

Exercice 1 - Corrigé complet et détaillé

Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Énoncé

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

4. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

- Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4 . Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0, 1[$ et

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

- Étudier les variations de la fonction $f(x) = x(2 - x)$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 < u_n < 1.$$

1. Positivité de la suite $u_{n+1} = 5u_n + 4$

Nous voulons démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

La propriété dépend du rang n et la suite est définie par récurrence : le raisonnement par récurrence est donc naturel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$(P_n) : \quad u_n > 0.$$

Initialisation

Au rang $n = 0$, on connaît directement

$$u_0 = 2.$$

Or

$$2 > 0.$$

Donc (P_0) est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (P_n) soit vraie, c'est-à-dire

$$u_n > 0.$$

Nous devons montrer que $u_{n+1} > 0$.

La relation de récurrence donne

$$u_{n+1} = 5u_n + 4.$$

Comme $u_n > 0$ et $5 > 0$, on peut multiplier l'inégalité $u_n > 0$ par 5 sans changer son sens :

$$5u_n > 0.$$

En ajoutant 4 aux deux membres, on obtient

$$5u_n + 4 > 4.$$

Donc

$$u_{n+1} > 4 > 0.$$

Ainsi, (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.}$$

Méthode à retenir

Pour démontrer qu'une suite récurrente reste positive, on vérifie d'abord le premier terme, puis on utilise la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'hypothèse $u_n > 0$ pour montrer $u_{n+1} > 0$.

2. Divisibilité de $4^n + 5$ par 3

Nous voulons démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid (4^n + 5).$$

Autrement dit, pour chaque n , il faut montrer qu'il existe un entier k tel que

$$4^n + 5 = 3k.$$

Posons

$$(P_n) : \quad 4^n + 5 \text{ est un multiple de } 3.$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$4^0 + 5 = 1 + 5 = 6 = 3 \times 2.$$

Donc $4^0 + 5$ est un multiple de 3. La propriété (P_0) est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons (P_n) vraie. Il existe donc un entier k tel que

$$4^n + 5 = 3k.$$

Nous devons montrer que $4^{n+1} + 5$ est également un multiple de 3.

Partons de l'expression à étudier :

$$4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5.$$

Pour faire apparaître $4^n + 5$, on écrit

$$4 \times 4^n + 5 = 4(4^n + 5) - 20 + 5.$$

Donc

$$4^{n+1} + 5 = 4(4^n + 5) - 15.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $4^n + 5 = 3k$. Alors

$$4^{n+1} + 5 = 4(3k) - 15 = 12k - 15.$$

On factorise par 3 :

$$4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5).$$

Or $k \in \mathbb{Z}$, donc $4k - 5 \in \mathbb{Z}$. Ainsi $4^{n+1} + 5$ est bien un multiple de 3.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3 \mid (4^n + 5).$$

3. Expression explicite de la suite $u_{n+1} = 5 - 4u_n$

Nous voulons démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

Posons donc

$$(P_n) : \quad u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

Initialisation

Au rang $n = 0$, la formule proposée donne

$$(-4)^{0+1} + 1 = -4 + 1 = -3.$$

Or l'énoncé donne précisément

$$u_0 = -3.$$

Ainsi

$$u_0 = (-4)^1 + 1,$$

et (P_0) est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

La relation de récurrence donne

$$u_{n+1} = 5 - 4u_n.$$

En remplaçant u_n par l'expression donnée par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 - 4 \left[(-4)^{n+1} + 1 \right] \\ &= 5 - 4(-4)^{n+1} - 4 \\ &= 1 - 4(-4)^{n+1}. \end{aligned}$$

Or

$$-4(-4)^{n+1} = (-4)^{n+2}.$$

Donc

$$u_{n+1} = (-4)^{n+2} + 1.$$

Mais

$$n + 2 = (n + 1) + 1,$$

ainsi

$$u_{n+1} = (-4)^{(n+1)+1} + 1.$$

C'est exactement la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-4)^{n+1} + 1.$$

4. Somme des carrés

On définit, pour $n \geq 1$,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

a. Calcul de S_1, S_2, S_3, S_4 et relation entre S_{n+1} et S_n

Calculons terme par terme :

$$S_1 = 1^2 = 1.$$

Puis

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5.$$

Ensuite

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Enfin

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Donc

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 14, \quad S_4 = 30.$$

Pour exprimer S_{n+1} , écrivons sa définition :

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2.$$

Or

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = S_n.$$

Par conséquent,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$$

b. Démonstration par récurrence de la formule de S_n

Nous voulons démontrer, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Posons

$$(P_n) : S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation au rang 1

Nous avons déjà calculé

$$S_1 = 1.$$

Le membre de droite vaut

$$\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Donc

$$S_1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

La propriété (P_1) est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous devons montrer que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

D'après la question précédente,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On met au même dénominateur :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}.$$

On factorise le numérateur par $n+1$:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}.$$

Développons uniquement l'expression entre crochets :

$$n(2n + 1) + 6(n + 1) = 2n^2 + n + 6n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Or

$$2n^2 + 7n + 6 = (n + 2)(2n + 3),$$

car

$$(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

Ainsi

$$S_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

C'est exactement la formule attendue au rang $n + 1$.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

5. Suite définie par $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$

La suite vérifie

$$u_0 \in]0, 1[\quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$

On introduit la fonction

$$f(x) = x(2 - x) = 2x - x^2.$$

Alors

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x).$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

- si $x < 1$, alors $1 - x > 0$, donc $f'(x) > 0$;
- si $x = 1$, alors $f'(1) = 0$;
- si $x > 1$, alors $1 - x < 0$, donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $] - \infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

De plus,

$$f(1) = 1(2 - 1) = 1.$$

Donc f atteint son maximum en $x = 1$, égal à 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

En particulier, sur l'intervalle $[0, 1]$, f est croissante et

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

b. Démontrer que $0 < u_n < 1$ pour tout n

Nous allons démontrer par récurrence la propriété

$$(P_n) : \quad 0 < u_n < 1.$$

Initialisation

L'énoncé donne directement

$$u_0 \in]0, 1[.$$

Donc

$$0 < u_0 < 1.$$

La propriété (P_0) est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$0 < u_n < 1.$$

Nous devons montrer

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

Comme $0 < u_n < 1$ et que f est strictement croissante sur $[0, 1]$, on peut appliquer f aux trois membres :

$$f(0) < f(u_n) < f(1).$$

Or

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1,$$

et

$$f(u_n) = u_{n+1}.$$

Donc

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.}$$

Méthode à retenir

Lorsqu'une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et que l'on veut montrer que tous ses termes restent dans un intervalle I , une stratégie très efficace consiste à montrer que $f(I) \subset I$. Ici, $I =]0, 1[$ et, comme f est croissante sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on obtient directement $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$.

Bilan général

1. Si $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5u_n + 4$, alors $\boxed{u_n > 0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{4^n + 5}$ est divisible par 3.

3. Si $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 5 - 4u_n$, alors $\boxed{u_n = (-4)^{n+1} + 1}$.

4. Pour $S_n = 1^2 + \dots + n^2$,

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

5. Pour $f(x) = x(2-x)$, f croît sur $] -\infty, 1]$ et décroît sur $[1, +\infty[$. Si $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors $\boxed{0 < u_n < 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 - Corrigé complet et détaillé

Énoncé

1. Montrer l'inégalité de Bernoulli : soit un réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

2. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 < u_n < 2,$$

et que (u_n) est croissante.

3. Montrer par un raisonnement par récurrence que l'on a, pour tout entier n ,

$$3^n > n.$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des entiers de 1 à n est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier n non nul :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n (2k-1).$$

Démontrer par un raisonnement par récurrence que

$$u_n = n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Inégalité de Bernoulli

Nous voulons démontrer que, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Fixons donc un réel $a > 0$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété

$$(P_n) : \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Étape 1 : initialisation

Le premier entier naturel est $n = 0$. Calculons les deux membres :

$$(1 + a)^0 = 1$$

et

$$1 + 0 \times a = 1.$$

Ainsi,

$$(1 + a)^0 = 1 \geq 1.$$

La propriété (P_0) est donc vraie.

Étape 2 : hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (P_n) soit vraie, c'est-à-dire

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Comme $a > 0$, nous avons $1 + a > 0$. Nous pouvons donc multiplier les deux membres de l'inégalité par $1 + a$ sans changer son sens :

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a).$$

Développons le membre de droite :

$$(1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2.$$

Regroupons :

$$(1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2.$$

Or

$$n \geq 0 \quad \text{et} \quad a^2 > 0,$$

donc

$$na^2 \geq 0.$$

Par conséquent,

$$1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.$$

Nous obtenons alors

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Étape 3 : conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

À retenir. Dans une récurrence sur une inégalité, il faut toujours vérifier le signe du nombre par lequel on multiplie. Ici, $1 + a > 0$, donc le sens de l'inégalité est conservé.

2. Suite $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

La suite est définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Nous devons d'abord montrer que

$$0 < u_n < 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier la monotonie.

2.a. Encadrement $0 < u_n < 2$ par récurrence

Considérons la propriété

$$(P_n) : \quad 0 < u_n < 2.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1.$$

Donc

$$0 < 1 < 2,$$

ainsi (P_0) est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 2.$$

Ajoutons 2 aux trois membres :

$$2 < 2 + u_n < 4.$$

Les trois quantités sont positives. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$\sqrt{2} < \sqrt{2 + u_n} < 2.$$

Or

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Ainsi

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < 2.$$

En particulier, puisque $\sqrt{2} > 0$,

$$0 < u_{n+1} < 2.$$

Donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 2.$$

2.b. Monotonie de (u_n)

Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n.$$

Pour étudier son signe, multiplions et divisons par l'expression conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2 + u_n} - u_n)(\sqrt{2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}.$$

Au numérateur, nous utilisons $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}.$$

Factorisons le numérateur :

$$2 + u_n - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 2).$$

Or

$$u_n^2 - u_n - 2 = (u_n - 2)(u_n + 1).$$

Donc

$$2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(u_n + 1).$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}.$$

D'après l'encadrement $0 < u_n < 2$:

$$2 - u_n > 0,$$

$$u_n + 1 > 0,$$

et

$$\sqrt{2 + u_n} + u_n > 0.$$

Le quotient est donc strictement positif :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Par conséquent,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n, \quad \text{donc } (u_n) \text{ est strictement croissante.}$

3. Démontrer que $3^n > n$

L'énoncé parle de tout entier n . Nous distinguons donc les entiers négatifs et les entiers naturels.

Cas des entiers négatifs

Si $n < 0$, alors

$$3^n > 0$$

tandis que

$$n < 0.$$

Donc immédiatement

$$3^n > 0 > n,$$

d'où

$$3^n > n.$$

Cas des entiers naturels

Pour $n = 0$,

$$3^0 = 1 > 0.$$

Pour la récurrence, nous partons du rang 1. Considérons

$$(P_n) : \quad 3^n > n \quad (n \geq 1).$$

Initialisation au rang 1.

$$3^1 = 3 > 1.$$

Donc (P_1) est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons

$$3^n > n.$$

En multipliant par $3 > 0$,

$$3^{n+1} > 3n.$$

Nous voulons comparer $3n$ et $n + 1$. Calculons :

$$3n - (n + 1) = 2n - 1.$$

Comme $n \geq 1$,

$$2n - 1 \geq 1 > 0.$$

Donc

$$3n > n + 1.$$

Ainsi,

$$3^{n+1} > 3n > n + 1.$$

Donc (P_{n+1}) est vraie.

Par récurrence, $3^n > n$ pour tout $n \geq 1$, et nous avons déjà vérifié $n = 0$ ainsi que tous les entiers négatifs.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 3^n > n.}$$

4. Somme des entiers de 1 à n

Nous voulons démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Posons

$$(P_n) : \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation

Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut

$$1.$$

Le membre de droite vaut

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Les deux membres sont égaux. Donc (P_1) est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous voulons montrer

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Partons du membre de gauche :

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1).$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Mettons au même dénominateur :

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}.$$

Factorisons par $n+1$:

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

C'est exactement la formule attendue au rang $n+1$.

Conclusion

Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Réflexe utile. Pour une somme, au rang $n+1$, on écrit toujours : « somme jusqu'à n » + « nouveau terme ». Cela permet d'utiliser directement l'hypothèse de récurrence.

5. Somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Nous devons démontrer, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Posons

$$(P_n) : \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Initialisation

Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}.$$

Et

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc (P_1) est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Au rang $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Mettons au même dénominateur $(n+1)(n+2)$:

$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc

$$= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

Développons le numérateur :

$$n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Comme $n+1 \neq 0$, nous simplifions :

$$= \frac{n+1}{n+2}.$$

C'est exactement la formule au rang $n+1$.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Vérification complémentaire

On peut également remarquer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi la somme s'écrit

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent et il reste

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Cette vérification confirme le résultat démontré par récurrence.

6. Somme des n premiers nombres impairs

La suite est définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

Nous voulons démontrer

$$u_n = n^2.$$

Autrement dit, il faut établir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Posons

$$(P_n) : \quad u_n = n^2.$$

Initialisation

Pour $n = 1$,

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

Et

$$1^2 = 1.$$

Donc

$$u_1 = 1^2.$$

La propriété (P_1) est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons que

$$u_n = n^2.$$

Au rang suivant,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1).$$

Séparons le dernier terme :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n+1) - 1).$$

Donc

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1.$$

Or

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = (n+1)^2.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Interprétation. Les premiers nombres impairs sont $1, 3, 5, 7, \dots$. Leur somme construit successivement les carrés :

$$1 = 1^2, \quad 1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 3^2, \quad \dots$$

La récurrence montre que cette observation est vraie pour tout rang.

Bilan général de l'exercice

Question	Résultat principal
1. Inégalité de Bernoulli	$(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$
2. Suite $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$	$0 < u_n < 2$ et (u_n) est strictement croissante
3. Puissance 3^n	$3^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
4. Somme des entiers	$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
5. Somme rationnelle	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
6. Somme des nombres impairs	$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

Schéma d'une démonstration par récurrence.

- 1) Énoncer clairement la propriété (P_n) .
- 2) Vérifier le premier rang : c'est l'initialisation.
- 3) Supposer (P_n) vraie : c'est l'hypothèse de récurrence.
- 4) À partir de cette hypothèse, démontrer (P_{n+1}) : c'est l'hérédité.
- 5) Conclure grâce au principe de récurrence.

Exercice 3 - Suites numériques

Corrigé complet et détaillé

Énoncé

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}.$$

1) a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

1) a) Démonstration par récurrence de l'encadrement

Nous voulons montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

Pour organiser clairement la démonstration, posons la propriété

$$(P_n) : \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

Nous allons vérifier successivement :

Étape 1 : l'initialisation ;

Étape 2 : l'hérédité ;

Étape 3 : la conclusion.

Étape 1 : initialisation

La suite commence au rang 0 et l'énoncé donne

$$u_0 = 2.$$

Il faut vérifier que u_0 appartient bien à l'intervalle $[1, 2]$.

Or

$$1 \leq 2 \leq 2.$$

Donc

$$1 \leq u_0 \leq 2.$$

Ainsi, la propriété (P_0) est vraie.

Initialisation vérifiée :

$$1 \leq u_0 \leq 2.$$

Étape 2 : hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons que

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

C'est notre **hypothèse de récurrence**.

Nous devons montrer que la même propriété est vraie au rang $n+1$, autrement dit que

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}.$$

Partons de l'hypothèse

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

En ajoutant 1 aux trois membres, on obtient

$$2 \leq 1 + u_n \leq 3.$$

Les trois nombres sont strictement positifs. On peut donc prendre leurs inverses. Lorsque l'on prend les inverses de nombres positifs, le sens des inégalités s'inverse :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Ajoutons maintenant 1 aux trois membres :

$$1 + \frac{1}{3} \leq 1 + \frac{1}{1 + u_n} \leq 1 + \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\frac{4}{3} \leq 1 + \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{3}{2}.$$

Or, par définition,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}.$$

Ainsi,

$$\frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Cet encadrement est même plus précis que celui demandé. En effet,

$$1 \leq \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \leq 2.$$

Par conséquent,

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Nous avons donc montré que

$$(P_n) \implies (P_{n+1}).$$

La propriété est héréditaire.

Hérédité vérifiée : si

$$1 \leq u_n \leq 2,$$

alors

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Étape 3 : conclusion

Nous avons montré que :

- la propriété est vraie au rang 0 ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si elle est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

Remarque utile

Au cours de l'hérédité, nous avons obtenu l'encadrement plus précis

$$\frac{4}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Ainsi, dès le rang 1, les termes de la suite sont en fait enfermés dans un intervalle beaucoup plus petit que $[1, 2]$.

Par exemple,

$$u_1 = 1 + \frac{1}{1+2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

puis

$$u_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}.$$

On vérifie bien que

$$1 \leq \frac{4}{3} \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \frac{10}{7} \leq 2.$$

Méthode à retenir pour ce type de récurrence

Pour démontrer qu'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans un intervalle :

1. vérifier que le premier terme appartient à l'intervalle ;
2. supposer que u_n appartient à cet intervalle ;
3. utiliser cette hypothèse dans l'expression de u_{n+1} ;
4. encadrer soigneusement u_{n+1} ;
5. conclure par récurrence.

Ici, l'étape essentielle est le passage

$$2 \leq 1 + u_n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{1}{2},$$

car tous les termes sont positifs et le passage aux inverses renverse le sens des inégalités.

Exercice 4 - Raisonnement par récurrence

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = n^2 + n.$$

1. Comprendre ce qu'il faut démontrer

Pour chaque entier naturel n , considérons la propriété :

$$(P_n) : u_n = n^2 + n.$$

Notre objectif est de prouver que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérification sur les premiers termes

Cette vérification permet de voir que la formule annoncée est cohérente avec la relation de récurrence.

Rang	Calcul	Valeur	n^2+n
0	$u_0 = 0$	0	0
1	$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2$	2	$1^2 + 1 = 2$
2	$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2$	6	$2^2 + 2 = 6$
3	$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 2$	12	$3^2 + 3 = 12$

On obtient bien 0, 2, 6, 12, ... ; cela correspond à n^2+n . La démonstration générale se fait maintenant par récurrence.

3. Démonstration par récurrence

Étape 1 - Initialisation

La propriété doit être vraie à partir de $n = 0$. Le premier rang à vérifier est donc 0.

D'après la définition de la suite, $u_0 = 0$.

La formule proposée donne aussi : $0^2 + 0 = 0$.

$$u_0 = 0 = 0^2 + 0.$$

Donc (P_0) est vraie : l'initialisation est vérifiée.

Étape 2 - Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n . On dispose donc de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = n^2 + n.$$

Nous devons montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1).$$

Partons de la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = (n^2 + n) + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2.$$

Comparons maintenant avec l'expression attendue :

$$(n+1)^2 + (n+1)$$

On développe uniquement ce qu'il faut :

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2.$$

Nous obtenons donc exactement la même expression :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1).$$

Ainsi, si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie. La propriété est héréditaire.

Étape 3 - Conclusion

Nous avons montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = n^2 + n$$

4. Une autre lecture de la formule

La relation donne $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 = 2(n+1)$. On ajoute donc successivement 2, 4, 6, 8, ...
 . Ainsi, pour $n \geq 1$:

$$u_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1+2+\dots+n) = 2 \times n(n+1)/2 = n(n+1) = n^2 + n.$$

Cette observation explique la formule, mais la preuve demandée par l'énoncé reste la récurrence ci-dessus.

5. Méthode à retenir

1	Écrire clairement la propriété P_n .
2	Vérifier le premier rang.
3	Supposer P_n vraie : hypothèse de récurrence.
4	Calculer u_{n+1} en utilisant la relation et l'hypothèse.
5	Retrouver exactement la formule au rang $n+1$.
6	Conclure par le principe de récurrence.

Exercice 5 - Somme des cubes

Énoncé

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

1. Mise en place du raisonnement

Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère la propriété suivante :

$$(P_n) : S_n = n^2(n+1)^2/4.$$

Notre objectif est de montrer que cette propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$. La méthode demandée est le raisonnement par récurrence, qui comprend trois étapes : initialisation, hérédité, conclusion.

2. Vérification sur quelques premiers rangs

Ces vérifications ne remplacent pas la démonstration, mais elles permettent de contrôler la formule et de comprendre ce qu'elle affirme.

n	S_n	Calcul direct	Formule
1	S_1	$1^3 = 1$	$1^2 \times 2^2 / 4 = 1$
2	S_2	$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$	$2^2 \times 3^2 / 4 = 9$
3	S_3	$1 + 8 + 27 = 36$	$3^2 \times 4^2 / 4 = 36$

La formule est donc cohérente pour les premiers rangs. Nous passons maintenant à la démonstration générale.

3. Démonstration par récurrence

Étape 1 - Initialisation

La propriété doit être démontrée pour tout entier $n \geq 1$. Le premier rang à tester est donc $n = 1$.

Calcul du membre de gauche :

$$S_1 = 1^3 = 1.$$

Calcul du membre de droite :

$$1^2(1+1)^2/4 = 1 \times 4/4 = 1.$$

Les deux membres sont égaux. Ainsi :

$$S_1 = 1^2(1+1)^2/4.$$

La propriété (P_1) est donc vraie. L'initialisation est vérifiée.

Étape 2 - Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n . C'est l'hypothèse de récurrence :

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4.$$

Nous devons montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que :

$$S_{n+1} = (n+1)^2(n+2)^2/4.$$

Écrivons S_{n+1} à partir de S_n

Par définition de la somme, au rang suivant on ajoute simplement le nouveau terme $(n+1)^3$:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3.$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence pour remplacer S_n :

$$S_{n+1} = n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3.$$

Le but est de transformer cette expression jusqu'à faire apparaître exactement $(n+1)^2(n+2)^2/4$.

4. Transformation détaillée de S_{n+1}

Étape A - Mettre les deux termes au même dénominateur

On écrit le second terme avec le dénominateur 4 :

$$(n+1)^3 = 4(n+1)^3/4.$$

Donc :

$$S_{n+1} = [n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3]/4.$$

Étape B - Factoriser le facteur commun $(n+1)^2$

Dans les deux termes du numérateur, le facteur $(n+1)^2$ est commun :

$$n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3 = (n+1)^2[n^2 + 4(n+1)].$$

Ainsi :

$$S_{n+1} = (n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]/4.$$

Étape C - Simplifier l'expression entre crochets

Développons seulement l'expression nécessaire :

$$n^2 + 4(n+1) = n^2 + 4n + 4.$$

Or :

$$n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

Donc :

$$S_{n+1} = (n+1)^2(n+2)^2/4.$$

C'est exactement la formule attendue au rang $n+1$. Nous avons donc montré que si (P_n) est vraie, alors (P_{n+1}) est vraie. La propriété est héréditaire.

Étape 3 - Conclusion

Nous avons établi que :

1. (P_1) est vraie : l'initialisation est vérifiée.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$: l'hérédité est vérifiée.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$$

5. Une identité remarquable à reconnaître

Comme $n^2(n+1)^2/4 = [n(n+1)/2]^2$, la formule peut aussi s'écrire :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Autrement dit, la somme des cubes des n premiers entiers est égale au carré de la somme des n premiers entiers. Cette forme est utile à mémoriser car elle permet de reconnaître très rapidement la formule.

6. Méthode à retenir

1	Définir précisément la propriété P_n .
2	Vérifier la propriété au premier rang $n = 1$.
3	Supposer la formule vraie au rang n .
4	Écrire $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.
5	Remplacer S_n grâce à l'hypothèse de récurrence.
6	Factoriser intelligemment pour retrouver la formule au rang $n+1$.
7	Conclure par le principe de récurrence.

Point essentiel : dans l'hérédité, la bonne idée est de faire apparaître S_n dans S_{n+1} , puis d'utiliser immédiatement l'hypothèse de récurrence. C'est le mécanisme central de ce type de démonstration.

Exercice 6 - Suites arithmétiques et récurrence

Énoncé

La suite (u_n) est définie par $u_0=1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2$.

1. Quelle est la nature de (u_n) ? Prouver que $u_n=1+2n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite (v_n) est définie par $v_0=1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}=v_n+u_n$.

(a) Calculer v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n=1+n^2$.

(c) Étudier la monotonie de (v_n) .

1. Étude de la suite (u_n)

On a $u_{n+1}-u_n=2$. La différence entre deux termes consécutifs est constante : (u_n) est donc arithmétique de raison 2, avec $u_0=1$.

Pour une suite arithmétique indexée à partir de 0 : $u_n=u_0+nr$. Donc :

$$u_n=1+2n.$$

On peut aussi le démontrer directement par récurrence.

Initialisation. Au rang 0 : $u_0=1$ et $1+2 \times 0=1$. La propriété est vraie.

Hérédité. Supposons $u_n=1+2n$. Alors :

$$u_{n+1}=u_n+2=1+2n+2=1+2(n+1).$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n=1+2n.$$

2. Étude de la suite (v_n)

(a) Calcul de v_1 , v_2 , v_3 et v_4

Comme $u_n=1+2n$, on a : $u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=7$.

$$v_1=v_0+u_0=1+1=2.$$

$$v_2=v_1+u_1=2+3=5.$$

$$v_3=v_2+u_2=5+5=10.$$

$$v_4=v_3+u_3=10+7=17.$$

Terme	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
Valeur	1	2	5	10	17

Ces valeurs correspondent bien à $1+n^2$: 1, 2, 5, 10, 17.

(b) Démonstration par récurrence de $v_n = 1+n^2$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(Q_n) : v_n = 1+n^2.$$

Étape 1 - Initialisation

Au rang 0, $v_0 = 1$ et $1+0^2=1$. Donc (Q_0) est vraie.

Étape 2 - Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = 1+n^2$. Nous devons montrer $v_{n+1} = 1+(n+1)^2$.

D'après la définition :

$$v_{n+1} = v_n + u_n.$$

On utilise l'hypothèse de récurrence et le résultat de la question 1 :

$$v_{n+1} = (1+n^2) + (1+2n) = n^2 + 2n + 2.$$

Or :

$$1+(n+1)^2 = 1+n^2+2n+1 = n^2+2n+2.$$

Donc :

$$v_{n+1} = 1+(n+1)^2.$$

La propriété est héréditaire.

Étape 3 - Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. Par le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1+n^2.$$

(c) Monotonie de (v_n)

À partir de la relation $v_{n+1} = v_n + u_n$:

$$v_{n+1} - v_n = u_n.$$

Or $u_n = 1+2n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+2n > 0$. Donc :

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

La suite (v_n) est strictement croissante.

Vérification avec la formule explicite :

$$v_{n+1} - v_n = [1+(n+1)^2] - [1+n^2] = 2n+1 > 0.$$

Bilan général

Question	Résultat
1	(u_n) est arithmétique de raison 2.
1	$u_n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2(a)	$v_1 = 2, v_2 = 5, v_3 = 10, v_4 = 17$.
2(b)	$v_n = 1 + n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2(c)	(v_n) est strictement croissante.

Méthodes et approfondissement

Méthodes à retenir

1	Si $u_{n+1}-u_n$ est constant, la suite est arithmétique.
2	Pour une suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr$.
3	Une récurrence comporte : initialisation, hérédité, conclusion.
4	Si $v_{n+1}-v_n = u_n$, le signe de u_n donne directement la monotonie de (v_n) .
5	Réutiliser les résultats précédents simplifie fortement les calculs.

Comprendre le lien entre les deux suites

La suite (v_n) accumule les termes de (u_n) : à chaque passage de v_n à v_{n+1} , on ajoute exactement u_n .

En développant les premiers rangs :

$$\begin{aligned}v_1 &= v_0 + u_0 \\v_2 &= v_0 + u_0 + u_1 \\v_3 &= v_0 + u_0 + u_1 + u_2\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $n \geq 1$:

$$v_n = v_0 + u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Comme $u_k = 1 + 2k$, on obtient :

$$v_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2k).$$

Or la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 . On retrouve donc naturellement :

$$\mathbf{v_n = 1 + n^2.}$$

Cette lecture n'est pas nécessaire pour la démonstration demandée, mais elle explique pourquoi la formule obtenue dans la question 2(b) est particulièrement naturelle.

Erreurs fréquentes à éviter

- Dans la récurrence sur v_n , ne pas oublier d'utiliser aussi le résultat $u_n = 1 + 2n$.
- Pour la monotonie, il faut étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$, et non simplement constater que les premiers termes augmentent.
- Une vérification numérique sur quelques rangs aide à contrôler le résultat, mais ne remplace jamais une démonstration.

Exercice 7 - Limites de suites

Enonce

Determiner dans chacun des cas suivants la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$:

- a) $u_n = n^3 + 1/n$
- b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$
- c) $u_n = (3 - 4/n)/(2/n^2)$
- d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$
- e) $u_n = (2n^2+1)/(-n^2+6)$
- f) $u_n = (n^2+3n-5)/(n^3-6n^2+1)$
- g) $u_n = n\sqrt{n} - n$
- h) $u_n = (-2n+3)(n+3)/(-n^2+n+6)$
- i) $u_n = n/(n+\sqrt{n})$
- j) $u_n = (9-n^2)/[(n+1)(2n+1)]$
- k) $u_n = 1/3 - n/(2n+1)^2$
- l) $u_n = 2/(3n) - (2n^2+3)/(3n^2+n+1)$

Methode generale

Pour chaque limite, on cherche d'abord le terme dominant. Dans une somme ou un polynome, le terme de plus haut degre commande le comportement. Dans un quotient de polynomes, on divise numerator et denominator par la plus grande puissance de n utile. On utilisera aussi les limites usuelles $1/n \rightarrow 0$, $1/n^2 \rightarrow 0$ et $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$.

a) $u_n = n^3 + 1/n$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $n^3 \rightarrow +\infty$ et $1/n \rightarrow 0$.

La somme d'une quantite qui tend vers $+\infty$ et d'une quantite qui tend vers 0 tend donc vers $+\infty$.

On peut aussi factoriser par n^3 :

$$u_n = n^3(1 + 1/n^4).$$

Or $1/n^4 \rightarrow 0$, donc la parenthese tend vers 1, tandis que $n^3 \rightarrow +\infty$.

$$\lim u_n = +\infty.$$

b) $u_n = (3n+1)(-7n+5)$

On peut developper afin de faire apparaitre le terme dominant :

$$(3n+1)(-7n+5) = -21n^2 + 15n - 7n + 5 = -21n^2 + 8n + 5.$$

Le terme dominant est $-21n^2$.

Comme $n^2 \rightarrow +\infty$, on a $-21n^2 \rightarrow -\infty$.

Les termes de degre inferieur ne changent pas ce comportement.

$$\lim u_n = -\infty.$$

c) $u_n = (3 - 4/n)/(2/n^2)$

Le denominateur $2/n^2$ tend vers 0 positif, tandis que le numerator $3-4/n$ tend vers 3.

Pour eviter une conclusion trop rapide, simplifions exactement l'expression.

Diviser par $2/n^2$ revient a multiplier par $n^2/2$:

$$u_n = (3 - 4/n) \times n^2/2.$$

Donc :

$$u_n = (3n^2 - 4n)/2 = (3/2)n^2 - 2n.$$

Le terme dominant est $(3/2)n^2$, positif.

$$\lim u_n = +\infty.$$

d) $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

Le terme de plus haut degre est n^3 .

Pour le mettre en evidence, on factorise par n^3 :

$$u_n = n^3(1 - 1/n + 3/n^2 - 1/n^3).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, la parenthese tend vers 1.

Comme $n^3 \rightarrow +\infty$, le produit tend vers $+\infty$.

$$\lim u_n = +\infty.$$

e) $u_n = (2n^2+1)/(-n^2+6)$

Le numerator et le denominator sont tous deux de degre 2.

On divise les deux par n^2 :

$$u_n = (2 + 1/n^2)/(-1 + 6/n^2).$$

Or $1/n^2 \rightarrow 0$. Ainsi le numerator tend vers 2 et le denominator tend vers -1.

$$\lim u_n = 2/(-1) = -2.$$

f) $u_n = (n^2+3n-5)/(n^3-6n^2+1)$

Le degre du numerator est 2 et celui du denominator est 3.

On divise numerator et denominator par n^3 :

$$u_n = (1/n + 3/n^2 - 5/n^3) / (1 - 6/n + 1/n^3).$$

Le numerator tend vers 0.

Le denominator tend vers 1.

$$\lim u_n = 0.$$

g) $u_n = n\sqrt{n} - n$

On factorise par n :

$$u_n = n(\sqrt{n} - 1).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $n \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{n} - 1 \rightarrow +\infty$.

Les deux facteurs sont positifs a partir d'un certain rang et tendent vers $+\infty$.

On peut aussi ecrire $n\sqrt{n} = n^{3/2}$, qui domine le terme n .

$$\lim u_n = +\infty.$$

h) $u_n = (-2n+3)(n+3)/(-n^2+n+6)$

Commencons par developper le numerator :

$$(-2n+3)(n+3) = -2n^2 - 6n + 3n + 9 = -2n^2 - 3n + 9.$$

Ainsi :

$$u_n = (-2n^2-3n+9)/(-n^2+n+6).$$

On divise numerator et denominator par n^2 :

$$u_n = (-2 - 3/n + 9/n^2)/(-1 + 1/n + 6/n^2).$$

Le numerator tend vers -2 et le denominator vers -1.

$$\lim u_n = (-2)/(-1) = 2.$$

i) $u_n = n/(n+\sqrt{n})$

Le numerator et le denominator contiennent n .

On divise numerator et denominator par n :

$$u_n = 1/(1 + \sqrt{n}/n).$$

Or $\sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n}$. Donc :

$$u_n = 1/(1 + 1/\sqrt{n}).$$

Comme $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$, le denominator tend vers 1.

$$\lim u_n = 1.$$

j) $u_n = (9-n^2)/[(n+1)(2n+1)]$

Developpons le denominator :

$$(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Ainsi :

$$u_n = (9-n^2)/(2n^2+3n+1).$$

On divise numerator et denominator par n^2 :

$$u_n = (9/n^2 - 1)/(2 + 3/n + 1/n^2).$$

Le numerator tend vers -1 et le denominator vers 2.

$$\lim u_n = -1/2.$$

k) $u_n = 1/3 - n/(2n+1)^2$

Etudions d'abord le second terme :

$$n/(2n+1)^2.$$

Developpons le denominator :

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Puis divisons numerator et denominator par n^2 :

$$n/(2n+1)^2 = (1/n)/(4 + 4/n + 1/n^2).$$

Le numerator tend vers 0 et le denominator vers 4. Le quotient tend donc vers 0.

Ainsi u_n tend vers $1/3 - 0$.

$$\lim u_n = 1/3.$$

l) $u_n = 2/(3n) - (2n^2+3)/(3n^2+n+1)$

On etudie separement les deux termes.

Premier terme :

$$2/(3n) \rightarrow 0.$$

Pour le second quotient, numerator et denominator sont de degre 2. On divise par n^2 :

$$(2n^2+3)/(3n^2+n+1) = (2 + 3/n^2)/(3 + 1/n + 1/n^2).$$

Ce quotient tend vers $2/3$.

Comme il est soustrait dans l'expression de u_n :

$$\lim u_n = 0 - 2/3 = -2/3.$$

Bilan des 12 limites

Cas	Suite	Limite
a	$n^3 + 1/n$	$+\infty$
b	$(3n+1)(-7n+5)$	$-\infty$
c	$(3-4/n)/(2/n^2)$	$+\infty$
d	$n^3 - n^2 + 3n - 1$	$+\infty$
e	$(2n^2+1)/(-n^2+6)$	-2
f	$(n^2+3n-5)/(n^3-6n^2+1)$	0
g	$n\sqrt{n} - n$	$+\infty$
h	$(-2n+3)(n+3)/(-n^2+n+6)$	2
i	$n/(n+\sqrt{n})$	1
j	$(9-n^2)/[(n+1)(2n+1)]$	-1/2
k	$1/3 - n/(2n+1)^2$	1/3
l	$2/(3n) - (2n^2+3)/(3n^2+n+1)$	-2/3

Reflexes a retenir

1	Dans un polynome, reperer le terme de plus haut degre.
2	Dans un quotient de polynomes de meme degre, la limite est le quotient des coefficients dominants.
3	Si le degre du numerator est plus petit que celui du denominateur, le quotient tend souvent vers 0.
4	Diviser numerator et denominateur par la plus grande puissance de n utile.
5	Pour des expressions avec $\sqrt{n}$, utiliser $\sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n}$.
6	Toujours verifier le signe quand une limite infinie intervient.

Exercice 8 – Vrai ou faux : convergence et bornes

Énoncé

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant sa réponse :

- a) Une suite convergente est bornée.
- b) Une suite bornée est convergente.
- c) Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.
- d) Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors u_n et v_n ont la même limite.
- e) Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
- f) Si pour tout $n \geq 10 : |u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}$ alors (u_n) converge vers 3.

Correction détaillée

a) Une suite convergente est bornée

VRAI

Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ . Nous allons montrer que tous les termes de la suite restent entre deux nombres réels fixes.

Puisque $u_n \rightarrow \ell$, les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ . Prenons par exemple une distance égale à 1. Il existe alors un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < 1.$$

Or

$$|u_n - \ell| < 1 \iff -1 < u_n - \ell < 1 \iff \ell - 1 < u_n < \ell + 1.$$

Ainsi, tous les termes de rang $n \geq N$ appartiennent à l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$.

Il reste seulement les termes

$$u_0, u_1, \dots, u_{N-1}.$$

Ils sont en nombre fini. On peut donc choisir un réel M assez grand pour que chacun d'eux vérifie $|u_k| \leq M$, et choisir M également assez grand pour contenir l'intervalle précédent. On obtient alors, pour tout n ,

$$|u_n| \leq M.$$

Donc (u_n) est bornée.

b) Une suite bornée est convergente

FAUX

Pour réfuter une affirmation valable prétendument pour toutes les suites, il suffit de donner un contre-exemple.

Considérons

$$u_n = (-1)^n.$$

Si n est pair, $u_n = 1$; si n est impair, $u_n = -1$. Ainsi,

$$-1 \leq u_n \leq 1 \quad \text{pour tout } n.$$

La suite est donc bornée. Pourtant,

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \dots$$

Les termes alternent indéfiniment entre 1 et -1 . Ils ne se rapprochent pas d'un même nombre réel. La suite ne converge donc pas.

Ainsi, une suite peut être bornée sans être convergente.

c) Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée

VRAI

Dire que $u_n \rightarrow +\infty$ signifie que les termes finissent par dépasser tout réel fixé.

Supposons, au contraire, que (u_n) soit majorée. Il existerait alors un réel M tel que

$$u_n \leq M \quad \text{pour tout } n.$$

Mais $u_n \rightarrow +\infty$. En choisissant le nombre $A = M + 1$, la définition de la limite $+\infty$ donne l'existence d'un rang N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n > M + 1.$$

Pour $n \geq N$, on aurait donc simultanément

$$u_n \leq M \quad \text{et} \quad u_n > M + 1,$$

ce qui est impossible. Notre supposition est donc fausse : (u_n) ne peut pas être majorée.

d) Si $u_n - v_n \rightarrow 0$, alors u_n et v_n ont la même limite

FAUX, telle que l'affirmation est écrite

La condition $u_n - v_n \rightarrow 0$ signifie que les deux suites deviennent très proches, mais elle ne garantit pas qu'elles convergent.

Prenons

$$u_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad v_n = (-1)^n.$$

Alors, pour tout n ,

$$u_n - v_n = (-1)^n - (-1)^n = 0.$$

Donc

$$u_n - v_n \longrightarrow 0.$$

Pourtant, comme dans la question b), (u_n) et (v_n) alternent entre 1 et -1 et ne convergent pas. Elles n'ont donc pas de limite réelle.

Remarque importante. Si l'on sait en plus que l'une des deux suites converge, alors la conclusion devient vraie. Par exemple, si $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n - v_n \rightarrow 0$, alors

$$v_n = u_n - (u_n - v_n).$$

Par les règles de calcul sur les limites,

$$v_n \longrightarrow \ell - 0 = \ell.$$

Dans ce cas, les deux suites ont bien la même limite.

e) Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, alors $u_n - v_n \rightarrow 0$

FAUX

Le fait que deux suites tendent toutes les deux vers $+\infty$ ne permet pas de connaître directement la limite de leur différence.

Prenons par exemple

$$u_n = 2n \quad \text{et} \quad v_n = n.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$2n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Cependant,

$$u_n - v_n = 2n - n = n,$$

donc

$$u_n - v_n \longrightarrow +\infty,$$

et non vers 0.

Ce contre-exemple suffit à montrer que l'affirmation est fausse.

f) Si $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 10$, alors (u_n) converge vers 3

VRAI

L'inégalité donnée encadre directement la distance entre u_n et 3 par une quantité qui tend vers 0.

Pour tout $n \geq 10$, une valeur absolue étant toujours positive ou nulle,

$$0 \leq |u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 3| = 0.$$

Cela signifie que la distance entre u_n et 3 devient arbitrairement petite. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}.$$

On peut aussi retrouver directement un encadrement de u_n :

$$|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2} \iff -\frac{1}{n^2} \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{n^2},$$

d'où

$$3 - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{n^2}.$$

Les deux suites qui encadrent u_n tendent vers 3 :

$$3 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 3 \quad \text{et} \quad 3 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 3.$$

Le théorème d'encadrement donne encore $u_n \rightarrow 3$.

Le fait que l'inégalité ne soit demandée qu'à partir de $n = 10$ ne change pas la limite : un nombre fini de premiers termes n'a aucune influence sur le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

Bilan

a) VRAI

b) FAUX

c) VRAI

d) FAUX

e) FAUX

f) VRAI

À retenir

- Toute suite convergente est bornée, mais une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
- Pour montrer qu'une affirmation générale est fausse, un contre-exemple suffit.
- Si $u_n \rightarrow +\infty$, la suite ne peut pas avoir de majorant.
- $u_n - v_n \rightarrow 0$ signifie que les deux suites se rapprochent l'une de l'autre ; cela n'assure pas, à lui seul, leur convergence.
- Lorsque $|u_n - \ell| \rightarrow 0$, on a exactement $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 9 – QCM sur les suites et les limites

Énoncé

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) qui vérifient, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Pour chacune des questions suivantes, il y a **deux conclusions correctes**. Vous devez donner au plus deux réponses (celles que vous jugez correctes). Toute réponse exacte rapporte 0,75 point, toute réponse inexacte est pénalisée de 0,5 point. Donner 0, 3 ou 4 réponses à une question rapporte 0 point. Quand l'application de ce barème donne pour une question une note négative, celle-ci est ramenée à 0.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
 - a) La suite (w_n) tend vers $-\infty$.
 - b) La suite (u_n) est majorée.
 - c) La suite (u_n) tend vers $-\infty$.
 - d) La suite (w_n) n'a pas de limite.
2. Si pour tout n , $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors :
 - a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.
 - b) La suite (w_n) tend vers $+\infty$.
 - c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - u_n) = L$.
 - d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$, alors :
 - a) La suite (v_n) est majorée.
 - b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
 - c) La suite (v_n) n'a pas de limite.
 - d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
4. Si $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :
 - a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.
 - b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.
 - c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.
 - d) On ne peut pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

Correction détaillée

Question 1

On sait que, pour tout n ,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et que

$$v_n \longrightarrow -\infty.$$

Étape 1 : étudier (u_n) .

Comme $u_n \leq v_n$ et que $v_n \rightarrow -\infty$, la suite (u_n) est encore plus petite que (v_n) . Montrons soigneusement qu'elle tend elle aussi vers $-\infty$.

Dire que $v_n \rightarrow -\infty$ signifie que, pour tout réel A , il existe un entier N tel que

$$n \geq N \implies v_n < A.$$

Or $u_n \leq v_n$. Donc, pour $n \geq N$,

$$u_n \leq v_n < A,$$

d'où

$$\boxed{u_n \longrightarrow -\infty}.$$

La proposition **c)** est donc **VRAIE**.

Étape 2 : (u_n) est-elle majorée ?

Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée. En effet, à partir d'un certain rang, ses termes sont par exemple inférieurs à 0, et il ne reste qu'un nombre fini de termes avant ce rang. Un nombre réel suffisamment grand majore donc tous les termes.

Ainsi, (u_n) est majorée : la proposition **b)** est **VRAIE**.

Étape 3 : que peut-on dire de (w_n) ?

Nous savons seulement que $v_n \leq w_n$. Le fait qu'une suite située en dessous de (w_n) tende vers $-\infty$ ne détermine pas le comportement de (w_n) .

Par exemple, on peut avoir

$$v_n = -n, \quad w_n = 0.$$

Alors $v_n \leq w_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$, mais $w_n \rightarrow 0$. Ainsi **a)** est fausse et **d)** est fausse.

Conclusion de la question 1

Les deux réponses correctes sont

$$\boxed{\text{b) et c)}.$$

Question 2

On suppose maintenant que, pour tout n ,

$$u_n > 1, \quad w_n = 2u_n,$$

et que

$$u_n \longrightarrow L.$$

Toujours grâce à l'hypothèse générale,

$$u_n \leq v_n \leq w_n = 2u_n.$$

Proposition a). Les deux suites qui encadrent (v_n) n'ont pas nécessairement la même limite :

$$u_n \rightarrow L, \quad 2u_n \rightarrow 2L.$$

Comme $u_n > 1$ pour tout n , on a nécessairement $L \geq 1$, donc $L \neq 2L$. Le théorème des gendarmes ne permet donc pas de conclure que $v_n \rightarrow L$.

Contre-exemple : prenons $u_n = 2$ pour tout n . Alors $L = 2$, $w_n = 4$. La suite constante $v_n = 3$ vérifie

$$2 = u_n \leq v_n = 3 \leq w_n = 4,$$

mais $v_n \rightarrow 3 \neq 2 = L$. La proposition **a)** est donc **FAUSSE**.

Proposition b). Puisque $u_n \rightarrow L$ avec L réel,

$$w_n = 2u_n \rightarrow 2L,$$

qui est une limite finie. Donc (w_n) ne tend pas vers $+\infty$. La proposition **b)** est **FAUSSE**.

Proposition c). Calculons :

$$w_n - u_n = 2u_n - u_n = u_n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

La proposition **c)** est **VRAIE**.

Proposition d). Les informations données ne permettent effectivement pas de savoir si (v_n) converge.

Par exemple, avec $u_n = 2$ et $w_n = 4$:

$$v_n = 3$$

converge, tandis que

$$v_n = \begin{cases} 2, & n \text{ pair,} \\ 4, & n \text{ impair} \end{cases}$$

vérifie également $u_n \leq v_n \leq w_n$, mais ne converge pas. On ne peut donc pas décider, à partir des seules hypothèses, si (v_n) possède une limite. La proposition **d)** est **VRAIE**.

Conclusion de la question 2

Les deux réponses correctes sont

c) et d).

Question 3

On sait que

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad u_n \rightarrow -2, \quad w_n \rightarrow 2.$$

Proposition a). Puisque (w_n) converge, elle est bornée, donc en particulier majorée. Il existe donc un réel M tel que

$$w_n \leq M \quad \text{pour tout } n.$$

Comme $v_n \leq w_n$, on obtient

$$v_n \leq w_n \leq M.$$

Ainsi (v_n) est majorée. La proposition **a)** est **VRAIE**.

Propositions b), c) et d). Les bornes n'ont pas la même limite :

$$-2 \neq 2.$$

Le théorème des gendarmes ne permet donc pas de déterminer une limite de (v_n) .

Pour montrer que plusieurs comportements sont possibles, considérons les suites constantes

$$u_n = -2, \quad w_n = 2.$$

Elles satisfont bien les hypothèses.

Si l'on choisit $v_n = 0$, alors

$$-2 \leq 0 \leq 2$$

et $v_n \rightarrow 0$.

Mais si l'on choisit $v_n = 1$, alors $v_n \rightarrow 1$. Donc l'affirmation **b)** n'est pas toujours vraie.

Enfin, si l'on choisit

$$v_n = (-1)^n,$$

alors

$$-2 \leq (-1)^n \leq 2,$$

mais (v_n) ne converge pas, puisqu'elle alterne entre 1 et -1 .

Ainsi (v_n) peut converger ou ne pas converger. On ne peut pas trancher avec les seules informations de l'énoncé. La proposition **c)** est donc fausse, tandis que la proposition **d)** est vraie.

Conclusion de la question 3

Les deux réponses correctes sont

a) et d).

Question 4

On a

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}.$$

Étape 1 : limite de (u_n) .

Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{1}{n^2}.$$

Or

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$u_n \longrightarrow 2.$$

La proposition **b)** est **VRAIE**.

Étape 2 : limite de (w_n) .

De même,

$$w_n = \frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2} = 2 + \frac{3}{n^2}.$$

Comme

$$\frac{3}{n^2} \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$w_n \longrightarrow 2.$$

La proposition **a)**, qui affirme que $w_n \rightarrow 0$, est donc **FAUSSE**.

Étape 3 : limite de (v_n) .

Pour tout n ,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Nous venons de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2.$$

Les deux suites qui encadrent (v_n) ont donc la même limite. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2.$$

La proposition **c)** est **VRAIE** et la proposition **d)** est **FAUSSE**.

Conclusion de la question 4

Les deux réponses correctes sont

$$\text{b) et c).}$$

Bilan général

Question	Réponses correctes	Idée essentielle
1	b), c)	$u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$ entraînent $u_n \rightarrow -\infty$; une suite tendant vers $-\infty$ est majorée.
2	c), d)	$w_n - u_n = u_n \rightarrow L$, mais l'encadrement $u_n \leq v_n \leq 2u_n$ ne force pas la convergence de (v_n) .
3	a), d)	(w_n) convergente est majorée, donc (v_n) aussi; les limites -2 et 2 des bornes étant différentes, la convergence de (v_n) n'est pas déterminée.
4	b), c)	$u_n \rightarrow 2$ et $w_n \rightarrow 2$; le théorème des gendarmes donne alors $v_n \rightarrow 2$.

Réponses finales

$$1 : \text{b, c} \quad 2 : \text{c, d} \quad 3 : \text{a, d} \quad 4 : \text{b, c}$$

Exercice 10

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad u_n = \frac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} - 2n + 3, & \text{b)} \quad u_n = \frac{n^2 + 5n + 7}{2 - n}, \\ \text{c)} \quad u_n = 2 - n + (-1)^n, & \text{d)} \quad u_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}. \end{array}$$

Correction détaillée

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} - 2n + 3$$

Si l'on regarde séparément les deux premiers termes, on a

$$\frac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad -2n \longrightarrow -\infty.$$

On ne peut donc pas conclure directement. Il faut d'abord transformer l'expression afin de faire apparaître la simplification entre les termes de même ordre.

Effectuons une division simple du numérateur par $2n + 1$. On remarque que

$$(2n + 1)(2n) = 4n^2 + 2n.$$

Par conséquent,

$$4n^2 + 3n - 1 = (4n^2 + 2n) + (n - 1) = (2n + 1)(2n) + (n - 1).$$

En divisant par $2n + 1$, on obtient

$$\frac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} = 2n + \frac{n - 1}{2n + 1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= 2n + \frac{n - 1}{2n + 1} - 2n + 3 \\ &= 3 + \frac{n - 1}{2n + 1}. \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 1}{2n + 1}.$$

On divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$\frac{n - 1}{2n + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{7}{2}}$$

b) $u_n = \frac{n^2 + 5n + 7}{2 - n}$

Le numérateur est un polynôme de degré 2 tandis que le dénominateur est de degré 1. Pour faire apparaître les termes dominants, divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{\frac{n^2}{n} + \frac{5n}{n} + \frac{7}{n}}{\frac{2}{n} - \frac{n}{n}} = \frac{n + 5 + \frac{7}{n}}{\frac{2}{n} - 1}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$n + 5 + \frac{7}{n} \longrightarrow +\infty$$

car $n \rightarrow +\infty$ et $\frac{7}{n} \rightarrow 0$.

D'autre part,

$$\frac{2}{n} - 1 \longrightarrow -1.$$

Le dénominateur tend donc vers un nombre strictement négatif, tandis que le numérateur tend vers $+\infty$. Le quotient devient alors négatif et de valeur absolue arbitrairement grande.

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

c) $u_n = 2 - n + (-1)^n$

Le terme $(-1)^n$ ne possède pas de limite : il vaut alternativement 1 et -1 . Mais il reste toujours compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Ajoutons $2 - n$ aux trois membres :

$$2 - n - 1 \leq 2 - n + (-1)^n \leq 2 - n + 1.$$

Donc

$$1 - n \leq u_n \leq 3 - n.$$

Or

$$1 - n \longrightarrow -\infty \quad \text{et} \quad 3 - n \longrightarrow -\infty.$$

Les deux suites qui encadrent u_n tendent vers $-\infty$. On en déduit que u_n tend également vers $-\infty$.

On peut aussi comprendre ce résultat directement : le terme $(-1)^n$ ne fait varier la valeur que de 1 ou -1 , alors que le terme $-n$ devient négatif avec une valeur absolue de plus en plus grande.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

d) $u_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$

Commençons par simplifier le dénominateur :

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \\ &= 3 \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \\ &= 4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Comme

$$0 < \frac{1}{4} < 1,$$

la suite géométrique de terme général $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ tend vers 0 :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \longrightarrow 1,$$

puis

$$u_n = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \longrightarrow 4.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

Bilan

Question	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
a)	$\frac{7}{2}$
b)	$-\infty$
c)	$-\infty$
d)	4

Méthode

Pour une limite de suite, il faut d'abord observer la forme de l'expression. Dans cet exercice, quatre réflexes différents sont utiles : simplifier avant de passer à la limite, faire apparaître les termes dominants d'un quotient, encadrer un terme oscillant comme $(-1)^n$, et utiliser la limite d'une suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$.

Exercice 11

Corrigé détaillé

Énoncé

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{n+325},$$

$$\text{b) } u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n},$$

$$\text{c) } u_n = \frac{4n^2 + 1}{n(2n+1)},$$

$$\text{d) } u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+17},$$

$$\text{e) } u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}},$$

$$\text{f) } u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}},$$

$$\text{g) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

$$\text{h) } u_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

Correction détaillée

$$\text{a) } u_n = \frac{2n+1}{n+325}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$. On simplifie en divisant le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{325}{n}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{325}{n}}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{325}{n} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$$

Le terme de plus haut degré du numérateur est $2n^2$ et celui du dénominateur est $-n$. Pour faire apparaître leur rôle, divisons numérateur et dénominateur par n :

$$u_n = \frac{2n - 3 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} - 1}.$$

Nous avons

$$2n - 3 + \frac{2}{n} \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{1}{n} - 1 \rightarrow -1.$$

Le dénominateur est donc négatif à partir d'un certain rang et reste proche de -1 . Le quotient d'une quantité qui tend vers $+\infty$ par une quantité qui tend vers un réel strictement négatif tend vers $-\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}.$$

c) $u_n = \frac{4n^2 + 1}{n(2n + 1)}$

Commençons par développer le dénominateur :

$$n(2n + 1) = 2n^2 + n.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + n}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par n^2 :

$$u_n = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Comme

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

d) $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 17}$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

donc

$$2\sqrt{n} + 17 \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur reste égal à la constante 3. Un nombre fixe divisé par une quantité positive qui devient arbitrairement grande tend vers 0. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

e) $u_n = \frac{\sqrt{3n + 1}}{3 + \sqrt{n}}$

On fait apparaître $\sqrt{n}$ dans le numérateur. Puisque $n > 0$ à partir de $n = 1$,

$$3n + 1 = n \left(3 + \frac{1}{n} \right),$$

d'où

$$\sqrt{3n + 1} = \sqrt{n} \sqrt{3 + \frac{1}{n}}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \sqrt{3 + \frac{1}{n}}}{3 + \sqrt{n}}.$$

Divisons maintenant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n}$:

$$u_n = \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}} + 1}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Par continuité de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{3 + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{3}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}}$$

f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2}}{\sqrt{n^2 - n - 1}}$

Pour n suffisamment grand, les deux radicandes sont positifs. Factorisons n^2 sous chaque racine :

$$n^2 + n + 2 = n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right),$$

$$n^2 - n - 1 = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Comme $n \geq 0$, $\sqrt{n^2} = n$. Donc

$$\sqrt{n^2 + n + 2} = n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}},$$

et

$$\sqrt{n^2 - n - 1} = n \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Par conséquent,

$$u_n = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \rightarrow 1, \quad 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

La substitution directe donne une différence de deux quantités qui tendent vers $+\infty$. On utilise l'expression conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

On multiplie et on divise par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

h) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

Là encore, les deux termes tendent vers $+\infty$. On rationalise à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + n} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}. \end{aligned}$$

Factorisons n^2 sous la racine :

$$\sqrt{n^2 + n} = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} \\ &= \frac{n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

Bilan

Question	a	b	c	d	e	f	g	h
$\lim u_n$	2	$-\infty$	2	0	$\sqrt{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$

Exercice 12

Énoncé. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) . Démontrer cette conjecture.
2. Montrer que, pour tout entier n , $0 < u_n < 3$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l .
4. Déterminer l .

Correction détaillée

1. Premiers termes et sens de variation

On part de $u_0 = 1$ et on applique, à chaque étape, la relation

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}.$$

Calcul de u_0 . Il est donné directement :

$$\boxed{u_0 = 1}.$$

Calcul de u_1 .

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2,$$

donc

$$\boxed{u_1 = 2}.$$

Calcul de u_2 .

$$u_2 = \sqrt{u_1 + 3} = \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5},$$

donc

$$\boxed{u_2 = \sqrt{5}}.$$

Comme $\sqrt{5} \approx 2,236$, on a déjà $u_2 > u_1$.

Calcul de u_3 .

$$u_3 = \sqrt{u_2 + 3} = \sqrt{\sqrt{5} + 3},$$

donc

$$\boxed{u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}}.$$

Numériquement, $u_3 \approx 2,288$.

Ainsi, les quatre premiers termes sont

$$\boxed{1, \quad 2, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{3 + \sqrt{5}}}.$$

Ils suggèrent que la suite est **croissante**. Il faut maintenant le démontrer pour tout n .

Démonstration par récurrence

On considère la propriété

$$P_n : \quad u_{n+1} > u_n.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad u_0 = 1,$$

donc

$$u_1 > u_0.$$

La propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel n ,

$$u_{n+1} > u_n.$$

En ajoutant 3 aux deux membres,

$$u_{n+1} + 3 > u_n + 3.$$

Les deux membres sont positifs. Or la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

On peut donc prendre les racines carrées en conservant l'ordre :

$$\sqrt{u_{n+1} + 3} > \sqrt{u_n + 3}.$$

Mais, par définition de la suite,

$$\sqrt{u_{n+1} + 3} = u_{n+2} \quad \text{et} \quad \sqrt{u_n + 3} = u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$u_{n+2} > u_{n+1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

Par conséquent,

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

2. Montrer que $0 < u_n < 3$ pour tout n

On démontre par récurrence la propriété

$$Q_n : \quad 0 < u_n < 3.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc

$$0 < 1 < 3.$$

Ainsi Q_0 est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 3.$$

En ajoutant 3 :

$$3 < u_n + 3 < 6.$$

En prenant les racines carrées :

$$\sqrt{3} < \sqrt{u_n + 3} < \sqrt{6}.$$

Or

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}.$$

Donc

$$\sqrt{3} < u_{n+1} < \sqrt{6}.$$

En particulier, $\sqrt{3} > 0$. De plus, comme $6 < 9$, on a

$$\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3.$$

Ainsi

$$0 < u_{n+1} < 3.$$

La propriété Q_{n+1} est donc vraie.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 3.}$$

La suite est donc notamment **majorée par 3**.

3. Convergence de la suite

Nous avons établi deux informations essentielles :

$$(u_n) \text{ est croissante}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 3.$$

Ainsi, (u_n) est **croissante et majorée**.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, toute suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel l tel que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.}$$

De plus, puisque $0 < u_n < 3$ pour tout n , cette limite est nécessairement positive et vérifie $l \leq 3$.

4. Détermination de la limite l

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}.$$

Puisque $u_n \rightarrow l$, la suite décalée (u_{n+1}) a la même limite :

$$u_{n+1} \rightarrow l.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue pour $x \geq -3$. On peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$l = \sqrt{l+3}.$$

Les deux membres étant positifs, on peut élever au carré :

$$l^2 = l + 3.$$

Donc

$$l^2 - l - 3 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13.$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$l = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{ou} \quad l = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Or $u_n > 0$ pour tout n , et nous avons vu que la limite l est positive. Mais

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0.$$

Cette solution est donc impossible. Il reste uniquement

$$l = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Numériquement,

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,303.$$

Cette valeur est bien cohérente avec les premiers termes calculés, qui augmentent progressivement vers environ 2,303.

Bilan

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \sqrt{5}, \quad u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$(u_n) \text{ est strictement croissante et } 0 < u_n < 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$(u_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Exercice 14

Corrigé détaillé

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Soit une suite (u_n) de termes strictement positifs.

- a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$, alors la suite (u_n) converge.
- b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n}{2}$, alors la suite diverge.

Correction détaillée

a) Si $u_n \leq 5$ pour tout n , alors (u_n) converge

On sait que les termes de la suite sont strictement positifs. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n \leq 5.$$

La suite est donc **bornée** : elle est minorée par 0 et majorée par 5.

Mais il faut faire très attention :

une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Pour prouver que l'affirmation est fausse, il suffit de construire un contre-exemple qui respecte toutes les hypothèses.

Considérons la suite

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}.$$

Étudions ses valeurs selon la parité de n .

Si n est pair, alors $(-1)^n = 1$, donc

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$, donc

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, pour tout n ,

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} < 5.$$

Cette suite est donc bien constituée de termes strictement positifs et vérifie $u_n \leq 5$ pour tout n .

Cependant, elle alterne entre deux valeurs :

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}, \dots$$

Plus précisément,

$$u_{2n} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Les termes de rang pair tendent donc vers $\frac{3}{2}$, tandis que les termes de rang impair tendent vers $\frac{1}{2}$. Ces deux limites étant différentes, la suite (u_n) ne peut pas avoir de limite.

Conclusion : l'affirmation a) est FAUSSE.

Le fait d'être majorée (et même bornée) ne suffit pas à assurer la convergence d'une suite. Ici, il manque par exemple une information de monotonie.

b) Si $u_n \geq \frac{n}{2}$ pour tout n , alors (u_n) diverge

On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq \frac{n}{2}.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Nous allons montrer directement que u_n tend lui aussi vers $+\infty$.

Démonstration à partir de la définition

Dire que $u_n \rightarrow +\infty$ signifie que, quel que soit le réel A , on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A .

Soit donc $A \in \mathbb{R}$. Nous voulons avoir

$$u_n > A.$$

Comme $u_n \geq n/2$, il suffit d'imposer

$$\frac{n}{2} > A.$$

Cette inégalité équivaut à

$$n > 2A.$$

Il suffit donc de choisir un entier N suffisamment grand pour que $N > 2A$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$n \geq N > 2A,$$

d'où

$$\frac{n}{2} > A.$$

Comme $u_n \geq n/2$, on obtient finalement

$$u_n \geq \frac{n}{2} > A.$$

Ainsi, quel que soit le réel A , les termes u_n finissent par dépasser A . Par définition,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

On peut aussi résumer le raisonnement par comparaison :

$$\frac{n}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad u_n \geq \frac{n}{2},$$

donc

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

La suite ne converge donc pas vers une limite réelle finie : elle diverge vers $+\infty$.

Conclusion : l'affirmation b) est VRAIE.

$$\boxed{u_n \geq \frac{n}{2} \text{ et } \frac{n}{2} \rightarrow +\infty \implies u_n \rightarrow +\infty.}$$

Bilan

Affirmation	Verdict	Idée essentielle
a)	Fausse	Être bornée ne suffit pas pour converger. Le contre-exemple $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2}$ est positif, majoré par 5, mais ne converge pas.
b)	Vraie	Comme $u_n \geq n/2$ et $n/2 \rightarrow +\infty$, on a nécessairement $u_n \rightarrow +\infty$.

Point de méthode

Deux réflexes importants :

- Pour montrer qu'une affirmation générale est **fausse**, un seul contre-exemple satisfaisant toutes les hypothèses suffit.
- Si une suite est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$, alors elle tend elle aussi vers $+\infty$.

Exercice 15

Énoncé

En utilisant la définition de la limite d'une suite, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

Correction détaillée

1. Cherchons d'abord la limite attendue

La suite est donnée par

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

Pour faire apparaître une constante, on remarque que

$$2n+3 = 2(n+1) + 1.$$

En effet,

$$2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2(n+1) + 1}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= 2 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'écriture très utile

$$u_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ devient de plus en plus petit lorsque n devient grand, on s'attend à ce que u_n se rapproche de 2.

Nous allons maintenant le démontrer directement avec la définition de la limite.

2. Définition à utiliser

Dire que la suite (u_n) converge vers le réel 2 signifie :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$|u_n - 2| < \varepsilon.$$

Notre objectif est donc le suivant : étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, trouver un rang N à partir duquel la distance entre u_n et 2 est inférieure à ε .

3. Calcul de la distance entre u_n et 2

Partons de l'expression initiale :

$$|u_n - 2| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right|.$$

Mettons les deux termes au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{n+1} - 2 &= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2n+3-2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 > 0$. Par conséquent,

$$\boxed{|u_n - 2| = \frac{1}{n+1}}.$$

Nous voulons donc obtenir

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

4. Quel rang N choisir ?

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque ε est strictement positif, on peut transformer l'inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < \varepsilon &\iff 1 < \varepsilon(n+1) \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \\ &\iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir un entier naturel N vérifiant

$$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Un choix simple consiste à prendre un entier N tel que

$$\boxed{N+1 > \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Un tel entier existe toujours : les entiers naturels peuvent être pris aussi grands que l'on veut.

Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$n+1 \geq N+1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Les nombres considérés étant positifs, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Or

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \geq N$,

$$\boxed{|u_n - 2| < \varepsilon}.$$

5. Conclusion avec la définition

Nous avons montré que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier naturel N tel que

$$n \geq N \implies |u_n - 2| < \varepsilon.$$

C'est exactement la définition de la convergence de (u_n) vers 2.

La suite (u_n) est donc convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exemple pour bien comprendre le rôle de ε

Supposons que l'on souhaite que u_n soit à moins de 0,01 de 2. On prend

$$\varepsilon = 0,01.$$

Il faut avoir

$$|u_n - 2| < 0,01.$$

Comme

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n+1},$$

on cherche

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} < 0,01 &\iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \\ &\iff n+1 > 100 \\ &\iff n > 99. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de $n = 100$,

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{101} < 0,01.$$

Cela signifie que tous les termes $u_{100}, u_{101}, u_{102}, \dots$ appartiennent à l'intervalle

$$]2 - 0,01; 2 + 0,01[=]1,99; 2,01[.$$

À retenir

Pour démontrer une limite à l'aide de la définition, la démarche est :

1. proposer la limite ℓ ;
2. calculer et simplifier $|u_n - \ell|$;
3. imposer $|u_n - \ell| < \varepsilon$;
4. déterminer une condition suffisante sur n ;
5. choisir un rang N qui vérifie cette condition ;
6. conclure en revenant exactement à la définition.

Exercice 16 - Corrigé détaillé

Énoncé

Justifier que la suite

$$u_n = (-1)^n$$

n'a pas de limite.

Correction

Nous allons étudier attentivement les termes de la suite afin de comprendre son comportement.

1. Calcul des premiers termes

La suite est définie par

$$u_n = (-1)^n.$$

Calculons plusieurs termes :

$$u_0 = (-1)^0 = 1,$$

$$u_1 = (-1)^1 = -1,$$

$$u_2 = (-1)^2 = 1,$$

$$u_3 = (-1)^3 = -1,$$

$$u_4 = (-1)^4 = 1.$$

On obtient donc

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

La suite alterne constamment entre les deux valeurs 1 et -1 .

2. Étude selon la parité de l'indice

Pour justifier rigoureusement que la suite n'a pas de limite, séparons les indices pairs et les indices impairs.

Indices pairs

Si $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$u_{2k} = (-1)^{2k}.$$

Or

$$(-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1.$$

Ainsi,

$$u_{2k} = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La suite formée par les termes de rang pair est donc constante :

$$u_0 = u_2 = u_4 = \dots = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = 1.$$

Indices impairs

Si $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$u_{2k+1} = (-1)^{2k+1}.$$

On écrit

$$(-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1.$$

Ainsi,

$$u_{2k+1} = -1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La suite formée par les termes de rang impair est donc constante :

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = -1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k+1} = -1.$$

3. Pourquoi cela empêche-t-il la suite de converger ?

Supposons, pour raisonner par l'absurde, que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

Une propriété fondamentale des suites convergentes est la suivante :

Si une suite (u_n) converge vers ℓ , alors toute suite obtenue en prenant une infinité de termes de (u_n) dans l'ordre converge elle aussi vers ℓ .

En particulier, si (u_n) convergait vers ℓ , alors les termes de rang pair devraient tendre vers ℓ , donc

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = 1.$$

Mais les termes de rang impair devraient eux aussi tendre vers la même limite ℓ , donc

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k+1} = -1.$$

Nous obtiendrions alors simultanément

$$\ell = 1 \quad \text{et} \quad \ell = -1,$$

ce qui est impossible puisque

$$1 \neq -1.$$

Notre supposition est donc fausse.

La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Elle oscille indéfiniment entre 1 et -1 . Elle est donc divergente.

Une autre justification avec la définition de la convergence

On peut également démontrer directement que la suite ne peut converger vers aucun réel.

Supposons encore qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_n \longrightarrow \ell.$$

Prenons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

D'après la définition de la convergence, il devrait exister un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Choisissons alors un indice pair $2k \geq N$ et un indice impair $2p+1 \geq N$. On aurait

$$|u_{2k} - \ell| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |u_{2p+1} - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Comme

$$u_{2k} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = -1,$$

cela donnerait

$$|1 - \ell| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |-1 - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Or, par l'inégalité triangulaire,

$$|1 - (-1)| = |(1 - \ell) + (\ell + 1)| \leq |1 - \ell| + |\ell + 1|.$$

Donc

$$2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui est impossible.

Ainsi, aucun réel ℓ ne peut être la limite de la suite.

$((-1)^n)$ diverge.

À retenir

Le fait qu'une suite soit bornée ne suffit pas pour qu'elle converge.

Ici,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite est bien bornée. Pourtant elle ne converge pas, car elle continue à osciller entre deux valeurs différentes.

Deux comportements persistants donnant deux limites différentes $\implies$ pas de limite.

Exercice 17 – Corrigé détaillé

Énoncé

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) , où

$$\boxed{u_n = \frac{2n+1}{4n(n+1)}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n\sqrt{n}+1}}.$$

On cherche, dans les deux cas, la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Limite de la suite (u_n)

On part de

$$u_n = \frac{2n+1}{4n(n+1)}.$$

Le numérateur contient essentiellement un terme en n , tandis que le dénominateur contient un terme en n^2 . Pour faire apparaître clairement les limites usuelles, on divise le numérateur et le dénominateur par n^2 .

Commençons par développer le dénominateur :

$$4n(n+1) = 4n^2 + 4n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{2n+1}{4n^2+4n}.$$

Pour $n \geq 1$, on peut diviser tous les termes par n^2 :

$$u_n = \frac{\frac{2n+1}{n^2}}{\frac{4n^2+4n}{n^2}}.$$

Développons séparément le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{2n+1}{n^2} = \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2},$$

et

$$\frac{4n^2+4n}{n^2} = \frac{4n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} = 4 + \frac{4}{n}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{u_n = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{4}{n}}}.$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 + 0 = 0,$$

et

$$4 + \frac{4}{n} \longrightarrow 4 + 0 = 4.$$

La limite du dénominateur étant non nulle, on peut utiliser la règle de la limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{0}{4} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. Limite de la suite (v_n)

On a

$$v_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n\sqrt{n} + 1}.$$

Ici, il faut faire attention au terme $n\sqrt{n}$. Pour comparer correctement les différents termes, remarquons que

$$n\sqrt{n} = n \times n^{1/2} = n^{3/2}.$$

Le terme n^2 est donc de plus haut degré que $n\sqrt{n}$. On divise alors le numérateur et le dénominateur par n^2 .

Pour $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{\frac{2n^2 + 1}{n^2}}{\frac{n^2 + n\sqrt{n} + 1}{n^2}}.$$

Au numérateur :

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2} = \frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2}.$$

Au dénominateur :

$$\frac{n^2 + n\sqrt{n} + 1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{n\sqrt{n}}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{n\sqrt{n}}{n^2} + \frac{1}{n^2}.$$

Simplifions très soigneusement le terme central :

$$\frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n\sqrt{n}}{n \times n} = \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Comme $n = (\sqrt{n})^2$, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi,

$$\frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On obtient donc

$$v_n = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, le numérateur vérifie

$$2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2,$$

tandis que le dénominateur vérifie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1.$$

La limite du dénominateur étant $1 \neq 0$, la règle du quotient donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2.$$

Bilan

Les limites demandées sont donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2.$$

Méthode à retenir

Dans ce type de quotient, on repère la plus grande puissance de n présente dans l'expression et on divise tous les termes du numérateur et du dénominateur par cette puissance. On fait ensuite apparaître des limites usuelles telles que

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Il faut surtout effectuer chaque simplification avant de passer à la limite.

Exercice 18

Énoncé

1. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que

$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$

2. Montrer que, pour tout entier $n > 3$,

$$2^n \geq n^2.$$

3. En déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n.$$

1. Déterminer les entiers n tels que $2n^2 \geq (n+1)^2$

On cherche les entiers naturels n vérifiant

$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Développons le carré :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

L'inégalité devient donc

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1.$$

On soustrait $n^2 + 2n + 1$ aux deux membres :

$$2n^2 - n^2 - 2n - 1 \geq 0,$$

d'où

$$n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Pour résoudre cette inégalité, considérons le trinôme

$$P(n) = n^2 - 2n - 1.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8.$$

Les deux racines sont

$$n_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2},$$

et

$$n_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Comme le coefficient de n^2 est positif, le trinôme est positif ou nul à l'extérieur de l'intervalle compris entre ses deux racines. Ainsi,

$$n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

équivalent à

$$n \leq 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad n \geq 1 + \sqrt{2}.$$

Or

$$1 - \sqrt{2} < 0$$

et

$$1 + \sqrt{2} \simeq 2,414.$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, la première possibilité ne fournit aucun entier naturel, et la seconde donne

$$n \geq 3.$$

On peut vérifier le premier entier obtenu :

$$2 \times 3^2 = 18 \quad \text{et} \quad (3 + 1)^2 = 16,$$

donc

$$18 \geq 16.$$

$$2n^2 \geq (n + 1)^2 \iff n \geq 3 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que, pour tout entier $n > 3$, $2^n \geq n^2$

L'énoncé demande de démontrer

$$2^n \geq n^2$$

pour tout entier $n > 3$, c'est-à-dire pour tout entier

$$n \geq 4.$$

Nous allons effectuer une démonstration par récurrence.

Initialisation

Le premier entier à considérer est

$$n = 4.$$

Calculons les deux membres :

$$2^4 = 16$$

et

$$4^2 = 16.$$

Ainsi,

$$2^4 = 4^2,$$

donc en particulier

$$2^4 \geq 4^2.$$

La propriété est donc vraie au rang 4.

Hérédité

Soit un entier $n \geq 4$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons que

$$2^n \geq n^2.$$

Nous devons démontrer qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que

$$2^{n+1} \geq (n + 1)^2.$$

À partir de l'hypothèse de récurrence

$$2^n \geq n^2,$$

on multiplie les deux membres par $2 > 0$. Le sens de l'inégalité est conservé :

$$2 \times 2^n \geq 2n^2.$$

Or

$$2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Donc

$$2^{n+1} \geq 2n^2.$$

Il reste maintenant à comparer $2n^2$ et $(n + 1)^2$.

D'après la question 1, pour tout entier $n \geq 3$,

$$2n^2 \geq (n + 1)^2.$$

Comme ici $n \geq 4$, cette inégalité est bien applicable. Nous avons donc

$$2^{n+1} \geq 2n^2$$

et

$$2n^2 \geq (n + 1)^2.$$

Par transitivité,

$$2^{n+1} \geq (n + 1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 4 et elle est héréditaire à partir de ce rang.

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 4$, c'est-à-dire pour tout entier $n > 3$,

$$\boxed{2^n \geq n^2}.$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$

Nous savons, d'après la question précédente, que pour tout entier $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

Autrement dit, n^2 peut devenir aussi grand que l'on veut lorsque n devient suffisamment grand.

Puisque, à partir du rang 4,

$$2^n \geq n^2,$$

la suite (2^n) est toujours au-dessus d'une suite qui tend vers $+\infty$.

Détaillons ce raisonnement avec la définition.

Soit $A > 0$ un réel quelconque. Comme

$$n^2 \longrightarrow +\infty,$$

il existe un entier N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$,

$$n^2 \geq A.$$

Prenons

$$N = \max(4, N_1).$$

Alors, pour tout $n \geq N$, on a à la fois

$$n \geq 4$$

et

$$n^2 \geq A.$$

La question 2 donne alors

$$2^n \geq n^2.$$

Donc

$$2^n \geq n^2 \geq A.$$

Ainsi, quel que soit le réel positif A , les termes 2^n finissent par être supérieurs à A .

C'est exactement la définition de

$$2^n \longrightarrow +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

Bilan

Nous avons obtenu successivement :

$$2n^2 \geq (n+1)^2 \quad \text{pour tout } n \geq 3,$$

puis, par récurrence,

$$2^n \geq n^2 \quad \text{pour tout } n > 3,$$

et enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

Exercice 19

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2$$

et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n > 1.$$

2. a) Établir que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}.$$

- b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l .

- c) Déterminer cette limite l .

1. Démontrer que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous allons démontrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_n > 1.$$

Initialisation

Au rang $n = 0$, l'énoncé donne

$$u_0 = 2.$$

Or

$$2 > 1.$$

Donc

$$u_0 > 1.$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire

$$u_n > 1.$$

Nous devons montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$, autrement dit

$$u_{n+1} > 1.$$

D'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

Pour comparer u_{n+1} à 1, calculons la différence

$$u_{n+1} - 1.$$

On obtient

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - 1.$$

On écrit 1 avec le même dénominateur :

$$1 = \frac{3 + u_n}{3 + u_n}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - \frac{3 + u_n}{3 + u_n}.$$

Donc

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1 + 3u_n - (3 + u_n)}{3 + u_n}.$$

Développons le numérateur :

$$1 + 3u_n - 3 - u_n = 2u_n - 2.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n - 2}{3 + u_n}.$$

On factorise le numérateur :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{3 + u_n}.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$u_n > 1,$$

donc

$$u_n - 1 > 0.$$

Ainsi,

$$2(u_n - 1) > 0.$$

D'autre part, l'énoncé précise que tous les termes de la suite sont strictement positifs. Donc

$$u_n > 0,$$

et par conséquent

$$3 + u_n > 0.$$

Le numérateur et le dénominateur de

$$\frac{2(u_n - 1)}{3 + u_n}$$

sont donc strictement positifs. Ainsi,

$$u_{n+1} - 1 > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} > 1.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire.

Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.}$$

2.a) Calcul de $u_{n+1} - u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - u_n.$$

Pour effectuer la soustraction, on met les deux termes au même dénominateur :

$$u_n = \frac{u_n(3 + u_n)}{3 + u_n}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - \frac{u_n(3 + u_n)}{3 + u_n}.$$

On regroupe :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 3u_n - u_n(3 + u_n)}{3 + u_n}.$$

Développons :

$$u_n(3 + u_n) = 3u_n + u_n^2.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 3u_n - 3u_n - u_n^2}{3 + u_n}.$$

Les termes $3u_n$ s'annulent :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{3 + u_n}.$$

Or

$$1 - u_n^2 = (1 - u_n)(1 + u_n).$$

Finalement,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}.$$

2.b) Sens de variation et convergence de (u_n)

Nous venons d'établir que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}.$$

Pour déterminer le sens de variation de la suite, étudions le signe de cette différence.

D'après la question 1,

$$u_n > 1.$$

Donc

$$1 - u_n < 0.$$

Comme $u_n > 1$, on a également

$$1 + u_n > 0.$$

Enfin,

$$u_n > 0,$$

donc

$$3 + u_n > 0.$$

Ainsi, dans

$$\frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n},$$

le facteur $1 - u_n$ est négatif, le facteur $1 + u_n$ est positif et le dénominateur $3 + u_n$ est positif.

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} < u_n.$$

Ainsi,

la suite (u_n) est strictement décroissante.

D'autre part, la question 1 donne

$$u_n > 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est donc minorée par 1.

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est décroissante,} \\ (u_n) \text{ est minorée par 1.} \end{cases}$$

D'après le théorème de convergence des suites monotones, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Il existe donc un réel l tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

De plus, puisque

$$u_n > 1$$

pour tout n , on sait déjà que

$$l \geq 1.$$

2.c) Détermination de la limite l

Nous savons que

$$u_n \longrightarrow l.$$

Une suite convergente et la suite décalée d'un rang ont la même limite. Donc

$$u_{n+1} \longrightarrow l.$$

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

Comme

$$u_n \longrightarrow l,$$

on a

$$1 + 3u_n \longrightarrow 1 + 3l$$

et

$$3 + u_n \longrightarrow 3 + l.$$

Nous savons que

$$l \geq 1,$$

donc

$$3 + l \geq 4 > 0.$$

Le dénominateur limite n'est donc pas nul. On peut passer à la limite dans le quotient :

$$l = \frac{1 + 3l}{3 + l}.$$

Nous devons maintenant résoudre cette équation.

On multiplie les deux membres par $3 + l$:

$$l(3 + l) = 1 + 3l.$$

Développons le membre de gauche :

$$3l + l^2 = 1 + 3l.$$

On soustrait $3l$ aux deux membres :

$$l^2 = 1.$$

Donc

$$l = 1 \quad \text{ou} \quad l = -1.$$

Mais nous avons montré que

$$l \geq 1.$$

La valeur

$$l = -1$$

est donc impossible.

Il reste nécessairement

$$l = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Bilan

Nous avons démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1,$$

puis que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}.$$

Comme $u_n > 1$, cette différence est strictement négative :

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Ainsi, (u_n) est strictement décroissante. Elle est également minorée par 1, donc elle converge.

Enfin, sa limite l vérifie

$$l = \frac{1 + 3l}{3 + l},$$

ce qui conduit à

$$l^2 = 1.$$

La condition $l \geq 1$ permet de conserver uniquement

$$l = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 20

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n > 0.$$

- 1) a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
- b) Vérifier que si n est l'un des entiers $0, 1, 2, 3, 4$, alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
- c) Établir que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

- d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

- 2) Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

- a) Établir que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

- b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

- c) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

1.a) Calcul de u_1, u_2, u_3, u_4

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

Comme $u_0 = 2$, on obtient :

$$u_1 = \frac{u_0 + 2}{2u_0 + 1} = \frac{2 + 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{4}{5}.$$

Ainsi,

$$u_1 = \frac{4}{5} = 0,800.$$

Calculons ensuite u_2 :

$$u_2 = \frac{u_1 + 2}{2u_1 + 1} = \frac{\frac{4}{5} + 2}{2 \times \frac{4}{5} + 1}.$$

Au numérateur :

$$\frac{4}{5} + 2 = \frac{4}{5} + \frac{10}{5} = \frac{14}{5}.$$

Au dénominateur :

$$2 \times \frac{4}{5} + 1 = \frac{8}{5} + 1 = \frac{8}{5} + \frac{5}{5} = \frac{13}{5}.$$

Donc

$$u_2 = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{14}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{14}{13}.$$

Ainsi,

$$u_2 = \frac{14}{13} \approx 1,077.$$

Calculons u_3 :

$$u_3 = \frac{u_2 + 2}{2u_2 + 1} = \frac{\frac{14}{13} + 2}{2 \times \frac{14}{13} + 1}.$$

Au numérateur :

$$\frac{14}{13} + 2 = \frac{14}{13} + \frac{26}{13} = \frac{40}{13}.$$

Au dénominateur :

$$2 \times \frac{14}{13} + 1 = \frac{28}{13} + \frac{13}{13} = \frac{41}{13}.$$

Par conséquent,

$$u_3 = \frac{\frac{40}{13}}{\frac{41}{13}} = \frac{40}{41}.$$

Ainsi,

$$u_3 = \frac{40}{41} \approx 0,976.$$

Enfin,

$$u_4 = \frac{u_3 + 2}{2u_3 + 1} = \frac{\frac{40}{41} + 2}{2 \times \frac{40}{41} + 1}.$$

Au numérateur :

$$\frac{40}{41} + 2 = \frac{40}{41} + \frac{82}{41} = \frac{122}{41}.$$

Au dénominateur :

$$2 \times \frac{40}{41} + 1 = \frac{80}{41} + \frac{41}{41} = \frac{121}{41}.$$

Donc

$$u_4 = \frac{\frac{122}{41}}{\frac{121}{41}} = \frac{122}{121}.$$

Ainsi,

$$u_4 = \frac{122}{121} \approx 1,008.$$

Nous avons donc :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 0,800, \quad u_2 \approx 1,077, \quad u_3 \approx 0,976, \quad u_4 \approx 1,008.$$

1.b) Signe de $u_n - 1$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Étudions successivement les cinq premiers rangs.

Pour $n = 0$:

$$u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0 \quad \text{et} \quad (-1)^0 = 1 > 0.$$

Les deux nombres ont le même signe.

Pour $n = 1$:

$$u_1 - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} < 0 \quad \text{et} \quad (-1)^1 = -1 < 0.$$

Pour $n = 2$:

$$u_2 - 1 = \frac{14}{13} - 1 = \frac{1}{13} > 0 \quad \text{et} \quad (-1)^2 = 1 > 0.$$

Pour $n = 3$:

$$u_3 - 1 = \frac{40}{41} - 1 = -\frac{1}{41} < 0 \quad \text{et} \quad (-1)^3 = -1 < 0.$$

Pour $n = 4$:

$$u_4 - 1 = \frac{122}{121} - 1 = \frac{1}{121} > 0 \quad \text{et} \quad (-1)^4 = 1 > 0.$$

Ainsi, pour chacun des entiers $0, 1, 2, 3, 4$,

$$u_n - 1 \text{ a le même signe que } (-1)^n.$$

On observe donc que les termes de la suite se placent alternativement au-dessus et au-dessous de 1 :

$$u_0 > 1, \quad u_1 < 1, \quad u_2 > 1, \quad u_3 < 1, \quad u_4 > 1.$$

1.c) Expression de $u_{n+1} - 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

Alors

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1.$$

On met au même dénominateur :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1}.$$

Simplifions le numérateur :

$$u_n + 2 - 2u_n - 1 = 1 - u_n.$$

Donc

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

On peut aussi écrire

$$u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n - 1}{2u_n + 1}.$$

Cette dernière forme sera particulièrement utile pour étudier le signe.

1.d) Démonstration par récurrence du signe de $u_n - 1$

Nous voulons démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - 1 \text{ a le même signe que } (-1)^n.$$

Cela signifie :

$$\begin{cases} u_n - 1 > 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ u_n - 1 < 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

et

$$(-1)^0 = 1 > 0.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n - 1$ ait le même signe que $(-1)^n$.

D'après la question précédente,

$$u_{n+1} - 1 = -\frac{u_n - 1}{2u_n + 1}.$$

Or l'énoncé nous donne

$$u_n > 0.$$

Par conséquent,

$$2u_n + 1 > 0.$$

Diviser par le nombre positif $2u_n + 1$ ne change donc pas le signe. En revanche, le signe “-” placé devant la fraction change le signe.

Ainsi, $u_{n+1} - 1$ a le signe opposé à celui de $u_n - 1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$. Donc $u_{n+1} - 1$ a le signe opposé à $(-1)^n$.

Or

$$(-1)^{n+1} = -(-1)^n.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - 1$$

a le même signe que

$$(-1)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1 \text{ a le même signe que } (-1)^n.}$$

En particulier,

$$\boxed{u_{2n} > 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} < 1.}$$

2.a) Calcul de v_{n+1}

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Au rang $n + 1$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}.$$

Nous connaissons déjà

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1 - u_n}{2u_n + 1}.$$

Calculons maintenant $u_{n+1} + 1$:

$$u_{n+1} + 1 = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1.$$

En mettant au même dénominateur,

$$u_{n+1} + 1 = \frac{u_n + 2 + (2u_n + 1)}{2u_n + 1}.$$

Donc

$$u_{n+1} + 1 = \frac{3u_n + 3}{2u_n + 1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{\frac{1-u_n}{2u_n+1}}{\frac{3u_n+3}{2u_n+1}}.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_n}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

Le facteur $2u_n + 1$ se simplifie :

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_n}{3u_n + 3}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

2.b) Nature de (v_n) et expression de v_n

Partons de l'expression obtenue :

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_n}{3u_n + 3}.$$

Factorisons le dénominateur :

$$3u_n + 3 = 3(u_n + 1).$$

De plus,

$$1 - u_n = -(u_n - 1).$$

Donc

$$v_{n+1} = -\frac{u_n - 1}{3(u_n + 1)}.$$

On fait apparaître v_n :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Or

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$q = -\frac{1}{3}.$$

Calculons son premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1}.$$

Comme $u_0 = 2$,

$$v_0 = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$v_0 = \frac{1}{3}.$$

Pour une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q ,

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

On peut écrire :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

2.c) Expression de u_n et limite

Nous partons de

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Nous voulons isoler u_n .

On multiplie les deux membres par $u_n + 1$:

$$v_n(u_n + 1) = u_n - 1.$$

Développons :

$$v_n u_n + v_n = u_n - 1.$$

Regroupons les termes contenant u_n dans le même membre :

$$v_n u_n - u_n = -1 - v_n.$$

Factorisons par u_n :

$$u_n(v_n - 1) = -(1 + v_n).$$

En multipliant les deux membres par -1 :

$$u_n(1 - v_n) = 1 + v_n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

Nous savons que

$$v_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

En remplaçant v_n par cette expression,

$$u_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}{1 - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}.$$

Pour obtenir une expression sans fractions superposées, multiplions le numérateur et le dénominateur par 3^{n+1} :

$$u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}.$$

Par conséquent,

$$u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}.$$

Détermination de la limite

Nous avons

$$v_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n.$$

Comme

$$\left| -\frac{1}{3} \right| < 1,$$

la suite géométrique $\left(\left(-\frac{1}{3} \right)^n \right)$ tend vers 0.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Or

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$1 + v_n \longrightarrow 1$$

et

$$1 - v_n \longrightarrow 1.$$

Le dénominateur limite est non nul. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

Bilan de l'exercice

Les premiers termes sont

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{4}{5}, \quad u_2 = \frac{14}{13}, \quad u_3 = \frac{40}{41}, \quad u_4 = \frac{122}{121}.$$

La suite oscille autour de 1 :

$$u_{2n} > 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} < 1.$$

La suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

est géométrique, avec

$$v_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}$$

et

$$u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}.$$

Enfin,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 22

Énoncé

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

Démontrer par récurrence double que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = (3^n - 1)/2$$

Correction détaillée

On veut démontrer la propriété suivante :

$$P_n : u_n = (3^n - 1)/2.$$

La relation $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ fait intervenir les deux termes précédents. Pour établir la propriété au rang $n+2$, nous aurons donc besoin de la supposer vraie aux deux rangs consécutifs n et $n+1$.

1. Initialisation

Une récurrence double nécessite ici de vérifier la propriété aux deux premiers rangs : 0 et 1.

Au rang $n = 0$:

$$u_0 = 0.$$

D'autre part :

$$(3^0 - 1)/2 = (1 - 1)/2 = 0/2 = 0.$$

Ainsi, $u_0 = (3^0 - 1)/2$. La propriété est vraie au rang 0.

Au rang $n = 1$:

$$u_1 = 1.$$

D'autre part :

$$(3^1 - 1)/2 = (3 - 1)/2 = 2/2 = 1.$$

Ainsi, $u_1 = (3^1 - 1)/2$. La propriété est vraie au rang 1.

Les deux rangs de départ nécessaires sont donc vérifiés.

2. Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété soit vraie aux deux rangs consécutifs n et $n+1$, c'est-à-dire :

$$u_n = (3^n - 1)/2$$

et

$$u_{n+1} = (3^{n+1} - 1)/2.$$

Nous devons montrer que :

$$u_{n+2} = (3^{n+2} - 1)/2.$$

Partons de la relation de récurrence donnée :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Remplaçons u_{n+1} et u_n par les expressions données par les hypothèses de récurrence :

$$u_{n+2} = 4[(3^{n+1} - 1)/2] - 3[(3^n - 1)/2].$$

Développons chaque produit :

$$u_{n+2} = [4 \cdot 3^{n+1} - 4]/2 - [3 \cdot 3^n - 3]/2.$$

Comme $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, on obtient :

$$u_{n+2} = [4 \cdot 3^{n+1} - 4]/2 - [3^{n+1} - 3]/2.$$

Les deux fractions ont le même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= [4 \cdot 3^{n+1} - 4 - (3^{n+1} - 3)]/2 \\ &= [4 \cdot 3^{n+1} - 4 - 3^{n+1} + 3]/2 \\ &= [4 \cdot 3^{n+1} - 3^{n+1} - 1]/2 \\ &= [(4 - 1)3^{n+1} - 1]/2 \\ &= [3 \cdot 3^{n+1} - 1]/2. \end{aligned}$$

Or $3 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+2}$. Donc :

$$u_{n+2} = (3^{n+2} - 1)/2.$$

Nous avons obtenu exactement la propriété au rang $n+2$. L'hérédité est démontrée.

3. Conclusion

La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. De plus, si elle est vraie aux deux rangs consécutifs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$.

Par le principe de récurrence double :

$$\text{Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, \quad u_n = (3^n - 1)/2.$$

Vérification sur les premiers termes

Cette vérification permet de contrôler concrètement la formule obtenue.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

$$u_2 = 4u_1 - 3u_0 = 4 \times 1 - 3 \times 0 = 4.$$

$$u_3 = 4u_2 - 3u_1 = 4 \times 4 - 3 \times 1 = 13.$$

$$u_4 = 4u_3 - 3u_2 = 4 \times 13 - 3 \times 4 = 40.$$

Avec la formule :

$$(3^2 - 1)/2 = 4, \quad (3^3 - 1)/2 = 13, \quad (3^4 - 1)/2 = 40.$$

On retrouve bien les mêmes termes : 0, 1, 4, 13, 40.

Exercice 23

Énoncé

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$; $v_1 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

Démontrer par récurrence double que, pour tout entier naturel n :

$$v_n \leq (5/3)^n$$

Correction détaillée

On veut démontrer, pour tout entier naturel n , la propriété :

$$P_n : v_n \leq (5/3)^n.$$

La relation $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ fait intervenir deux termes consécutifs. Pour démontrer la propriété au rang $n+2$, nous utiliserons donc la propriété aux rangs n et $n+1$: il s'agit d'une récurrence double.

1. Initialisation

Nous devons vérifier la propriété aux deux premiers rangs : 0 et 1.

Au rang $n = 0$:

$$v_0 = 1.$$

D'autre part, $(5/3)^0 = 1$. Ainsi :

$$v_0 = 1 \leq 1 = (5/3)^0.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Au rang $n = 1$:

$$v_1 = 1.$$

Or $(5/3)^1 = 5/3$ et $1 \leq 5/3$. Donc :

$$v_1 = 1 \leq 5/3 = (5/3)^1.$$

La propriété est vraie au rang 1. Les deux rangs de départ sont donc vérifiés.

2. Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété soit vraie aux deux rangs consécutifs n et $n+1$. Nous supposons donc :

$$v_n \leq (5/3)^n$$

et

$$v_{n+1} \leq (5/3)^{n+1}.$$

Nous devons démontrer :

$$v_{n+2} \leq (5/3)^{n+2}.$$

Partons de la relation de récurrence :

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

En utilisant les deux hypothèses de récurrence :

$$v_{n+2} \leq (5/3)^{n+1} + (5/3)^n.$$

Mettons $(5/3)^n$ en facteur :

$$v_{n+2} \leq (5/3)^n [(5/3) + 1].$$

Calculons la parenthèse :

$$5/3 + 1 = 5/3 + 3/3 = 8/3.$$

Donc :

$$v_{n+2} \leq (8/3)(5/3)^n.$$

Il reste à comparer ce majorant à $(5/3)^{n+2}$. Or :

$$(5/3)^{n+2} = (5/3)^n (5/3)^2 = (25/9)(5/3)^n.$$

Comparons $8/3$ et $25/9$:

$$8/3 = 24/9 \leq 25/9.$$

Comme $(5/3)^n$ est strictement positif, on peut multiplier cette inégalité par $(5/3)^n$ sans changer son sens :

$$(8/3)(5/3)^n \leq (25/9)(5/3)^n = (5/3)^{n+2}.$$

Nous avons déjà $v_{n+2} \leq (8/3)(5/3)^n$. Par conséquent :

$$v_{n+2} \leq (5/3)^{n+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

3. Conclusion

La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. De plus, si elle est vraie aux deux rangs consécutifs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$.

Par le principe de récurrence double :

$$\text{Pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}, \quad v_n \leq (5/3)^n.$$

Vérification sur les premiers termes

Cette vérification n'est pas la démonstration ; elle permet simplement de voir concrètement l'inégalité.

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 1,$$

$$v_2 = v_1 + v_0 = 2,$$

$$v_3 = v_2 + v_1 = 3,$$

$$v_4 = v_3 + v_2 = 5,$$

$$v_5 = v_4 + v_3 = 8.$$

Et les puissances correspondantes valent approximativement :

$$(5/3)^0 = 1 ; \quad (5/3)^1 \approx 1,67 ; \quad (5/3)^2 \approx 2,78 ; \quad (5/3)^3 \approx 4,63 ; \quad (5/3)^4 \approx 7,72 ; \\ (5/3)^5 \approx 12,86.$$

On retrouve bien : $1 \leq 1$, $1 \leq 1,67$, $2 \leq 2,78$, $3 \leq 4,63$, $5 \leq 7,72$ et $8 \leq 12,86$.

Exercice 24

Suites définies par récurrence – suite auxiliaire – sommes

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{1 + 2u_n}.$$

On admet que cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Écrire en langage Python une fonction `terme` telle que, pour tout entier naturel n , `terme(n)` renvoie la valeur de u_n .
3. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{5x}{1 + 2x}$$

définie sur $[0; +\infty[$.

- a. Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- b. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2.$$

- c. Quelles propriétés de la suite (u_n) a-t-on démontrées à la question précédente ?

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{2 - u_n}.$$

- a. Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n .

5. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2 \times 5^{n-1}}{1 + 5^{n-1}}.$$

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- a. Calculer S_0 , S_1 et S_2 .
- b. Montrer que la suite (S_n) est croissante. La suite (S_n) est-elle minorée ?
- c. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \geq n$. La suite (S_n) est-elle majorée ?

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Correction détaillée

1. Calcul de u_1 et u_2

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{1 + 2u_n}.$$

Pour calculer un terme, on remplace simplement u_n par le terme précédent.

Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{5u_0}{1 + 2u_0} \\ &= \frac{5 \times \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{u_1 = 1}.$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{5u_1}{1 + 2u_1} \\ &= \frac{5 \times 1}{1 + 2 \times 1} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_2 = \frac{5}{3}}.$$

2. Fonction Python donnant le terme u_n

On part de $u_0 = \frac{1}{3}$, puis on applique la relation de récurrence exactement n fois. Une variable u contient successivement $u_0, u_1, \dots, u_n$.

```
def terme(n):
    u = 1 / 3
    for k in range(n):
        u = 5 * u / (1 + 2 * u)
    return u
```

Vérification : si $n = 0$, la boucle n'est pas exécutée et la fonction renvoie $u_0 = \frac{1}{3}$. Si $n = 1$, la boucle est exécutée une fois et renvoie u_1 . Plus généralement, après n passages dans la boucle, la variable u contient u_n .

3. Étude de la fonction f et conséquences sur (u_n)

On considère

$$f(x) = \frac{5x}{1 + 2x}, \quad x \in [0; +\infty[.$$

On remarque que la relation de récurrence s'écrit simplement

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

3.a. Montrer que f est strictement croissante

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ car, pour $x \geq 0$,

$$1 + 2x \geq 1 > 0,$$

donc son dénominateur ne s'annule pas.

À l'aide de la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(1+2x) - 5x \times 2}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{5 + 10x - 10x}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{5}{(1+2x)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \geq 0$, on a $(1+2x)^2 > 0$, donc

$$f'(x) > 0.$$

Par conséquent,

$$f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[.$$

3.b. Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la propriété

$$P_n : \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2.$$

Nous allons démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, nous savons que

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

Ainsi,

$$0 \leq \frac{1}{3} \leq 1 < 2.$$

Donc

$$0 \leq u_0 \leq u_1 < 2.$$

La propriété P_0 est donc vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel n , la propriété P_n soit vraie, c'est-à-dire

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2.$$

Nous devons montrer

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 2.$$

D'abord, l'hypothèse de récurrence donne directement

$$u_{n+1} \geq 0.$$

Ensuite, comme $u_n \leq u_{n+1}$ et comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, on peut appliquer f aux deux membres sans changer le sens de l'inégalité :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Or

$$f(u_n) = u_{n+1} \quad \text{et} \quad f(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_{n+2}}.$$

Il reste à montrer que $u_{n+2} < 2$. Puisque $0 \leq u_{n+1} < 2$, le dénominateur $1 + 2u_{n+1}$ est strictement positif. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+2} < 2 &\iff \frac{5u_{n+1}}{1 + 2u_{n+1}} < 2 \\ &\iff 5u_{n+1} < 2(1 + 2u_{n+1}) \\ &\iff 5u_{n+1} < 2 + 4u_{n+1} \\ &\iff u_{n+1} < 2. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est précisément contenue dans l'hypothèse de récurrence. Ainsi,

$$u_{n+2} < 2.$$

Nous avons donc obtenu

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 2.$$

La propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La propriété est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2.}$$

3.c. Propriétés démontrées pour la suite (u_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$u_n \leq u_{n+1}$$

montre que la suite (u_n) est **croissante**.

De plus,

$$0 \leq u_n < 2.$$

Ainsi, la suite est minorée par 0 et majorée par 2. Elle est donc bornée.

En particulier, une suite croissante et majorée est convergente. On peut donc déjà affirmer que (u_n) admet une limite finie, même si sa valeur sera déterminée plus loin.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante, minorée par 0 et majorée par 2.}}$$

4. Étude de la suite auxiliaire (v_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{2 - u_n}.$$

4.a. Justifier que v_n est bien défini

Pour que v_n soit défini, il faut que son dénominateur soit non nul :

$$2 - u_n \neq 0.$$

Or, d'après la question 3.b, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < 2.$$

Par conséquent,

$$2 - u_n > 0,$$

et en particulier $2 - u_n \neq 0$.

Donc

$$v_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4.b. Montrer que (v_n) est géométrique

Calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2 - u_{n+1}}.$$

Or

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{1 + 2u_n}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n}{1 + 2u_n}}{2 - \frac{5u_n}{1 + 2u_n}}.$$

Mettons le dénominateur de cette grande fraction au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{5u_n}{1 + 2u_n} &= \frac{2(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n} - \frac{5u_n}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{2 + 4u_n - 5u_n}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{2 - u_n}{1 + 2u_n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{\frac{5u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{2 - u_n}{1 + 2u_n}} \\ &= \frac{5u_n}{1 + 2u_n} \times \frac{1 + 2u_n}{2 - u_n} \\ &= \frac{5u_n}{2 - u_n} \\ &= 5 \frac{u_n}{2 - u_n} \\ &= 5v_n. \end{aligned}$$

Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 5v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5.

Calculons son premier terme :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0}{2 - u_0} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

La formule d'une suite géométrique donne alors

$$v_n = v_0 \times 5^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{5} \times 5^n \\ &= 5^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 5^{n-1}.$$

Cette formule est également valable pour $n = 0$, car $5^{-1} = \frac{1}{5} = v_0$.

5. Expression explicite de u_n et limite

Nous savons que

$$v_n = \frac{u_n}{2 - u_n} \quad \text{et} \quad v_n = 5^{n-1}.$$

Donc

$$\frac{u_n}{2 - u_n} = 5^{n-1}.$$

Réolvons cette égalité pour isoler u_n . Comme $2 - u_n > 0$, on peut multiplier par $2 - u_n$:

$$\begin{aligned} u_n &= 5^{n-1}(2 - u_n) \\ &= 2 \times 5^{n-1} - 5^{n-1}u_n. \end{aligned}$$

On rassemble les termes contenant u_n dans le membre de gauche :

$$u_n + 5^{n-1}u_n = 2 \times 5^{n-1}.$$

On factorise par u_n :

$$u_n(1 + 5^{n-1}) = 2 \times 5^{n-1}.$$

Puisque $1 + 5^{n-1} > 0$, on peut diviser par cette quantité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2 \times 5^{n-1}}{1 + 5^{n-1}}.$$

Pour calculer la limite, divisons le numérateur et le dénominateur par 5^{n-1} :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2 \times 5^{n-1}}{1 + 5^{n-1}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{5^{n-1}} + 1}. \end{aligned}$$

Or $5^{n-1} \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{1}{5^{n-1}} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{2}{0 + 1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

6. Étude de la suite des sommes partielles (S_n)

On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

6.a. Calcul de S_0 , S_1 et S_2

Par définition,

$$S_0 = u_0 = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$S_0 = \frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 \\ &= \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_1 = \frac{4}{3}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_2 = 3}.$$

6.b. Croissance et minoration de (S_n)

Pour étudier le sens de variation de (S_n) , calculons la différence entre deux termes consécutifs.

On a

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

et

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (u_0 + \cdots + u_n) \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

D'après la question 3.b, $u_{n+1} \geq 0$. Par conséquent,

$$S_{n+1} - S_n \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$S_{n+1} \geq S_n.$$

Donc

$$\boxed{(S_n) \text{ est croissante.}}$$

Comme (S_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \geq S_0 = \frac{1}{3}.$$

La suite (S_n) est donc minorée, par exemple par $\frac{1}{3}$ (et également par 0).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \geq \frac{1}{3}.$$

6.c. Montrer que $u_n \geq 1$ pour $n \geq 1$, puis que $S_n \geq n$

Nous avons montré que (u_n) est croissante. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \geq u_1.$$

Or $u_1 = 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 1.$$

Considérons maintenant S_n .

Pour $n = 0$,

$$S_0 = \frac{1}{3} \geq 0,$$

donc $S_0 \geq 0 = n$.

Pour $n \geq 1$,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Comme $u_0 = \frac{1}{3} > 0$ et comme $u_k \geq 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \sum_{k=1}^n u_k \\ &\geq \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{3} + n \\ &\geq n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \geq n.$$

Cette inégalité permet de décider si (S_n) est majorée. En effet, les entiers n peuvent devenir aussi grands que l'on veut. Puisque

$$S_n \geq n,$$

les termes S_n deviennent eux aussi arbitrairement grands. Il ne peut donc exister aucun réel M tel que $S_n \leq M$ pour tout n .

Ainsi,

$$(S_n) \text{ n'est pas majorée.}$$

Enfin, comme

$$S_n \geq n \quad \text{et} \quad n \longrightarrow +\infty,$$

on en déduit, par comparaison, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Bilan des résultats

$$u_1 = 1,$$

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 2,$$

$$v_n = 5^{n-1},$$

$$S_0 = \frac{1}{3},$$

$$S_n \geq n,$$

$$u_2 = \frac{5}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,$$

$$u_n = \frac{2 \times 5^{n-1}}{1 + 5^{n-1}},$$

$$S_1 = \frac{4}{3}, \quad S_2 = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 21 – Corrigé disponible

Suite définie par récurrence et changement de variable

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $] - 2; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2},$$

alors on a, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1.
 - a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparaître les traits de construction.
 - b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2.
 - a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a $u_n - 1 > 0$.
 - b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n .

Pour tout nombre entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
- b) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Correction détaillée

1. Lecture graphique et premières conjectures

1.a) Construction de u_1 , u_2 et u_3

La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ permet de construire graphiquement les termes successifs. Le principe est toujours le même :

- 1° on part de u_n sur l'axe des abscisses ;
- 2° on monte verticalement jusqu'à la courbe $\mathcal{C}$: l'ordonnée obtenue est $f(u_n) = u_{n+1}$;
- 3° on va horizontalement jusqu'à la droite $\Delta : y = x$; sur cette droite, l'abscisse est égale à l'ordonnée, donc on récupère u_{n+1} comme nouvelle abscisse ;
- 4° on recommence pour obtenir le terme suivant.

Pour contrôler précisément la lecture du graphique, calculons les trois premiers termes.

À partir de $u_0 = 5$:

$$u_1 = \frac{4u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{4 \times 5 - 1}{5 + 2} = \frac{20 - 1}{7} = \boxed{\frac{19}{7}} \approx 2,714.$$

Puis

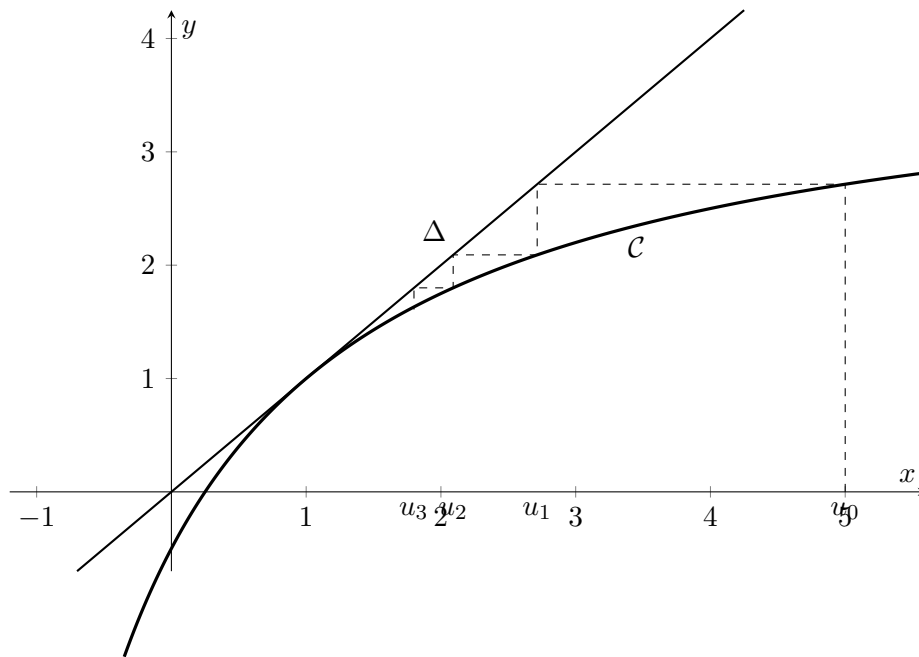
$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4u_1 - 1}{u_1 + 2} = \frac{4 \times \frac{19}{7} - 1}{\frac{19}{7} + 2} \\ &= \frac{\frac{76}{7} - \frac{7}{7}}{\frac{19}{7} + \frac{14}{7}} = \frac{\frac{69}{7}}{\frac{33}{7}} = \frac{69}{33} = \boxed{\frac{23}{11}} \approx 2,091. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{4u_2 - 1}{u_2 + 2} = \frac{4 \times \frac{23}{11} - 1}{\frac{23}{11} + 2} \\ &= \frac{\frac{92}{11} - \frac{11}{11}}{\frac{23}{11} + \frac{22}{11}} = \frac{\frac{81}{11}}{\frac{45}{11}} = \frac{81}{45} = \boxed{\frac{9}{5}} = 1,8. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{u_0 = 5, \quad u_1 = \frac{19}{7}, \quad u_2 = \frac{23}{11}, \quad u_3 = \frac{9}{5}.}$$



1.b) Conjectures

Les valeurs obtenues donnent

$$5 > \frac{19}{7} > \frac{23}{11} > \frac{9}{5} > 1.$$

Graphiquement, les termes semblent se rapprocher de 1 tout en restant au-dessus de 1.

On peut donc conjecturer que :

- la suite (u_n) est **strictement décroissante** ;
- elle est **minorée par 1** ;
- elle est donc susceptible de converger, et le graphique suggère que sa limite est 1.

Conjectures : (u_n) est strictement décroissante et converge vers 1.

2. Validation des conjectures

2.a) Démontrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$

On veut montrer la propriété

$$P_n : \quad u_n - 1 > 0,$$

c'est-à-dire, de façon équivalente,

$$u_n > 1.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = 5$. Ainsi

$$u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0.$$

La propriété P_0 est donc vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel n ,

$$u_n - 1 > 0.$$

Nous devons montrer que $u_{n+1} - 1 > 0$.

À partir de la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 \\ &= \frac{4u_n - 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} \\ &= \boxed{\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n - 1 > 0$. De plus, $u_n > 1$, donc

$$u_n + 2 > 3 > 0.$$

Le numérateur $3(u_n - 1)$ est donc strictement positif et le dénominateur $u_n + 2$ est strictement positif. Par conséquent,

$$u_{n+1} - 1 > 0.$$

Ainsi, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1 > 0.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.}$$

2.b) Validation du sens de variation et de la convergence

Pour étudier le sens de variation, calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Or

$$-u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n^2 - 2u_n + 1) = -(u_n - 1)^2.$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}}.$$

D'après la question 2.a, $u_n > 1$. On en déduit :

$$(u_n - 1)^2 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 2 > 0.$$

Ainsi

$$-\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0,$$

donc

$$u_{n+1} < u_n.$$

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc **strictement décroissante**.

Par ailleurs, la question 2.a donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 1.$$

La suite est donc **minorée par 1**.

Une suite décroissante et minorée est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Comme $u_n > 1$ pour tout n , on a nécessairement $\ell \geq 1$.

Déterminons maintenant cette limite. La fonction

$$f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$$

est continue sur $[1; +\infty[$ puisque son dénominateur n'y est jamais nul. Or $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite,

$$\ell = \frac{4\ell - 1}{\ell + 2}.$$

Puisque $\ell \geq 1$, on a $\ell + 2 \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}\ell(\ell + 2) &= 4\ell - 1, \\ \ell^2 + 2\ell &= 4\ell - 1, \\ \ell^2 - 2\ell + 1 &= 0, \\ (\ell - 1)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\ell = 1.$$

Les conjectures de la question 1.b sont validées :

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

3. Étude par changement de variable

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

Cette quantité est bien définie car, d'après la question 2.a, $u_n - 1 > 0$, donc en particulier $u_n - 1 \neq 0$.

3.a) Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

Calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

Nous avons déjà établi que

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{\frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}} \\ &= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)}. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, écrivons

$$u_n + 2 = (u_n - 1) + 3.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{(u_n - 1) + 3}{3(u_n - 1)} \\ &= \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} + \frac{3}{3(u_n - 1)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{3} + v_n. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}}.$$

Par définition, (v_n) est donc une suite arithmétique de raison

$$\boxed{r = \frac{1}{3}}.$$

3.b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Commençons par calculer le premier terme de (v_n) :

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{5 - 1} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Une suite arithmétique de premier terme v_0 et de raison r vérifie

$$v_n = v_0 + nr.$$

Ici,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{4} + n \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{n}{3} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{4n}{12} \\ &= \boxed{\frac{4n + 3}{12}}. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à u_n . Par définition,

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

Donc

$$u_n - 1 = \frac{1}{v_n}.$$

Comme $v_n = \frac{4n+3}{12}$,

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{1}{\frac{4n+3}{12}} \\ &= \frac{12}{4n+3}. \end{aligned}$$

D'où

$$u_n = 1 + \frac{12}{4n+3}.$$

On peut également écrire cette expression sous la forme d'une seule fraction :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{4n+3}{4n+3} + \frac{12}{4n+3} \\ &= \frac{4n+15}{4n+3}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{4n+3}{12}$$

et

$$u_n = 1 + \frac{12}{4n+3} = \frac{4n+15}{4n+3}.$$

3.c) Limite de (u_n)

Nous disposons maintenant de l'expression explicite

$$u_n = 1 + \frac{12}{4n+3}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$4n+3 \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{12}{4n+3} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + 0 = \boxed{1}.$$

Cette seconde méthode confirme donc exactement le résultat obtenu à la question 2.b.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

Bilan

Les résultats essentiels de l'exercice sont :

$$u_n > 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0,$$

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante et minorée par } 1,$$

$$v_n = \frac{4n+3}{12}, \quad u_n = \frac{4n+15}{4n+3},$$

et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 13

Détermination de limites de suites

Énoncé

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2n+1}{3n+5}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n - \sqrt{n+3}.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = -1 + \frac{\cos n}{n}.$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}.$$

Correction détaillée

a) $u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$

Nous cherchons la limite de

$$u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$. Pour faire apparaître les termes qui déterminent le comportement de la fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par n :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n+1}{3n+5} \\ &= \frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{3n+5}{n}} \\ &= \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{3n}{n} + \frac{5}{n}} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{5}{n}}. \end{aligned}$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{n} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad 3 + \frac{5}{n} \rightarrow 3.$$

Comme la limite du dénominateur est $3 \neq 0$, on peut utiliser la règle de passage à la limite dans un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3}$$

b) $u_n = n - \sqrt{n+3}$

Nous étudions maintenant

$$u_n = n - \sqrt{n+3}.$$

Ici, $n \rightarrow +\infty$ et $\sqrt{n+3} \rightarrow +\infty$. Il faut donc comparer leur vitesse de croissance. Nous factorisons par n :

$$\begin{aligned} u_n &= n - \sqrt{n+3} \\ &= n \left(1 - \frac{\sqrt{n+3}}{n} \right). \end{aligned}$$

Étudions précisément le quotient

$$\frac{\sqrt{n+3}}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, $n > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+3}}{n} &= \sqrt{\frac{n+3}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \longrightarrow 0,$$

et, par continuité de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$,

$$\frac{\sqrt{n+3}}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$1 - \frac{\sqrt{n+3}}{n} \longrightarrow 1.$$

Pour rendre la conclusion entièrement explicite, puisque cette dernière expression tend vers 1, elle est, à partir d'un certain rang, par exemple supérieure à $\frac{1}{2}$. Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$1 - \frac{\sqrt{n+3}}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$u_n = n \left(1 - \frac{\sqrt{n+3}}{n} \right) \geq \frac{n}{2}.$$

Or

$$\frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Par comparaison, on obtient donc

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n+3}) = +\infty$$

c) $u_n = -1 + \frac{\cos n}{n}$

Nous avons

$$u_n = -1 + \frac{\cos n}{n}.$$

La difficulté est de déterminer la limite de $\frac{\cos n}{n}$. Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

Comme $n > 0$, nous pouvons diviser les trois membres par n sans changer le sens des inégalités :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or

$$-\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Le terme $\frac{\cos n}{n}$ est donc encadré entre deux suites qui ont la même limite 0. D'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{\cos n}{n} \longrightarrow 0.$$

Nous revenons alors à u_n :

$$u_n = -1 + \frac{\cos n}{n} \longrightarrow -1 + 0 = -1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{\cos n}{n} \right) = -1$$

d) $u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}$

Nous considérons

$$u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n}.$$

Les quatre termes 4^n , 3^n et 2^n deviennent très grands lorsque n augmente. Le terme 4^n est présent au numérateur et au dénominateur. Nous divisons donc toute la fraction par 4^n .

Comme $4^n > 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n} \\ &= \frac{\frac{4^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n} + \frac{2^n}{4^n}} \\ &= \frac{1 - \frac{3^n}{4^n}}{1 + \frac{2^n}{4^n}}. \end{aligned}$$

À l'aide de la propriété

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

on obtient

$$\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{2^n}{4^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Rappelons que si q est un réel tel que $|q| < 1$, alors

$$q^n \longrightarrow 0.$$

Ici,

$$0 < \frac{3}{4} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 1$$

et

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 1.$$

La limite du dénominateur étant $1 \neq 0$, nous pouvons passer à la limite dans le quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n} = 1$$

Bilan

Les quatre limites sont donc :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3},$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1,$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$