b_n = 4 - \sqrt{n}$.

3. $c_n = \frac{3}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

4. $d_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)(n^2 + 1)$.

5. $e_n = \frac{5}{2 - n^2}$.

6. $f_n = (-1)^n$.

Pour la dernière suite, justifier soigneusement pourquoi elle ne converge pas.

Correction détaillée

1) Limite de $a_n = 5n^2 - 3n + 7$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, le terme dominant du polynôme est $5n^2$. Pour rendre cela complètement visible, on factorise par n^2 :

$$a_n = n^2 \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} \right).$$

Or

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{7}{n^2} \rightarrow 0,$$

donc

$$5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} \rightarrow 5.$$

En particulier, cette parenthèse reste strictement positive et proche de 5 lorsque n est grand. De plus,

$$n^2 \rightarrow +\infty.$$

Ainsi le produit tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Méthode à retenir. Pour un polynôme en n , le terme de plus haut degré commande le comportement à l'infini. Ici, $5n^2$ est positif et tend vers $+\infty$.

2) Limite de $b_n = 4 - \sqrt{n}$

On sait que

$$\sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$-\sqrt{n} \longrightarrow -\infty.$$

Ajouter la constante 4 ne change pas le caractère infini de cette limite. Ainsi,

$$4 - \sqrt{n} \longrightarrow -\infty.$$

On peut aussi le voir de manière très concrète : plus n devient grand, plus $\sqrt{n}$ devient grand, donc $4 - \sqrt{n}$ devient négatif avec une valeur absolue de plus en plus grande.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty.$$

3) Limite de $c_n = \frac{3}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$

On étudie séparément les deux termes.

Comme

$$n \longrightarrow +\infty,$$

on a

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\frac{3}{n} \longrightarrow 0.$$

De même,

$$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0,$$

et par conséquent

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

La limite d'une somme est la somme des limites lorsque celles-ci existent et sont finies. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 + 0 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0.$$

4) Limite de $d_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)(n^2 + 1)$

Étudions les deux facteurs :

$$2 + \frac{1}{n} \longrightarrow 2$$

et

$$n^2 + 1 \longrightarrow +\infty.$$

Le premier facteur tend donc vers le nombre strictement positif 2, tandis que le second tend vers $+\infty$. Leur produit tend alors vers $+\infty$.

On peut également obtenir une minoration très simple. Pour tout $n \geq 1$,

$$2 + \frac{1}{n} \geq 2 \quad \text{et} \quad n^2 + 1 > 0.$$

Donc

$$d_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)(n^2 + 1) \geq 2(n^2 + 1).$$

Or

$$2(n^2 + 1) \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi, par comparaison,

$$d_n \longrightarrow +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty.$$

5) Limite de $e_n = \frac{5}{2 - n^2}$

Le dénominateur tend vers $-\infty$ car

$$n^2 \longrightarrow +\infty \quad \implies \quad 2 - n^2 \longrightarrow -\infty.$$

Pour rendre la limite encore plus claire, écrivons

$$e_n = \frac{5}{2 - n^2} = -\frac{5}{n^2 - 2}.$$

Pour $n \geq 2$, on a $n^2 - 2 > 0$, et

$$n^2 - 2 \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$\frac{5}{n^2 - 2} \longrightarrow 0,$$

d'où

$$-\frac{5}{n^2 - 2} \longrightarrow 0.$$

Les termes sont négatifs à partir de $n = 2$, mais ils se rapprochent de 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0.$$

6) Étude de $f_n = (-1)^n$

Calculons quelques termes :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = -1, \quad \dots$$

Ainsi,

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La suite oscille donc indéfiniment entre 1 et -1.

Justification rigoureuse de la non-convergence

Supposons, pour obtenir une contradiction, que (f_n) converge vers un réel ℓ .

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'après la définition de la convergence, il existerait un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|f_n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Choisissons alors un entier pair $p \geq N$ et un entier impair $q \geq N$. On a

$$f_p = 1 \quad \text{et} \quad f_q = -1.$$

Donc

$$|1 - \ell| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-1 - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|1 - (-1)| \leq |1 - \ell| + |\ell - (-1)|.$$

Ainsi,

$$2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui est impossible.

Notre supposition est donc fautive : la suite (f_n) ne converge pas.

La suite $f_n = (-1)^n$ est divergente.

Interprétation. Les termes d'indice pair valent toujours 1 et ceux d'indice impair valent toujours -1 . Ils ne peuvent donc pas tous se rapprocher d'un même nombre réel.

Bilan final

Suite	Expression	Limite
a_n	$5n^2 - 3n + 7$	$+\infty$
b_n	$4 - \sqrt{n}$	$-\infty$
c_n	$\frac{3}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$	0
d_n	$\left(2 + \frac{1}{n}\right)(n^2 + 1)$	$+\infty$
e_n	$\frac{5}{2 - n^2}$	0
f_n	$(-1)^n$	divergente

Réflexes essentiels pour les limites de suites :

- pour un polynôme, repérer le terme de plus haut degré ;
- pour une fraction, étudier séparément numérateur et dénominateur ;
- utiliser $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$;
- lorsqu'un produit contient un facteur tendant vers un réel strictement positif et un autre vers $+\infty$, le produit tend vers $+\infty$;
- une suite qui oscille durablement entre deux valeurs distinctes ne peut pas converger.

Partie B - Limites de suites

Exercice 8 - Reconnaître les formes indéterminées

Énoncé

Sans chercher encore à calculer les limites, indiquer lesquelles conduisent directement à une limite et lesquelles présentent une forme indéterminée. Préciser alors son type.

1. $n^2 + 4n$
2. $n - 5\sqrt{n}$
3. $\frac{2n^2 + 1}{n + 4}$
4. $\frac{3n + 2}{5n - 1}$
5. $\left(\frac{1}{n} + 2\right)(n^2 - 3)$
6. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Idée clé

Avant de transformer une expression, on commence toujours par regarder séparément le comportement de ses différentes parties lorsque $n \rightarrow +\infty$. On remplace mentalement chaque partie par son comportement : 0, un réel non nul, $+\infty$ ou $-\infty$. On identifie ensuite la forme obtenue.

Rappel : qu'appelle-t-on une forme indéterminée ?

Une **forme indéterminée** est une forme pour laquelle les règles usuelles sur les limites ne permettent pas de conclure immédiatement. Il faut alors transformer l'expression avant de pouvoir calculer la limite.

Les formes indéterminées les plus fréquentes dans ce chapitre sont notamment

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\infty - \infty}, \quad \boxed{0 \times \infty}, \quad \boxed{\frac{0}{0}}.$$

En revanche, des formes telles que

$$+\infty + +\infty, \quad 2 \times (+\infty), \quad \frac{1}{+\infty}$$

ne sont pas indéterminées : elles permettent de conclure directement.

1) $n^2 + 4n$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$n^2 \longrightarrow +\infty$$

et

$$4n \longrightarrow +\infty.$$

L'expression est une somme :

$$n^2 + 4n.$$

On obtient donc la forme

$$(+\infty) + (+\infty).$$

Cette forme n'est pas indéterminée : la somme de deux quantités qui tendent vers $+\infty$ tend elle-même vers $+\infty$.

Conclusion

La suite $n^2 + 4n$ conduit directement à une limite. La forme est

$$+\infty + +\infty,$$

qui n'est **pas** une forme indéterminée.

2) $n - 5\sqrt{n}$

Étudions séparément les deux termes.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$n \longrightarrow +\infty.$$

De plus,

$$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty,$$

donc, puisque $5 > 0$,

$$5\sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$

L'expression est une différence :

$$n - 5\sqrt{n}.$$

On obtient alors symboliquement

$$+\infty - (+\infty),$$

c'est-à-dire la forme

$$\infty - \infty.$$

Attention

On ne peut surtout pas écrire $+\infty - (+\infty) = 0$. Le symbole ∞ n'est pas un nombre réel. Deux quantités peuvent toutes les deux tendre vers $+\infty$ tout en grandissant à des vitesses différentes.

Conclusion

La suite $n - 5\sqrt{n}$ présente la forme indéterminée

$$\boxed{\infty - \infty}.$$

Il faudrait donc transformer l'expression pour calculer sa limite, mais ce calcul n'est pas demandé ici.

$$3) \frac{2n^2 + 1}{n + 4}$$

Commençons par le numérateur :

$$2n^2 + 1.$$

Comme

$$n^2 \rightarrow +\infty,$$

on a

$$2n^2 \rightarrow +\infty$$

puis

$$2n^2 + 1 \rightarrow +\infty.$$

Étudions maintenant le dénominateur :

$$n + 4 \rightarrow +\infty.$$

Le quotient a donc la forme

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Cette forme est indéterminée. En effet, savoir seulement que le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$ ne suffit pas : il faut comparer leurs vitesses de croissance.

Conclusion

La suite

$$\frac{2n^2 + 1}{n + 4}$$

présente la forme indéterminée

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}.$$

$$4) \frac{3n + 2}{5n - 1}$$

Au numérateur,

$$3n + 2 \longrightarrow +\infty.$$

Au dénominateur,

$$5n - 1 \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\frac{3n+2}{5n-1}$$

se présente sous la forme

$$\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Attention

Même si le numérateur et le dénominateur sont ici tous les deux du premier degré, on doit d'abord reconnaître la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le calcul effectif de la limite viendrait seulement dans une étape suivante.

Conclusion

La quatrième suite présente également la forme indéterminée

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

$$5) \left(\frac{1}{n} + 2 \right) (n^2 - 3)$$

Étudions séparément les deux facteurs.

Pour le premier facteur,

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\frac{1}{n} + 2 \longrightarrow 2.$$

Le premier facteur tend donc vers un réel strictement positif et non nul.

Pour le second facteur,

$$n^2 \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$n^2 - 3 \longrightarrow +\infty.$$

Le produit est donc de la forme

$$2 \times (+\infty).$$

Comme $2 > 0$, cette forme conduit directement à $+\infty$. Il ne s'agit pas d'une forme indéterminée.

Conclusion

La suite

$$\left(\frac{1}{n} + 2 \right) (n^2 - 3)$$

conduit directement à une limite. La forme est

$$2 \times (+\infty),$$

qui n'est **pas** indéterminée.

$$6) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$n+1 \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part,

$$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$

L'expression

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

est donc de la forme

$$+\infty - (+\infty),$$

c'est-à-dire

$$\infty - \infty.$$

Idée clé

Dans un calcul ultérieur, une différence de deux racines carrées suggère souvent l'utilisation de l'expression conjuguée. Mais l'exercice demande ici seulement de reconnaître la forme, donc on s'arrête à ce stade.

Conclusion

La sixième suite présente la forme indéterminée

$$\boxed{\infty - \infty}.$$

Bilan complet

N°	Expression	Forme obtenue	Nature
1	$n^2 + 4n$	$+\infty + +\infty$	Directe
2	$n - 5\sqrt{n}$	$\infty - \infty$	Indéterminée
3	$\frac{2n^2 + 1}{n + 4}$	$\frac{\infty}{\infty}$	Indéterminée
4	$\frac{3n + 2}{5n - 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	Indéterminée
5	$\left(\frac{1}{n} + 2\right)(n^2 - 3)$	$2 \times (+\infty)$	Directe
6	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	$\infty - \infty$	Indéterminée

Conclusion

Les expressions qui conduisent directement à une limite sont les numéros

1 et 5.

Les expressions qui présentent une forme indéterminée sont les numéros

2, 3, 4 et 6.

Plus précisément,

2 et 6 : $\infty - \infty$

et

3 et 4 : $\frac{\infty}{\infty}$.

Méthode à retenir

Pour reconnaître correctement une forme indéterminée :

1. étudier séparément la limite de chaque morceau de l'expression ;
2. remplacer chaque morceau par son comportement (0, réel, $+\infty$, $-\infty$) ;
3. identifier la forme obtenue ;
4. ne transformer l'expression que si cette forme est indéterminée.

Attention

Le mot « indéterminée » ne signifie pas que la limite n'existe pas. Il signifie seulement qu'on ne peut pas conclure immédiatement avec les règles élémentaires sur les limites. Une transformation supplémentaire est nécessaire.

Exercice 9 - Factoriser par le terme dominant

Énoncé

Déterminer les limites suivantes :

1. $u_n = 4n^3 - 7n^2 + 2n - 5$;
2. $v_n = -2n^4 + 5n^3 + n$;
3. $w_n = 3n - 8\sqrt{n}$;
4. $t_n = n^2 - 3n\sqrt{n} + 1$.

Dans toute la correction, on étudie les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Idée clé

Pour une somme contenant plusieurs puissances de n , on cherche le terme qui croît le plus vite puis on le met en facteur. Le facteur restant tend généralement vers une constante non nulle, ce qui permet de conclure sans ambiguïté.

1) Limite de $u_n = 4n^3 - 7n^2 + 2n - 5$

La plus grande puissance de n est n^3 . On factorise donc par n^3 :

$$\begin{aligned} u_n &= 4n^3 - 7n^2 + 2n - 5 \\ &= n^3 \left(4 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right). \end{aligned}$$

Or

$$n^3 \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0.$$

Donc

$$4 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3} \rightarrow 4.$$

Comme $4 > 0$, la parenthèse est positive à partir d'un certain rang. Ainsi le produit se comporte comme un nombre positif proche de 4 multiplié par n^3 .

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2) Limite de $v_n = -2n^4 + 5n^3 + n$

La plus grande puissance de n est n^4 . On écrit

$$\begin{aligned} v_n &= -2n^4 + 5n^3 + n \\ &= n^4 \left(-2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right). \end{aligned}$$

On a

$$n^4 \rightarrow +\infty$$

et

$$-2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \rightarrow -2.$$

La parenthèse tend donc vers un nombre strictement négatif. Elle est négative à partir d'un certain rang. Par conséquent, une quantité positive qui devient arbitrairement grande est multipliée par une quantité négative proche de -2 .

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

3) Limite de $w_n = 3n - 8\sqrt{n}$

Le terme n croît plus vite que $\sqrt{n}$. Pour le faire apparaître, on remarque que

$$\sqrt{n} = n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} w_n &= 3n - 8\sqrt{n} \\ &= n \left(3 - \frac{8}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Or

$$n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Donc

$$3 - \frac{8}{\sqrt{n}} \rightarrow 3 > 0.$$

La parenthèse est donc positive à partir d'un certain rang, et

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$$

4) Limite de $t_n = n^2 - 3n\sqrt{n} + 1$

On met n^2 en facteur. Pour cela, on écrit

$$3n\sqrt{n} = 3n^2 \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} t_n &= n^2 - 3n\sqrt{n} + 1 \\ &= n^2 \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Or

$$n^2 \rightarrow +\infty, \quad \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1 > 0.$$

La parenthèse reste donc positive pour n suffisamment grand.

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

Bilan final

Suite	Limite
$u_n = 4n^3 - 7n^2 + 2n - 5$	$+\infty$
$v_n = -2n^4 + 5n^3 + n$	$-\infty$
$w_n = 3n - 8\sqrt{n}$	$+\infty$
$t_n = n^2 - 3n\sqrt{n} + 1$	$+\infty$

À retenir

Le terme dominant fixe le comportement de la somme. Après factorisation, il faut toujours étudier la limite du facteur entre parenthèses et surtout son signe. Si ce facteur tend vers une constante positive, le signe du terme dominant est conservé ; s'il tend vers une constante négative, le signe est inversé.

Exercice 10 - Quotients de polynômes

Correction complète et détaillée

Énoncé

Déterminer les limites suivantes lorsque $n \rightarrow +\infty$:

1. $\frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 7}$
2. $\frac{4n^3 + n}{2n^2 - 1}$
3. $\frac{-3n^2 + 5}{n^3 + 2n}$
4. $\frac{2n + 1}{4 - n}$

Idée clé

Pour un quotient de polynômes, la méthode la plus sûre consiste à repérer le plus grand degré au numérateur et au dénominateur, puis à diviser tous les termes par la plus grande puissance de n adaptée. On utilise ensuite les limites usuelles

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0.$$

1) Première limite

On étudie

$$A_n = \frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 7}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont tous les deux de degré 2. On divise donc tous les termes par n^2 :

$$A_n = \frac{\frac{5n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{7}{n^2}}.$$

On simplifie :

$$A_n = \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{7}{n^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$5 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 5$$

et

$$2 + \frac{7}{n^2} \rightarrow 2.$$

Comme la limite du dénominateur vaut $2 \neq 0$, on peut passer à la limite dans le quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 7} = \frac{5}{2}.$$

2) Deuxième limite

On étudie

$$B_n = \frac{4n^3 + n}{2n^2 - 1}.$$

Le numérateur est de degré 3 et le dénominateur de degré 2. Comme le degré du numérateur est plus grand, on s'attend à une croissance en valeur absolue.

Factorisons les puissances dominantes :

$$4n^3 + n = n^3 \left(4 + \frac{1}{n^2} \right)$$

et

$$2n^2 - 1 = n^2 \left(2 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Ainsi,

$$B_n = \frac{n^3 \left(4 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n^2} \right)} = n \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}.$$

Étudions les deux facteurs séparément.

D'une part,

$$n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part,

$$\frac{4 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{4}{2} = 2.$$

Cette deuxième quantité tend vers un nombre strictement positif. Ainsi, pour n suffisamment grand, elle reste positive et proche de 2.

Le produit d'une quantité qui tend vers $+\infty$ par une quantité qui tend vers $2 > 0$ tend donc vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + n}{2n^2 - 1} = +\infty.$$

Idée clé

Quand le degré du numérateur dépasse celui du dénominateur d'une unité, le quotient se comporte comme une constante multipliée par n . Ici,

$$\frac{4n^3}{2n^2} = 2n,$$

ce qui explique la limite $+\infty$.

3) Troisième limite

On étudie

$$C_n = \frac{-3n^2 + 5}{n^3 + 2n}.$$

Le numérateur est de degré 2 et le dénominateur de degré 3. Le dénominateur croît donc plus vite.

Divisons numérateur et dénominateur par n^3 :

$$C_n = \frac{-\frac{3n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{2n}{n^3}}.$$

Donc

$$C_n = \frac{-\frac{3}{n} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$-\frac{3}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{n^3} \rightarrow 0,$$

donc

$$-\frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} \rightarrow 0.$$

De plus,

$$1 + \frac{2}{n^2} \rightarrow 1.$$

Comme $1 \neq 0$, on peut passer à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n^2 + 5}{n^3 + 2n} = 0.$$

4) Quatrième limite

On étudie

$$D_n = \frac{2n+1}{4-n}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont tous les deux de degré 1.

On divise donc tous les termes par n :

$$D_n = \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n} - \frac{n}{n}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{4}{n} - 1}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{4}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$$

et

$$\frac{4}{n} - 1 \rightarrow -1.$$

Le dénominateur a une limite non nulle. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{4-n} = -2.$$

Bilan final

Suite	Limite
$\frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 7}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{4n^3 + n}{2n^2 - 1}$	$+\infty$
$\frac{-3n^2 + 5}{n^3 + 2n}$	0
$\frac{2n + 1}{4 - n}$	-2

Résultat

Pour les quotients de polynômes, il est utile de retenir :

- mêmes degrés : la limite est le quotient des coefficients dominants ;
- degré du numérateur plus petit : la limite est généralement 0 ;
- degré du numérateur plus grand : le quotient est non borné en valeur absolue, et il faut étudier son signe.

La division par la plus grande puissance de n permet de justifier rigoureusement ces règles.

Exercice 11 - Expressions conjuguées

Énoncé

Déterminer les limites suivantes en utilisant, lorsque cela est pertinent, une expression conjuguée :

1. $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

2. $\sqrt{n^2+3n} - n$

3. $n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$

4. $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Dans tout l'exercice, on étudie les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Idée clé

Lorsque l'on rencontre une différence contenant des racines carrées,

$$\sqrt{A} - \sqrt{B},$$

on multiplie par l'expression conjuguée $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. On utilise alors

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B.$$

Cela transforme souvent une forme du type $+\infty - +\infty$ en un quotient beaucoup plus simple.

1) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\sqrt{n+5} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

La différence se présente donc sous la forme

$$+\infty - +\infty,$$

qui est une forme indéterminée. Il faut transformer l'expression.

On multiplie et on divise par l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+5} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+5) - n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Étudions maintenant le dénominateur. Comme

$$\sqrt{n+5} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

on a

$$\sqrt{n+5} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur est la constante positive 5. Par conséquent,

$$\frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = 0$$

2) $\sqrt{n^2 + 3n} - n$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n^2 + 3n} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty.$$

On retrouve encore une forme indéterminée $+\infty - +\infty$.

On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître des quantités qui possèdent des limites finies, on factorise n^2 sous la racine. Comme $n > 0$ pour $n \geq 1$,

$$\sqrt{n^2 + 3n} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = n\sqrt{1 + \frac{3}{n}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} &= \frac{3n}{n\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n} \\ &= \frac{3n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0,$$

donc, par continuité de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 1.$$

Ainsi,

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \rightarrow 2.$$

Finalement,

$$\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = \frac{3}{2}$$

$$3) \ n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$$

On commence par examiner séparément les deux facteurs :

$$n \rightarrow +\infty$$

et

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \rightarrow \sqrt{1} - 1 = 0.$$

L'expression est donc de la forme

$$+\infty \times 0,$$

qui est une forme indéterminée.

La présence d'une différence de racines suggère d'utiliser le conjugué :

$$\begin{aligned} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) &= n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= n \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right) - 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= n \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

on a

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \rightarrow 2,$$

et donc

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = 1$$

Point d'attention

Le produit $+\infty \times 0$ ne permet pas de conclure directement. Il faut d'abord transformer l'expression. Ici, le conjugué fait disparaître la différence de racines et simplifie exactement le facteur n .

$$4) \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Le dénominateur vérifie

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0.$$

Mais il est important de connaître son signe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n+1 > n,$$

donc

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n},$$

et par conséquent

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0.$$

Le dénominateur tend donc vers 0 par valeurs positives. On s'attend à une limite $+\infty$, mais on va le démontrer proprement grâce au conjugué.

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1) - n} \\ &= \sqrt{n+1} + \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{n+1} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = +\infty$$

Bilan final

Expression	Transformation principale	Limite
$\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$	Conjuguée	0
$\sqrt{n^2 + 3n} - n$	Conjuguée puis factorisation	$\frac{3}{2}$
$n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$	Conjuguée	1
$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$	Conjuguée	$+\infty$

Idée clé

Réflexe à retenir : dès qu'une limite contient une différence de racines carrées, surtout sous une forme $\infty - \infty$ ou lorsqu'une telle différence se trouve au dénominateur, penser immédiatement à l'expression conjuguée.

Exercice 11 - Expressions conjuguées

Énoncé

Déterminer les limites suivantes en utilisant, lorsque cela est pertinent, une expression conjuguée :

1. $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

2. $\sqrt{n^2+3n} - n$

3. $n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$

4. $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Dans tout l'exercice, on étudie les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Idée clé

Lorsque l'on rencontre une différence contenant des racines carrées,

$$\sqrt{A} - \sqrt{B},$$

on multiplie par l'expression conjuguée $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. On utilise alors

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B.$$

Cela transforme souvent une forme du type $+\infty - +\infty$ en un quotient beaucoup plus simple.

1) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\sqrt{n+5} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

La différence se présente donc sous la forme

$$+\infty - +\infty,$$

qui est une forme indéterminée. Il faut transformer l'expression.

On multiplie et on divise par l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+5} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+5) - n}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Étudions maintenant le dénominateur. Comme

$$\sqrt{n+5} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

on a

$$\sqrt{n+5} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur est la constante positive 5. Par conséquent,

$$\frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = 0$$

2) $\sqrt{n^2 + 3n} - n$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n^2 + 3n} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty.$$

On retrouve encore une forme indéterminée $+\infty - +\infty$.

On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître des quantités qui possèdent des limites finies, on factorise n^2 sous la racine. Comme $n > 0$ pour $n \geq 1$,

$$\sqrt{n^2 + 3n} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = n\sqrt{1 + \frac{3}{n}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} &= \frac{3n}{n\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n} \\ &= \frac{3n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1\right)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{3}{n} \rightarrow 0,$$

donc, par continuité de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 1.$$

Ainsi,

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \rightarrow 2.$$

Finalement,

$$\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = \frac{3}{2}$$

$$3) \ n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$$

On commence par examiner séparément les deux facteurs :

$$n \rightarrow +\infty$$

et

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \rightarrow \sqrt{1} - 1 = 0.$$

L'expression est donc de la forme

$$+\infty \times 0,$$

qui est une forme indéterminée.

La présence d'une différence de racines suggère d'utiliser le conjugué :

$$\begin{aligned} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) &= n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= n \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right) - 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= n \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

on a

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \rightarrow 2,$$

et donc

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = 1$$

Point d'attention

Le produit $+\infty \times 0$ ne permet pas de conclure directement. Il faut d'abord transformer l'expression. Ici, le conjugué fait disparaître la différence de racines et simplifie exactement le facteur n .

$$4) \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Le dénominateur vérifie

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0.$$

Mais il est important de connaître son signe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n+1 > n,$$

donc

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n},$$

et par conséquent

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0.$$

Le dénominateur tend donc vers 0 par valeurs positives. On s'attend à une limite $+\infty$, mais on va le démontrer proprement grâce au conjugué.

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1) - n} \\ &= \sqrt{n+1} + \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{n+1} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = +\infty$$

Bilan final

Expression	Transformation principale	Limite
$\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$	Conjuguée	0
$\sqrt{n^2 + 3n} - n$	Conjuguée puis factorisation	$\frac{3}{2}$
$n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$	Conjuguée	1
$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$	Conjuguée	$+\infty$

Idée clé

Réflexe à retenir : dès qu'une limite contient une différence de racines carrées, surtout sous une forme $\infty - \infty$ ou lorsqu'une telle différence se trouve au dénominateur, penser immédiatement à l'expression conjuguée.

Partie B - Limites de suites

Exercice 12 - Seuil algorithmique

Correction complète et détaillée

Énoncé

On considère la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1,4u_n + 2.$$

1. Calculer les quatre premiers termes.
2. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le premier rang n tel que $u_n \geq A$.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 3
    while ...:
        n = ...
        u = ...
    return ...
```

3. Déterminer le premier rang à partir duquel $u_n \geq 1000$.

1. Calcul des quatre premiers termes

La suite est définie par une relation de récurrence. Pour obtenir un nouveau terme, on remplace donc u_n dans

$$u_{n+1} = 1,4u_n + 2$$

par le terme déjà connu.

Quels sont les quatre premiers termes ?

Comme la suite commence à l'indice 0, les quatre premiers termes sont

$$u_0, u_1, u_2, u_3.$$

Il ne faut donc pas commencer à u_1 .

Nous connaissons déjà

$$u_0 = 3.$$

Calculons u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,4u_0 + 2 \\ &= 1,4 \times 3 + 2 \\ &= 4,2 + 2 \\ &= 6,2. \end{aligned}$$

Donc

$$u_1 = 6,2.$$

Calculons ensuite u_2 :

$$\begin{aligned}u_2 &= 1,4u_1 + 2 \\&= 1,4 \times 6,2 + 2 \\&= 8,68 + 2 \\&= 10,68.\end{aligned}$$

Ainsi

$$u_2 = 10,68.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}u_3 &= 1,4u_2 + 2 \\&= 1,4 \times 10,68 + 2 \\&= 14,952 + 2 \\&= 16,952.\end{aligned}$$

Donc

$$u_3 = 16,952.$$

Résultat

Les quatre premiers termes sont

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 6,2, \quad u_2 = 10,68, \quad u_3 = 16,952.$$

2. Compléter la fonction Python

On veut que la fonction renvoie le **premier indice** n pour lequel

$$u_n \geq A.$$

Au départ, les variables doivent représenter le terme connu :

$$n = 0 \quad \text{et} \quad u = u_0 = 3.$$

Tant que le terme courant u n'a pas encore atteint le seuil A , c'est-à-dire tant que

$$u < A,$$

on doit calculer le terme suivant.

Pour passer du rang n au rang $n + 1$, on effectue deux opérations :

$$n \leftarrow n + 1$$

et

$$u \leftarrow 1,4u + 2.$$

Lorsque la boucle s'arrête, la condition $u < A$ est devenue fausse. On a donc

$$u \geq A.$$

Comme on a testé les termes dans l'ordre $u_0, u_1, u_2, \dots$, le rang obtenu est bien le premier rang recherché.

La fonction complétée est donc :

```

1 def seuil(A):
2     n = 0
3     u = 3
4     while u < A:
5         n = n + 1
6         u = 1.4 * u + 2
7     return n

```

Lecture ligne par ligne

- `n = 0` : on commence au rang 0 ;
- `u = 3` : u contient la valeur de u_0 ;
- `while u < A` : on continue tant que le seuil n'est pas atteint ;
- `n = n + 1` : on avance d'un rang ;
- `u = 1.4 * u + 2` : on calcule le terme suivant ;
- `return n` : on renvoie le premier rang où $u_n \geq A$.

Point important

L'ordre des mises à jour est ici cohérent : à l'entrée dans la boucle, u représente u_n ; après l'augmentation de n et le calcul de u , la variable u représente le nouveau terme u_n au nouveau rang.

3. Premier rang à partir duquel $u_n \geq 1000$

On applique la fonction au seuil $A = 1000$:

```
seuil(1000)
```

Elle renvoie

15 .

Pour bien comprendre ce résultat, regardons les derniers termes avant le franchissement du seuil.

En poursuivant la récurrence, on obtient notamment :

$$u_{14} \approx 883,960546$$

et

$$u_{15} \approx 1239,544764.$$

Ainsi

$$u_{14} < 1000$$

mais

$$u_{15} \geq 1000.$$

Le premier rang demandé est donc bien

$$n = 15.$$

Résultat

Le premier rang à partir duquel la suite atteint ou dépasse 1000 est

15 .

Autrement dit,

$$u_{14} < 1000 \leq u_{15}.$$

Vérification complémentaire par une expression explicite

Cette partie n'est pas nécessaire pour programmer la fonction, mais elle permet de contrôler le résultat obtenu.

La relation

$$u_{n+1} = 1,4u_n + 2$$

possède un point fixe ℓ vérifiant

$$\ell = 1,4\ell + 2.$$

Donc

$$-0,4\ell = 2, \quad \text{d'où} \quad \ell = -5.$$

On introduit alors

$$v_n = u_n + 5.$$

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 1,4u_n + 2 + 5 \\ &= 1,4u_n + 7 \\ &= 1,4(u_n + 5) \\ &= 1,4v_n. \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison 1,4. De plus,

$$v_0 = u_0 + 5 = 3 + 5 = 8.$$

Par conséquent,

$$v_n = 8(1,4)^n,$$

et donc

$$\boxed{u_n = 8(1,4)^n - 5.}$$

Pour $n = 14$:

$$u_{14} = 8(1,4)^{14} - 5 \approx 883,960546 < 1000.$$

Pour $n = 15$:

$$u_{15} = 8(1,4)^{15} - 5 \approx 1239,544764 > 1000.$$

La vérification confirme donc exactement le résultat obtenu par l'algorithme.

Bilan final

Question	Résultat
Quatre premiers termes	$u_0 = 3, u_1 = 6,2, u_2 = 10,68, u_3 = 16,952$
Condition de boucle	<code>while u < A:</code>
Mise à jour du rang	<code>n = n + 1</code>
Mise à jour du terme	<code>u = 1.4 * u + 2</code>
Valeur renvoyée	<code>return n</code>
Premier rang pour $u_n \geq 1000$	$\boxed{n = 15}$

À retenir

Pour chercher algorithmiquement le premier rang où une suite dépasse un seuil :

1. initialiser le rang et le terme courant ;
2. répéter le calcul du terme suivant tant que le seuil n'est pas atteint ;
3. arrêter dès que la condition voulue devient vraie ;
4. renvoyer le rang obtenu.

Partie C - Exercices d'approfondissement

Exercice 13 - Suite arithmético-géométrique

Énoncé

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 8 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,75u_n + 5.$$

1. Déterminer le réel ℓ vérifiant

$$\ell = 0,75\ell + 5.$$

2. On pose $w_n = u_n - \ell$. Montrer que (w_n) est géométrique.
3. Exprimer w_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) .
5. Retrouver cette limite en justifiant d'abord que (u_n) est monotone et bornée.

1. Détermination du réel ℓ

Nous cherchons un réel ℓ qui reste inchangé par la transformation

$$x \longmapsto 0,75x + 5.$$

Il doit donc vérifier

$$\ell = 0,75\ell + 5.$$

Soustrayons $0,75\ell$ aux deux membres :

$$\ell - 0,75\ell = 5.$$

Or

$$1 - 0,75 = 0,25,$$

donc

$$0,25\ell = 5.$$

Comme $0,25 = \frac{1}{4}$, on obtient

$$\frac{1}{4}\ell = 5,$$

puis, en multipliant par 4,

$$\ell = 20.$$

Résultat

$$\boxed{\ell = 20}.$$

Idée clé

Le nombre ℓ est appelé point fixe de la relation de récurrence. Le fait de soustraire ce point fixe aux termes de la suite permet souvent de transformer une suite arithmético-géométrique en une suite géométrique.

2. Montrer que (w_n) est géométrique

On définit

$$w_n = u_n - \ell.$$

D'après la question précédente, $\ell = 20$. Ainsi

$$w_n = u_n - 20.$$

Calculons w_{n+1} :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 20.$$

La relation de récurrence donne

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 5.$$

Donc

$$w_{n+1} = 0,75u_n + 5 - 20.$$

Comme $5 - 20 = -15$, on a

$$w_{n+1} = 0,75u_n - 15.$$

Nous voulons faire apparaître $u_n - 20$. Or

$$0,75(u_n - 20) = 0,75u_n - 0,75 \times 20.$$

Et

$$0,75 \times 20 = 15.$$

Par conséquent

$$0,75(u_n - 20) = 0,75u_n - 15.$$

Donc

$$w_{n+1} = 0,75(u_n - 20).$$

Mais $u_n - 20 = w_n$, d'où

$$\boxed{w_{n+1} = 0,75w_n}.$$

Ainsi, (w_n) est une suite géométrique de raison

$$q = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Calculons son premier terme :

$$w_0 = u_0 - 20 = 8 - 20 = -12.$$

Résultat

La suite (w_n) est géométrique de premier terme

$$\boxed{w_0 = -12}$$

et de raison

$$\boxed{q = \frac{3}{4}}.$$

3. Expressions de w_n puis de u_n

Pour une suite géométrique de premier terme w_0 et de raison q , on a

$$w_n = w_0 q^n.$$

Ici,

$$w_0 = -12 \quad \text{et} \quad q = \frac{3}{4}.$$

Donc

$$w_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Or

$$w_n = u_n - 20.$$

Ainsi

$$u_n - 20 = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

En ajoutant 20 aux deux membres,

$$u_n = 20 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Résultat

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et

$$u_n = 20 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Vérification sur les premiers termes

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 20 - 12 = 8,$$

ce qui correspond bien à la donnée de départ.

Pour $n = 1$:

$$u_1 = 20 - 12 \times \frac{3}{4} = 20 - 9 = 11.$$

Directement avec la relation de récurrence :

$$u_1 = 0,75 \times 8 + 5 = 6 + 5 = 11.$$

Les deux calculs donnent le même résultat.

4. Détermination de la limite de (u_n)

Nous avons obtenu

$$u_n = 20 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Or

$$\left|\frac{3}{4}\right| < 1.$$

Donc la suite géométrique

$$\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

tend vers 0 :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$-12 \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$u_n = 20 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 20.$$

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20.$$

5. Retrouver la limite par monotonie et bornes

Nous allons maintenant retrouver la même limite sans utiliser directement la formule explicite obtenue à la question 3.

a) Montrer que la suite est majorée par 20

Nous montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 20.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 8 < 20.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier naturel n ,

$$u_n < 20.$$

Comme $0,75 > 0$, on peut multiplier par 0,75 sans changer le sens de l'inégalité :

$$0,75u_n < 0,75 \times 20 = 15.$$

En ajoutant 5,

$$0,75u_n + 5 < 20.$$

Or

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 5.$$

Donc

$$u_{n+1} < 20.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 20.$$

La suite est donc majorée par 20.

b) Étudier la monotonie

Calculons la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = 0,75u_n + 5 - u_n.$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = 5 - 0,25u_n.$$

Comme $0,25 = \frac{1}{4}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{20 - u_n}{4}.$$

Or nous venons de montrer que

$$u_n < 20.$$

Donc

$$20 - u_n > 0.$$

Par conséquent

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Ainsi

$$\boxed{u_{n+1} > u_n}.$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Résultat

(u_n) est strictement croissante et majorée par 20. Elle est donc convergente.

c) Calcul de la limite à partir de la relation de récurrence

Puisque (u_n) est convergente, notons

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

La suite décalée (u_{n+1}) a la même limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L.$$

Passons à la limite dans

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 5.$$

On obtient

$$L = 0,75L + 5.$$

C'est exactement l'équation étudiée dans la première question. Donc

$$L = 20.$$

Résultat

On retrouve bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20}.$$

Bilan final

$$\ell = 20$$

$$w_n = u_n - 20$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}w_n$$

$$w_n = -12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$u_n = 20 - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(u_n) est strictement croissante et majorée par 20

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20.$$

Idée clé

Pour une suite de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, une méthode très efficace consiste à chercher le point fixe ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$, puis à poser $w_n = u_n - \ell$. La nouvelle suite (w_n) devient géométrique, ce qui permet d'obtenir rapidement une formule explicite et la limite.

Exercice 14 - Récurrence et convergence

Énoncé. On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

1) Démontrer par récurrence que

$$1 < u_n \leq 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2) Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}.$$

3) Étudier les variations de (u_n) .

4) Justifier que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

1) Encadrement de u_n par récurrence

Nous voulons montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$(P_n) : \quad 1 < u_n \leq 2.$$

Étape 1 : initialisation

Au rang $n = 0$, on sait que

$$u_0 = 2.$$

On a donc immédiatement

$$1 < 2 \leq 2.$$

Ainsi,

$$1 < u_0 \leq 2.$$

La propriété (P_0) est vraie.

Étape 2 : hérédité

Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, la propriété soit vraie, c'est-à-dire

$$1 < u_n \leq 2.$$

Nous devons montrer que

$$1 < u_{n+1} \leq 2.$$

Comme $u_n > 1$, on a en particulier

$$u_n + 2 > 3 > 0.$$

Le dénominateur de u_{n+1} est donc strictement positif. Nous pouvons comparer les fractions sans ambiguïté de signe.

Montrons que $u_{n+1} > 1$

On a

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Comme $u_n + 2 > 0$,

$$u_{n+1} > 1 \iff 2u_n + 3 > u_n + 2.$$

Or

$$2u_n + 3 - (u_n + 2) = u_n + 1.$$

Puisque $u_n > 1$, on a

$$u_n + 1 > 2 > 0.$$

Donc

$$2u_n + 3 > u_n + 2,$$

et par conséquent

$$\boxed{u_{n+1} > 1}.$$

Montrons que $u_{n+1} \leq 2$

Toujours parce que $u_n + 2 > 0$,

$$u_{n+1} \leq 2 \iff 2u_n + 3 \leq 2(u_n + 2).$$

Développons le membre de droite :

$$2(u_n + 2) = 2u_n + 4.$$

L'inégalité devient donc

$$2u_n + 3 \leq 2u_n + 4,$$

ce qui est vrai puisque

$$3 \leq 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} \leq 2}.$$

Nous avons donc obtenu

$$1 < u_{n+1} \leq 2.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Étape 3 : conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

Résultat

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{1 < u_n \leq 2}.$$

2) Calcul de $u_{n+1} - u_n$

Partons de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - u_n.$$

Mettons les deux termes au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}.$$

Développons :

$$u_n(u_n + 2) = u_n^2 + 2u_n.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}.$$

Les termes $2u_n$ et $-2u_n$ se simplifient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}.$$

Ainsi,

Résultat

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}.$$

Idée clé

Pour connaître le sens de variation de (u_n) , il faut maintenant déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. Le dénominateur $u_n + 2$ est positif. Tout dépend donc du signe de $3 - u_n^2$.

3) Étude des variations de (u_n)

D'après la question 1, nous savons seulement que

$$1 < u_n \leq 2.$$

Cet encadrement ne suffit pas, à lui seul, à décider le signe de

$$3 - u_n^2,$$

car le nombre $\sqrt{3}$ est situé entre 1 et 2.

Il est donc utile de montrer une propriété plus précise :

$$u_n > \sqrt{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration de $u_n > \sqrt{3}$

Nous procédons par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 2.$$

Or

$$2 > \sqrt{3}.$$

Donc

$$u_0 > \sqrt{3}.$$

Hérédité. Supposons que

$$u_n > \sqrt{3}.$$

Étudions la différence $u_{n+1} - \sqrt{3}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} - \sqrt{3}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{2u_n + 3 - \sqrt{3}(u_n + 2)}{u_n + 2}.$$

Développons le numérateur :

$$2u_n + 3 - \sqrt{3}u_n - 2\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3}.$$

Or

$$3 - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}).$$

Ainsi

$$(2 - \sqrt{3})u_n + 3 - 2\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3}).$$

Donc

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}.$$

Étudions le signe de chacun des facteurs :

$$2 - \sqrt{3} > 0,$$

$$u_n - \sqrt{3} > 0 \quad \text{par hypothèse de récurrence,}$$

et

$$u_n + 2 > 0.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - \sqrt{3} > 0,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} > \sqrt{3}.$$

La propriété est héréditaire. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > \sqrt{3}.$$

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Nous savons que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}.$$

Comme

$$u_n > \sqrt{3} > 0,$$

on peut élever au carré :

$$u_n^2 > 3.$$

Donc

$$3 - u_n^2 < 0.$$

D'autre part,

$$u_n + 2 > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} < 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n < 0,$$

soit

$$\boxed{u_{n+1} < u_n}.$$

Résultat

La suite (u_n) est **strictement décroissante**.

4) Convergence et détermination de la limite

Nous avons établi deux informations essentielles :

- (u_n) est strictement décroissante ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{3}$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, toute suite décroissante et minorée est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

De plus,

$$\sqrt{3} \leq \ell \leq 2.$$

Calcul de la limite

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

Puisque $u_n \rightarrow \ell$, on a également

$$u_{n+1} \rightarrow \ell.$$

Comme $\ell \geq \sqrt{3}$, on a

$$\ell + 2 > 0.$$

Nous pouvons donc passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{2\ell + 3}{\ell + 2}.$$

Multiplions par $\ell + 2$:

$$\ell(\ell + 2) = 2\ell + 3.$$

Développons :

$$\ell^2 + 2\ell = 2\ell + 3.$$

En soustrayant 2ℓ aux deux membres :

$$\ell^2 = 3.$$

Donc

$$\ell = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \ell = -\sqrt{3}.$$

Mais $\ell \geq \sqrt{3} > 0$. La valeur $-\sqrt{3}$ est donc impossible.

Finalement,

Résultat

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}}.$$

Bilan final

Pour la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2},$$

on a montré successivement que

$$1 < u_n \leq 2,$$

puis, plus précisément,

$$\sqrt{3} < u_n \leq 2.$$

De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} < 0,$$

donc (u_n) est strictement décroissante. Elle est minorée par $\sqrt{3}$, donc convergente, et sa limite est

$$\sqrt{3}.$$

Méthode à retenir

Pour une suite définie par une relation de la forme

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

les étapes classiques sont souvent les suivantes :

1. trouver un intervalle dans lequel tous les termes restent ;
2. calculer $u_{n+1} - u_n$ afin d'étudier la monotonie ;
3. si le signe n'est pas immédiat, chercher une borne plus précise ;
4. conclure à la convergence grâce au théorème des suites monotones ;
5. si $u_n \rightarrow \ell$, passer à la limite dans la relation de récurrence et résoudre $\ell = f(\ell)$;
6. conserver uniquement la solution compatible avec les bornes déjà obtenues.

Exercice 15 - Deux suites adjacentes

Suites numériques - Corrigé complet et détaillé

Énoncé

On définit, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

- 1) Montrer que (u_n) est croissante.
- 2) Étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$.
- 3) Montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0.
- 4) En admettant le théorème des suites adjacentes, conclure que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Rappel - Suites adjacentes. Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et lorsque leur écart tend vers 0. Dans ce cas, elles convergent vers une même limite.

1) Montrer que (u_n) est croissante

Par définition,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Au rang suivant,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or, pour tout $n \geq 1$,

$$(n+1)^2 > 0,$$

donc

$$\frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n > 0,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} > u_n.$$

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

2) Étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$

Nous avons

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Au rang $n + 1$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Or, d'après la question précédente,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc

$$v_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Calculons maintenant la différence :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mettons les trois fractions au même dénominateur $n(n+1)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{n}{n(n+1)^2}, \\ \frac{1}{n+1} &= \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}, \\ \frac{1}{n} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$n > 0 \quad \text{et} \quad (n+1)^2 > 0,$$

donc

$$n(n+1)^2 > 0.$$

Par conséquent,

$$-\frac{1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n < 0,$$

donc

$$v_{n+1} < v_n.$$

$$\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} < v_n$$

La suite (v_n) est donc **strictement décroissante**.

3) Montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0

La définition de v_n donne directement

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

En soustrayant u_n aux deux membres,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Remarquons aussi que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} > 0,$$

d'où

$$v_n - u_n > 0,$$

et par conséquent

$$u_n < v_n.$$

Cette dernière inégalité montre que la suite croissante (u_n) reste toujours en dessous de la suite décroissante (v_n) . En même temps, la distance entre leurs termes de même rang vaut $1/n$ et devient arbitrairement petite lorsque n grandit.

4) Conclusion : les deux suites sont adjacentes

Nous avons établi les trois propriétés suivantes :

- (u_n) est strictement croissante ;
- (v_n) est strictement décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Ces trois propriétés sont précisément celles qui caractérisent deux suites adjacentes.

Ainsi,

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}$$

D'après le théorème des suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite. Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Dans cet exercice, il n'est pas demandé de calculer la valeur exacte de ℓ ; on doit seulement établir que les deux suites convergent vers une même limite.

Bilan final

Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Partie D - Exercices-bilan de Terminale

Exercice-bilan 1 - Modèle de fréquentation

Une plateforme compte initialement 12 000 abonnés. Chaque mois, elle conserve 92% de ses abonnés et en gagne 1 500 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés après n mois. Ainsi,

$$u_0 = 12\,000 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,92u_n + 1\,500.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Déterminer le nombre réel L vérifiant $L = 0,92L + 1\,500$.
3. On pose $v_n = u_n - L$. Montrer que (v_n) est géométrique et exprimer u_n en fonction de n .
4. Étudier le sens de variation de (u_n) .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et interpréter le résultat.
6. Écrire un algorithme donnant le premier mois où le nombre d'abonnés dépasse 18 000.

1) Calcul de u_1 et u_2

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = 0,92u_n + 1\,500.$$

Pour calculer un terme, on remplace donc u_n par le terme précédent.

Calcul de u_1

Au rang $n = 0$,

$$u_1 = 0,92u_0 + 1\,500.$$

Comme $u_0 = 12\,000$,

$$u_1 = 0,92 \times 12\,000 + 1\,500.$$

Or

$$0,92 \times 12\,000 = 11\,040.$$

Donc

$$u_1 = 11\,040 + 1\,500 = 12\,540.$$

Calcul de u_2

Au rang $n = 1$,

$$u_2 = 0,92u_1 + 1\,500.$$

Ainsi,

$$u_2 = 0,92 \times 12\,540 + 1\,500.$$

On calcule

$$0,92 \times 12\,540 = 11\,536,8.$$

Par conséquent,

$$u_2 = 11\,536,8 + 1\,500 = 13\,036,8.$$

Après un mois, la plateforme compte 12 540 abonnés. Après deux mois, le modèle donne 13 036,8 abonnés. Le nombre décimal vient du modèle mathématique ; dans une situation réelle, un nombre d'abonnés est bien sûr entier.

2) Détermination du nombre L

On cherche le réel L tel que

$$L = 0,92L + 1\,500.$$

Regroupons les termes contenant L dans le même membre :

$$L - 0,92L = 1\,500.$$

Donc

$$0,08L = 1\,500.$$

Puisque $0,08 > 0$, on peut diviser par $0,08$:

$$L = \frac{1\,500}{0,08}.$$

Or

$$\frac{1\,500}{0,08} = 18\,750.$$

Ainsi,

$$\boxed{L = 18\,750}.$$

Le nombre L est appelé ici un **point d'équilibre** de la relation de récurrence : si un mois on avait exactement $u_n = L$, alors

$$u_{n+1} = 0,92L + 1\,500 = L,$$

et le nombre d'abonnés resterait égal à L le mois suivant.

3) Étude de la suite $v_n = u_n - L$

Nous avons trouvé

$$L = 18\,750.$$

On définit donc

$$\boxed{v_n = u_n - 18\,750}.$$

a) Montrons que (v_n) est géométrique

Par définition,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 18\,750.$$

Or

$$u_{n+1} = 0,92u_n + 1\,500.$$

Donc

$$v_{n+1} = 0,92u_n + 1\,500 - 18\,750.$$

Calculons la constante :

$$1\,500 - 18\,750 = -17\,250.$$

Mais

$$0,92 \times 18\,750 = 17\,250.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = 0,92u_n - 0,92 \times 18\,750.$$

On factorise par $0,92$:

$$v_{n+1} = 0,92(u_n - 18\,750).$$

Or $u_n - 18\,750 = v_n$. Donc

$$v_{n+1} = 0,92v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$q = 0,92.$$

b) Calcul de v_0

$$v_0 = u_0 - 18\,750 = 12\,000 - 18\,750 = -6\,750.$$

Donc

$$v_0 = -6\,750.$$

c) Expression de v_n

Pour une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q ,

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ici,

$$v_n = -6\,750 (0,92)^n.$$

d) Expression de u_n

Comme

$$v_n = u_n - 18\,750,$$

on a

$$u_n = v_n + 18\,750.$$

Ainsi,

$$u_n = 18\,750 - 6\,750 (0,92)^n.$$

4) Sens de variation de (u_n)

Nous allons utiliser l'expression explicite obtenue :

$$u_n = 18\,750 - 6\,750(0,92)^n.$$

Comme

$$0 < 0,92 < 1,$$

la suite géométrique $((0,92)^n)$ est strictement décroissante et positive.

En multipliant par $-6\,750 < 0$, le sens de variation s'inverse :

$$-6\,750(0,92)^n$$

est strictement croissante.

En ajoutant la constante $18\,750$, on ne change pas le sens de variation. Donc

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

On peut également le vérifier directement. On a

$$u_{n+1} - u_n = 0,92u_n + 1\,500 - u_n.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = 1\,500 - 0,08u_n.$$

Or

$$1\,500 = 0,08 \times 18\,750,$$

d'où

$$u_{n+1} - u_n = 0,08(18\,750 - u_n).$$

D'après l'expression explicite,

$$18\,750 - u_n = 6\,750(0,92)^n > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Nous retrouvons bien que (u_n) est strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < 18\,750,$$

car $6\,750(0,92)^n > 0$. La suite augmente donc vers le niveau d'équilibre sans le dépasser.

5) Limite de (u_n) et interprétation

Nous savons que

$$u_n = 18\,750 - 6\,750(0,92)^n.$$

Puisque

$$0 < 0,92 < 1,$$

la suite géométrique $((0,92)^n)$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,92)^n = 0.$$

Par multiplication par une constante,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -6\,750(0,92)^n = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 18\,750.$$

Interprétation

Selon ce modèle, au fil des mois, le nombre d'abonnés se rapproche de plus en plus de

$$\boxed{18\,750}.$$

Il s'agit de la valeur d'équilibre du modèle : les pertes mensuelles dues aux 8% d'abonnés non conservés finissent par compenser exactement les 1 500 nouveaux abonnés ajoutés chaque mois.

En effet,

$$8\% \text{ de } 18\,750 = 0,08 \times 18\,750 = 1\,500.$$

À ce niveau, perdre 1 500 abonnés puis en gagner 1 500 laisse l'effectif inchangé.

6) Premier mois où le nombre d'abonnés dépasse 18 000

Nous cherchons le plus petit entier n tel que

$$u_n > 18\,000.$$

a) Algorithme en Python

On part du rang 0 et de $u_0 = 12\,000$. Tant que le nombre d'abonnés ne dépasse pas 18 000, on calcule le terme suivant.

```
def premier_mois():
    n = 0
    u = 12000
    while u <= 18000:
        u = 0.92 * u + 1500
        n = n + 1
    return n
```

L'instruction

```
while u <= 18000:
```

signifie : *tant que u est inférieur ou égal à 18 000, continuer les calculs*. La boucle s'arrête donc dès que $u > 18\,000$.

b) Vérification du premier rang

L'algorithme donne

$$n = 27.$$

Vérifions les deux rangs voisins à l'aide de la formule explicite

$$u_n = 18\,750 - 6\,750(0,92)^n.$$

Pour $n = 26$,

$$u_{26} \approx 17\,977,70 < 18\,000.$$

Pour $n = 27$,

$$u_{27} \approx 18\,039,48 > 18\,000.$$

Ainsi, le seuil n'est pas encore dépassé au bout de 26 mois, mais il l'est au bout de 27 mois.

Le premier mois pour lequel le nombre d'abonnés dépasse 18 000 est donc

le 27^e mois.

Bilan général

Résultat	Valeur obtenue
Premiers termes	$u_1 = 12\,540$ et $u_2 = 13\,036,8$
Point d'équilibre	$L = 18\,750$
Suite auxiliaire	$v_n = u_n - 18\,750$
Nature de (v_n)	géométrique de raison $0,92$
Expression de v_n	$v_n = -6\,750(0,92)^n$
Expression de u_n	$u_n = 18\,750 - 6\,750(0,92)^n$
Variation de (u_n)	strictement croissante
Limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 18\,750$
Premier dépassement de $18\,000$	$n = 27$

Méthode à retenir pour une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$:

1. Chercher le point fixe L vérifiant $L = aL + b$.
2. Poser $v_n = u_n - L$.
3. Montrer que $v_{n+1} = av_n$: (v_n) est alors géométrique.
4. Écrire $v_n = v_0 a^n$, puis revenir à u_n .
5. Utiliser la formule explicite pour étudier variations, bornes et limite.

Exercice-bilan 2 - Une suite définie par une fonction

On considère

$$f(x) = \frac{x+6}{x+2} \quad \text{sur } [1, 2]$$

et la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étudier les variations de f sur $[1, 2]$ et vérifier que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. Démontrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n .
3. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 3)}{u_n + 2}.$$

4. En déduire que (u_n) converge.
5. Déterminer sa limite.
6. On pose

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}.$$

Montrer que (v_n) est géométrique, puis obtenir une expression explicite de u_n .

Observation indispensable. Avec les données écrites ci-dessus, les affirmations des questions 1 et 2 ne sont pas exactes. En effet,

$$f(1) = \frac{7}{3} > 2,$$

donc $f([1, 2])$ n'est pas inclus dans $[1, 2]$ et, puisque $u_0 = 1$,

$$u_1 = f(1) = \frac{7}{3} > 2.$$

Nous conservons les données de l'énoncé et résolvons la suite qu'elles définissent effectivement. Cela permet aussi de comprendre précisément son comportement.

1. Étude de la fonction f

Pour $x \in [1, 2]$, on a $x + 2 > 0$, donc f est bien définie.

Calculons sa dérivée. Comme

$$f(x) = \frac{x+6}{x+2},$$

la formule de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+6) \cdot 1}{(x+2)^2}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{x+2-x-6}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}.$$

Or $(x+2)^2 > 0$, donc

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \text{sur } [1, 2].}$$

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $[1, 2]$.

Comme f est décroissante,

$$f([1, 2]) = [f(2), f(1)].$$

Or

$$f(2) = \frac{8}{4} = 2$$

et

$$f(1) = \frac{7}{3}.$$

Donc

$$f([1, 2]) = \left[2, \frac{7}{3}\right].$$

Comme $\frac{7}{3} > 2$, on obtient bien

$$f([1, 2]) \not\subset [1, 2].$$

La fonction est décroissante : l'image d'un intervalle $[a, b]$ est donc $[f(b), f(a)]$.

2. Encadrement correct de la suite

L'encadrement $1 \leq u_n \leq 2$ est faux, puisque

$$u_1 = \frac{7}{3} > 2.$$

Nous allons montrer l'encadrement correct

$$1 \leq u_n \leq \frac{7}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Initialisation

Au rang 0,

$$u_0 = 1.$$

Donc

$$1 \leq u_0 \leq \frac{7}{3}.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n \leq \frac{7}{3}.$$

Comme f est strictement décroissante sur $\left[1, \frac{7}{3}\right]$, on a

$$f\left(\frac{7}{3}\right) \leq f(u_n) \leq f(1).$$

Calculons les deux bornes :

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{\frac{7}{3} + 6}{\frac{7}{3} + 2} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{13}{3}} = \frac{25}{13} > 1,$$

et

$$f(1) = \frac{7}{3}.$$

Ainsi,

$$1 < \frac{25}{13} \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{3}.$$

Donc

$$1 \leq u_{n+1} \leq \frac{7}{3}.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq \frac{7}{3}.}$$

3. Calcul de $u_{n+1} - u_n$

Par définition,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} - u_n.$$

On met au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 6 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}.$$

Développons le numérateur :

$$u_n + 6 - u_n^2 - 2u_n = -u_n^2 - u_n + 6.$$

Factorisons :

$$u_n^2 + u_n - 6 = (u_n - 2)(u_n + 3).$$

Ainsi,

$$-u_n^2 - u_n + 6 = -(u_n - 2)(u_n + 3).$$

Finalement,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 3)}{u_n + 2}.}$$

Comme $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 3 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est l'opposé du signe de $u_n - 2$:

$$\begin{cases} u_n < 2 & \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \\ u_n > 2 & \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0. \end{cases}$$

La suite se rapproche donc de 2 en passant alternativement de part et d'autre de 2 ; elle n'est pas monotone.

Par exemple,

$$u_0 = 1 < 2, \quad u_1 = \frac{7}{3} > 2.$$

Puis

$$u_2 = f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{25}{13} < 2.$$

4. Convergence de la suite

Pour démontrer la convergence, étudions directement la distance entre u_n et 2.

On a

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2.$$

Mettons au même dénominateur :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2 - u_n}{u_n + 2}.$$

Donc

$$u_{n+1} - 2 = -\frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

En prenant les valeurs absolues,

$$|u_{n+1} - 2| = \frac{|u_n - 2|}{u_n + 2}.$$

Or, d'après l'encadrement précédent,

$$u_n \geq 1,$$

donc

$$u_n + 2 \geq 3.$$

Par conséquent,

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|.$$

En répétant cette inégalité,

$$|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 2|.$$

Comme $u_0 = 1$,

$$|u_0 - 2| = 1,$$

d'où

$$0 \leq |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$|u_n - 2| \longrightarrow 0.$$

Ainsi,

$$u_n \longrightarrow 2.$$

La suite (u_n) est donc convergente.

5. Détermination de la limite

Le résultat précédent donne déjà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

On peut aussi le retrouver par passage à la limite. Si $u_n \rightarrow \ell$, alors également $u_{n+1} \rightarrow \ell$. La fonction f étant continue sur l'intervalle contenant tous les termes,

$$\ell = \frac{\ell + 6}{\ell + 2}.$$

Comme $\ell + 2 > 0$, on multiplie par $\ell + 2$:

$$\ell(\ell + 2) = \ell + 6.$$

Donc

$$\ell^2 + 2\ell = \ell + 6,$$

soit

$$\ell^2 + \ell - 6 = 0.$$

On factorise :

$$(\ell - 2)(\ell + 3) = 0.$$

Ainsi,

$$\ell = 2 \quad \text{ou} \quad \ell = -3.$$

Mais $u_n \geq 1$ pour tout n , donc la limite ne peut pas être -3 . Finalement,

$$\boxed{\ell = 2}.$$

6. Étude de v_n et expression explicite de u_n

On pose

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}.$$

Calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3}.$$

Nous avons déjà trouvé

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2 - u_n}{u_n + 2} = -\frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

Calculons maintenant $u_{n+1} + 3$:

$$u_{n+1} + 3 = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3 = \frac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n + 2}.$$

Donc

$$u_{n+1} + 3 = \frac{4u_n + 12}{u_n + 2} = \frac{4(u_n + 3)}{u_n + 2}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{-\frac{u_n - 2}{u_n + 2}}{\frac{4(u_n + 3)}{u_n + 2}}.$$

On multiplie par l'inverse du dénominateur :

$$v_{n+1} = -\frac{u_n - 2}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{4(u_n + 3)}.$$

Les facteurs $u_n + 2$ se simplifient :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{4} \frac{u_n - 2}{u_n + 3}.$$

Donc

$$v_{n+1} = -\frac{1}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$q = -\frac{1}{4}.$$

Calculons son premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}.$$

Par conséquent,

$$v_n = v_0 \left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

Ainsi,

$$v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

Il reste à retrouver u_n . Partons de

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}.$$

On multiplie par $u_n + 3$:

$$v_n(u_n + 3) = u_n - 2.$$

Donc

$$v_n u_n + 3v_n = u_n - 2.$$

On regroupe les termes contenant u_n :

$$v_n u_n - u_n = -2 - 3v_n.$$

On factorise :

$$u_n(v_n - 1) = -(2 + 3v_n).$$

En multipliant numérateur et dénominateur par -1 ,

$$u_n = \frac{2 + 3v_n}{1 - v_n}.$$

En remplaçant v_n par sa valeur,

$$u_n = \frac{2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}.$$

Cette expression confirme immédiatement que

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \longrightarrow 0,$$

et donc

$$u_n \longrightarrow 2.$$

Bilan final

$$f([1, 2]) = \left[2, \frac{7}{3}\right] \not\subset [1, 2]$$

$$1 \leq u_n \leq \frac{7}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 3)}{u_n + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

$$v_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$u_n = \frac{2 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}.$$

Exercice-bilan 3 - Asymptotique et preuve

Suites numériques - Corrigé complet et détaillé

Énoncé

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right).$$

1. Expliquer pourquoi l'expression présente a priori une forme indéterminée.
2. Rationaliser l'expression et démontrer que

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

3. En déduire la limite de (u_n) .
4. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 2$.
5. Montrer que (u_n) est croissante.
6. Déterminer le premier entier n pour lequel

$$|u_n - 2| < 10^{-3}.$$

1) Identifier la forme obtenue

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part,

$$\frac{4}{n} \rightarrow 0,$$

donc, par continuité de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} \rightarrow \sqrt{1} = 1.$$

Ainsi,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \rightarrow 0.$$

L'expression de u_n est donc le produit d'un facteur qui tend vers $+\infty$ et d'un facteur qui tend vers 0 :

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right) \rightsquigarrow +\infty \times 0.$$

Point à retenir

La forme $+\infty \times 0$ est une **forme indéterminée**. Cela signifie que l'on ne peut pas conclure directement sur la limite. Il faut transformer l'expression.

2) Rationalisation de l'expression

Nous partons de

$$u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right).$$

L'expression contient une différence de deux termes dont l'un est une racine carrée. On multiplie donc par l'expression conjuguée

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} u_n &= n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right) \\ &= n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right) \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Au numérateur, on utilise l'identité

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Avec

$$a = \sqrt{1 + \frac{4}{n}} \quad \text{et} \quad b = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 \right) &= \left(1 + \frac{4}{n} \right) - 1 \\ &= \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_n &= n \frac{\frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Résultat

Pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Cette nouvelle forme ne présente plus la forme indéterminée initiale.

3) Limite de (u_n)

Nous utilisons maintenant la forme rationalisée :

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Comme

$$\frac{4}{n} \rightarrow 0,$$

on a

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} \rightarrow 1.$$

Donc le dénominateur vérifie

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 \rightarrow 2.$$

Le numérateur vaut constamment 4. Ainsi,

$$u_n \rightarrow \frac{4}{2} = 2.$$

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

4) Montrer que $0 < u_n < 2$

Soit $n \geq 1$.

La forme rationalisée donne

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Positivité

Puisque $n \geq 1$, on a

$$\frac{4}{n} > 0,$$

donc

$$1 + \frac{4}{n} > 1 > 0.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} > 0$$

et

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 > 0.$$

Le numérateur 4 étant lui aussi strictement positif, on obtient

$$u_n > 0.$$

Majoration par 2

Comme

$$\frac{4}{n} > 0,$$

on a

$$1 + \frac{4}{n} > 1.$$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} > 1.$$

En ajoutant 1,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 > 2.$$

Comme le dénominateur est strictement supérieur à 2,

$$\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} < \frac{4}{2} = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n < 2}.$$

Résultat

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{0 < u_n < 2}.$$

5) Montrer que (u_n) est croissante

Nous allons encore utiliser

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Soit $n \geq 1$. Comme

$$n + 1 > n > 0,$$

le passage aux inverses donne

$$\frac{1}{n + 1} < \frac{1}{n}.$$

En multipliant par $4 > 0$,

$$\frac{4}{n + 1} < \frac{4}{n}.$$

Puis en ajoutant 1,

$$1 + \frac{4}{n + 1} < 1 + \frac{4}{n}.$$

La fonction racine carrée étant croissante,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n + 1}} < \sqrt{1 + \frac{4}{n}}.$$

En ajoutant 1 aux deux membres,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n + 1}} + 1 < \sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1.$$

Ces deux quantités sont strictement positives. En prenant leurs inverses, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n + 1}} + 1} > \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

En multipliant par $4 > 0$,

$$\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n + 1}} + 1} > \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Or le membre de gauche est u_{n+1} et celui de droite est u_n . Donc

$$\boxed{u_{n+1} > u_n}.$$

Résultat

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est **strictement croissante**.

Idée clé

La croissance devient très simple après rationalisation : lorsque n augmente, $\frac{4}{n}$ diminue, donc le dénominateur de u_n diminue. Comme le numérateur reste égal à 4, le quotient augmente.

6) Premier entier n tel que $|u_n - 2| < 10^{-3}$

Nous savons, grâce à la question 4, que

$$0 < u_n < 2.$$

Donc

$$u_n - 2 < 0$$

et ainsi

$$|u_n - 2| = 2 - u_n.$$

La condition demandée devient donc

$$2 - u_n < 10^{-3}.$$

En utilisant la forme rationalisée,

$$2 - u_n = 2 - \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}.$$

Posons, pour alléger l'écriture,

$$s = \sqrt{1 + \frac{4}{n}}.$$

Alors $s > 1$ et

$$\begin{aligned} 2 - u_n &= 2 - \frac{4}{s + 1} \\ &= \frac{2(s + 1) - 4}{s + 1} \\ &= \frac{2s - 2}{s + 1} \\ &= \frac{2(s - 1)}{s + 1}. \end{aligned}$$

Nous cherchons donc le plus petit n tel que

$$\frac{2(s - 1)}{s + 1} < \frac{1}{1000}.$$

Comme $s + 1 > 0$, on peut multiplier sans changer le sens de l'inégalité :

$$2000(s - 1) < s + 1.$$

Développons :

$$2000s - 2000 < s + 1.$$

Donc

$$1999s < 2001,$$

c'est-à-dire

$$s < \frac{2001}{1999}.$$

En remplaçant s par sa valeur,

$$\sqrt{1 + \frac{4}{n}} < \frac{2001}{1999}.$$

Les deux membres étant positifs, on peut les élever au carré :

$$1 + \frac{4}{n} < \left(\frac{2001}{1999}\right)^2.$$

Donc

$$\frac{4}{n} < \frac{2001^2 - 1999^2}{1999^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} 2001^2 - 1999^2 &= (2001 - 1999)(2001 + 1999) \\ &= 2 \times 4000 \\ &= 8000. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{4}{n} < \frac{8000}{1999^2}.$$

Toutes les quantités étant positives, on obtient

$$4 \times 1999^2 < 8000n.$$

En divisant par 4 puis par 2000,

$$n > \frac{1999^2}{2000}.$$

Calculons :

$$1999^2 = 3\,996\,001,$$

donc

$$\frac{1999^2}{2000} = \frac{3\,996\,001}{2000} = 1998,0005.$$

Il faut donc

$$n > 1998,0005.$$

Le plus petit entier qui vérifie cette inégalité est

$$\boxed{n = 1999}.$$

Vérification du caractère minimal

Pour $n = 1998$, la condition n'est pas satisfaite, tandis que pour $n = 1999$ elle l'est. Le seuil est donc bien atteint pour la première fois au rang 1999.

Résultat

Le premier entier n tel que

$$|u_n - 2| < 10^{-3}$$

est

$$\boxed{1999}.$$

Bilan général

- 1 La forme initiale est $+\infty \times 0$, donc indéterminée.
- 2 $u_n = \frac{4}{\sqrt{1+4/n}+1}$.
- 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.
- 4 Pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 2$.
- 5 (u_n) est strictement croissante.
- 6 Le premier rang tel que $|u_n - 2| < 10^{-3}$ est $n = 1999$.

Idée clé

Pour une expression contenant une différence de racines, l'expression conjuguée est souvent l'outil décisif. Ici, elle permet à la fois de lever la forme indéterminée, de calculer la limite, de prouver l'encadrement, d'étudier la monotonie et même de déterminer exactement un seuil d'approximation.

Défi

Suites numériques - Corrigé complet et détaillé

Énoncé

On définit la suite (a_n) par

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

1. Montrer par récurrence que

$$1 \leq a_n < 2.$$

2. Étudier les variations de (a_n) .

3. Déterminer sa limite.

4. En utilisant l'identité

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x),$$

conjecturer puis démontrer une expression trigonométrique de a_n .

1. Encadrement de a_n par récurrence

Nous voulons démontrer la propriété

$$(P_n) : \quad 1 \leq a_n < 2$$

pour tout entier naturel n .

Initialisation

Au rang $n = 0$, on a

$$a_0 = 1.$$

Ainsi,

$$1 \leq a_0 < 2.$$

La propriété (P_0) est donc vraie.

Hérédité

Supposons que, pour un certain entier naturel n , on ait

$$1 \leq a_n < 2.$$

Nous devons montrer que

$$1 \leq a_{n+1} < 2.$$

À partir de

$$1 \leq a_n < 2,$$

on ajoute 2 aux trois membres :

$$3 \leq 2 + a_n < 4.$$

Les trois membres sont positifs. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$, on peut prendre les racines carrées :

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2 + a_n} < 2.$$

Or

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Donc

$$\sqrt{3} \leq a_{n+1} < 2.$$

Comme $\sqrt{3} > 1$, on obtient en particulier

$$1 \leq a_{n+1} < 2.$$

La propriété (P_{n+1}) est donc vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq a_n < 2.$$

Idée à retenir. Pour une suite définie par une racine carrée, un encadrement stable se démontre souvent en encadrant d'abord l'expression située sous la racine, puis en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. Variations de la suite (a_n)

Pour étudier le sens de variation, on étudie le signe de

$$a_{n+1} - a_n.$$

D'après la relation de récurrence,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n.$$

Cette différence contient une racine. On la rationalise en multipliant par l'expression conjuguée :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(\sqrt{2 + a_n} - a_n)(\sqrt{2 + a_n} + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}.$$

Au numérateur,

$$(\sqrt{2 + a_n})^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2.$$

Donc

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}.$$

Factorisons le numérateur :

$$2 + a_n - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - 2)(a_n + 1).$$

On peut aussi écrire

$$2 + a_n - a_n^2 = (2 - a_n)(a_n + 1).$$

Ainsi,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2 - a_n)(a_n + 1)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}.$$

Étudions maintenant le signe de chaque facteur. D'après la question 1,

$$1 \leq a_n < 2.$$

Donc

$$2 - a_n > 0,$$

et

$$a_n + 1 > 0.$$

De plus,

$$\sqrt{2 + a_n} + a_n > 0.$$

Le numérateur est strictement positif et le dénominateur est strictement positif. Par conséquent,

$$a_{n+1} - a_n > 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} > a_n.$$

$$(a_n) \text{ est strictement croissante.}$$

Le point essentiel est le facteur $2 - a_n$. L'encadrement $a_n < 2$ obtenu à la question 1 donne immédiatement son signe.

3. Convergence et limite de (a_n)

Nous avons montré que :

- (a_n) est strictement croissante ;
- pour tout n , $a_n < 2$, donc la suite est majorée par 2.

Toute suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell.$$

Comme $1 \leq a_n < 2$, on a nécessairement

$$1 \leq \ell \leq 2.$$

Passons à la limite dans la relation

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$,

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Les deux membres sont positifs, donc on peut élever au carré :

$$\ell^2 = 2 + \ell.$$

D'où

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

On factorise :

$$(\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Ainsi,

$$\ell = 2 \quad \text{ou} \quad \ell = -1.$$

Mais $\ell \geq 1$, donc la valeur -1 est impossible. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$$

4. Expression trigonométrique de a_n

On nous donne l'identité

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

Nous allons l'utiliser pour faire apparaître la relation

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Étape 1 : chercher la forme

Le premier terme vaut

$$a_0 = 1.$$

Or

$$1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Cela suggère d'écrire

$$a_0 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Calculons ensuite a_1 :

$$a_1 = \sqrt{2 + a_0} = \sqrt{3}.$$

Or

$$\sqrt{3} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

On remarque que l'angle a été divisé par 2 :

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{6}.$$

On peut donc conjecturer que l'angle est encore divisé par 2 à chaque rang.

La conjecture naturelle est

$$a_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right).$$

Étape 2 : démonstration par récurrence

Posons

$$(Q_n) : \quad a_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right).$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^0}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Or $a_0 = 1$. Donc (Q_0) est vraie.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right).$$

Alors

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)}.$$

Factorisons par 2 :

$$a_{n+1} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) \right)}.$$

Pour appliquer l'identité donnée, posons

$$2x = \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}.$$

Alors

$$x = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$

L'identité

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x)$$

donne

$$1 + \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right).$$

Donc

$$a_{n+1} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right)}.$$

Ainsi,

$$a_{n+1} = \sqrt{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right)}.$$

Donc

$$a_{n+1} = 2 \left| \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right) \right|.$$

Or

$$0 < \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2},$$

donc le cosinus est strictement positif. Ainsi,

$$\left| \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right) \right| = \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right).$$

Finalement,

$$a_{n+1} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}} \right).$$

La propriété (Q_{n+1}) est donc vraie.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right).$$

Vérification de la limite grâce à la formule trigonométrique

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$2^n \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \rightarrow 0.$$

Par continuité du cosinus,

$$\cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right) \rightarrow \cos 0 = 1.$$

Ainsi,

$$a_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right) \rightarrow 2.$$

On retrouve donc bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2.$$

Bilan final

Résultat	Conclusion
Encadrement	$1 \leq a_n < 2$
Variation	(a_n) est strictement croissante
Limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$
Expression explicite	$a_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$

Méthodes à retenir.

1. Pour encadrer une suite définie par récurrence, chercher un intervalle stable et utiliser la récurrence.
2. Pour étudier la monotonie, calculer $a_{n+1} - a_n$ et rationaliser si une racine est présente.
3. Une suite croissante et majorée converge.
4. Pour trouver la limite d'une suite récurrente convergente, passer à la limite dans la relation de récurrence puis sélectionner la solution compatible avec l'encadrement.
5. Les identités trigonométriques permettent parfois de transformer une récurrence avec racines en une formule explicite très élégante.