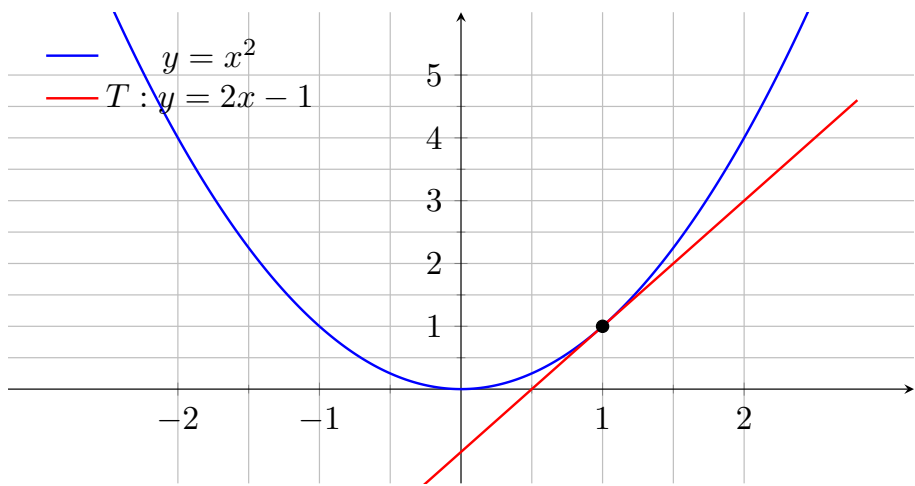


Cours complet de dérivation

2^e année du Baccalauréat

Filière Sciences Mathématiques - Système marocain

Définitions, dérivabilité à droite et à gauche, tangentes, règles de calcul, composition, fonction réciproque, arctangente, racines n-ièmes, puissances rationnelles, applications aux variations et problèmes d'optimisation.



Document pédagogique structuré et progressif

Table des matières

1 **Rappels et définition du nombre dérivé** 2

 1.1 Taux d'accroissement 2

 1.2 Dérivabilité à droite et à gauche 3

 1.3 Dérivabilité et continuité 3

2 **Interprétation géométrique et tangentes** 4

 2.1 Pente d'une sécante et pente de la tangente 4

 2.2 Demi-tangentes 4

 2.3 Tangente verticale 4

3 **Approximation affine locale** 5

4 **Fonction dérivée et dérivées usuelles** 5

 4.1 Tableau des dérivées usuelles 5

5 **Règles de calcul des dérivées** 6

6 **Dérivation d'une fonction composée** 6

7 **Dérivée de la fonction réciproque** 7

8 **La fonction arctangente** 7

9 **Racines n-ièmes et puissances rationnelles** 8

10 **Dérivée et variations d'une fonction** 8

11 **Extrema et optimisation** 9

12 **Position relative d'une courbe et de sa tangente** 9

13 **Exercices d'entraînement** 10

14 **Corrections des exercices** 12

15 **Synthèse générale** 13

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- calculer un nombre dérivé à partir de la définition ;
- étudier la dérivabilité à droite et à gauche ;
- interpréter géométriquement le nombre dérivé ;
- déterminer une tangente ou des demi-tangentes ;
- utiliser correctement les formules de dérivation ;
- dériver une fonction composée et une fonction réciproque ;
- étudier les variations d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée ;
- résoudre des problèmes d'optimisation et de géométrie analytique.

1 Rappels et définition du nombre dérivé

1.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a . Pour $x \neq a$, le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre a et x .

Si l'on pose $x = a + h$, avec $h \neq 0$, ce quotient devient

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Définition

La fonction f est dite **dérivable en** a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivé de** f **en** a et se note $f'(a)$.

De façon équivalente :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Calcul direct par la définition

Soit $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Calculons $f'(2)$.

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + h)^2 + 3(2 + h) - 1 - (4 + 6 - 1)}{h}.$$

En développant :

$$\frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 1 - 9}{h} = \frac{7h + h^2}{h} = 7 + h.$$

Donc

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + h) = 7.$$

1.2 Dérivabilité à droite et à gauche

Définition

On dit que f est dérivable à droite en a si

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie.

On dit que f est dérivable à gauche en a si

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie.

Théorème / Propriété

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et

$$f'_d(a) = f'_g(a).$$

Une fonction continue mais non dérivable

Pour $f(x) = |x|$ en 0 :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Les deux nombres dérivés unilatéraux sont différents. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

Attention

La continuité en un point ne suffit pas pour assurer la dérivabilité. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

1.3 Dérivabilité et continuité

Théorème / Propriété

Si une fonction f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Démonstration. Pour $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Quand $x \rightarrow a$, le premier facteur tend vers $f'(a)$ et le second vers 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0,$$

d'où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2 Interprétation géométrique et tangentes

2.1 Pente d'une sécante et pente de la tangente

Soient $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$. Le coefficient directeur de la sécante (AM) est

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lorsque M se rapproche de A , cette pente tend vers $f'(a)$.

Théorème / Propriété

Si f est dérivable en a , la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple

Pour $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $a = 1$:

$$f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2, \quad f(1) = 1.$$

La tangente est donc

$$T : y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

2.2 Demi-tangentes

Théorème / Propriété

Si f est dérivable à droite en a , la courbe admet une demi-tangente à droite d'équation

$$y = f'_d(a)(x - a) + f(a), \quad x \geq a.$$

Si f est dérivable à gauche en a , la courbe admet une demi-tangente à gauche d'équation

$$y = f'_g(a)(x - a) + f(a), \quad x \leq a.$$

2.3 Tangente verticale

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty,$$

alors f n'est pas dérivable en a au sens usuel, mais la courbe admet une tangente verticale d'équation

$$x = a.$$

Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 :

$$\frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

La courbe admet une demi-tangente verticale à droite d'équation $x = 0$.

3 Approximation affine locale

Théorème / Propriété

Si f est dérivable en a , alors au voisinage de a ,

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$

En posant $x = a + h$:

$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$

pour h suffisamment petit.

Approximation de $\sqrt{4,04}$

Prenons $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$. Alors

$f(4) = 2, \quad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$

Comme $4,04 = 4 + 0,04$,

$\sqrt{4,04} \approx 2 + 0,04 \times \frac{1}{4} = 2,01.$

4 Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , la fonction

$x \longmapsto f'(x)$

s'appelle la **fonction dérivée** de f sur I .

4.1 Tableau des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de dérivabilité
c	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbb{R}$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q})$	rx^{r-1}	$]0, +\infty[$

5 Règles de calcul des dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème / Propriété

$$(u + v)' = u' + v', \quad (\lambda u)' = \lambda u'.$$
$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Si v ne s'annule pas :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Si $u > 0$:

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemple

Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

Sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 1)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}.$$

6 Dérivation d'une fonction composée

Théorème / Propriété

Soit u dérivable en a et g dérivable en $u(a)$. Alors $g \circ u$ est dérivable en a et

$$(g \circ u)'(a) = g'(u(a))u'(a).$$

Sur un intervalle :

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) u'.$$

Fonction	Dérivée
$[u(x)]^n$	$nu'(x)[u(x)]^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\sin(u(x))$	$u'(x) \cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x) \sin(u(x))$
$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1 + [u(x)]^2}$

Exemple

Pour $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$, on pose $u(x) = 2x^2 + 1$. Alors $u'(x) = 4x$, donc

$$f'(x) = 4x \cos(2x^2 + 1).$$

7 Dérivée de la fonction réciproque**Théorème / Propriété**

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I , et soit $J = f(I)$. Si f est dérivable en $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Plus généralement, si f' ne s'annule pas sur I ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in J.$$

Exemple

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0,$$

donc f est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 2$,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

8 La fonction arctangente

La fonction $\tan$ est strictement croissante et continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec image $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée $\arctan$.

Théorème / Propriété

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Si u est dérivable sur un intervalle I , alors

$$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1 + [u(x)]^2}.$$

Exemple

Pour $f(x) = \arctan(2x - 1)$,

$$f'(x) = \frac{2}{1 + (2x - 1)^2}.$$

9 Racines n-ièmes et puissances rationnelles

Théorème / Propriété

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}}.$$

Si u est dérivable et strictement positive :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n[u(x)]^{(n-1)/n}}.$$

Théorème / Propriété

Pour tout rationnel r , la fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Si $u > 0$ et u est dérivable :

$$(u^r)' = ru'u^{r-1}.$$

Exemple

Soit $f(x) = (3x^2 - x + 2)^{5/3}$. Comme $3x^2 - x + 2 > 0$ pour tout x , f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{5}{3}(6x - 1)(3x^2 - x + 2)^{2/3}.$$

10 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème / Propriété

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Attention

Le fait que $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour conclure que f possède un extremum en a . Il faut étudier le signe de f' de part et d'autre de a .

Méthode pour dresser un tableau de variations

1. Déterminer le domaine de définition et les intervalles d'étude.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Factoriser ou simplifier $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$.
5. Calculer les valeurs et limites nécessaires.

6. Construire le tableau de variations.

Exemple

Étudions $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Ainsi $f' > 0$ sur $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $f' < 0$ sur $] - 1, 1[$. De plus $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

11 Extrema et optimisation

Théorème / Propriété

Si f est dérivable en un point intérieur a de son domaine et si f admet un extremum local en a , alors

$$f'(a) = 0.$$

La réciproque est fausse en général.

Résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir une variable et préciser son intervalle.
2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de cette variable.
3. Calculer la dérivée.
4. Étudier les variations.
5. Comparer éventuellement les valeurs aux bornes.
6. Interpréter le résultat dans le contexte du problème.

Rectangle d'aire maximale

Un rectangle a un périmètre égal à 20. Si ses côtés sont x et $10 - x$, avec $0 < x < 10$, son aire vaut

$$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Alors

$$A'(x) = -2x + 10.$$

L'aire croît sur $]0, 5]$ puis décroît sur $[5, 10[$. Elle est maximale pour $x = 5$. Le rectangle optimal est donc un carré de côté 5.

12 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente T en a , on étudie le signe de

$$D(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)].$$

— Si $D(x) > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.

— Si $D(x) < 0$, la courbe est au-dessous de la tangente.

Exemple

Pour $f(x) = x^2$ et la tangente en $a = 1$, $T(x) = 2x - 1$. Alors

$$f(x) - T(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0.$$

La parabole est donc au-dessus de sa tangente en tout point.

13 Exercices d'entraînement

Exercice 1 - Définition

Calculer par la définition le nombre dérivé de $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en $a = 3$.

Exercice 2 - Dérivabilité d'une fonction par morceaux

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 1, \\ \frac{3x+1}{x+1}, & x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

Exercice 3 - Tangente

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

1. Déterminer son domaine de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 2$.

Exercice 4 - Composition

Dériver les fonctions suivantes sur leurs domaines de dérivabilité :

$$f(x) = \sin(3x^2 - 1), \quad g(x) = \sqrt{2x^2 + x + 3}, \quad h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 5 - Variations

Étudier les variations de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

sur son domaine de définition.

Exercice 6 - Fonction réciproque

Soit $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $(f^{-1})'(2)$.
3. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 7 - Optimisation

On découpe dans les quatre coins d'une feuille carrée de côté 12 des carrés de côté x , puis on replie pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprimer le volume $V(x)$.
2. Déterminer l'intervalle de variation de x .
3. Déterminer la valeur de x qui maximise le volume.

14 Corrections des exercices

Correction 1

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 4 - (9 - 6 + 4)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Donc $f'(3) = 4$.

Correction 2

La continuité en 1 impose

$$1 + a + b = \frac{4}{2} = 2,$$

donc $a + b = 1$. La dérivée à gauche vaut $2 + a$. La dérivée à droite de $\frac{3x+1}{x+1}$ vaut

$$\frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2},$$

donc en 1 elle vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi

$$2 + a = \frac{1}{2} \implies a = -\frac{3}{2}.$$

Puis $b = 1 - a = \frac{5}{2}$.

Correction 3

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

En 2, $f(2) = 3$ et $f'(2) = -2$. Donc

$$T : y = -2(x - 2) + 3 = -2x + 7.$$

Correction 4

$$f'(x) = 6x \cos(3x^2 - 1).$$

Comme $2x^2 + x + 3 > 0$ pour tout x ,

$$g'(x) = \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x + 3}}.$$

Pour $x \neq 0$,

$$h'(x) = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Correction 5

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

Les racines du numérateur sont $-1 \pm \sqrt{2}$. Comme le dénominateur est positif, le signe de f' est celui de $x^2 + 2x - 1$. On en déduit les intervalles de croissance et de décroissance en tenant compte de la coupure en -1 .

Correction 6

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

Donc f est strictement croissante. De plus ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$, donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 2$,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

Comme $f(0) = 0$,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Correction 7

La base de la boîte mesure $12 - 2x$ et la hauteur vaut x . Ainsi

$$V(x) = x(12 - 2x)^2, \quad 0 < x < 6.$$

On développe ou on dérive directement :

$$V'(x) = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x).$$

Sur $]0, 6[$, le facteur $12 - 2x$ est positif. Donc V' change de signe en $x = 2$: positif avant 2, négatif après 2. Le volume est maximal pour

$x = 2$.

Le volume maximal vaut

$$V(2) = 2 \times 8^2 = 128.$$

15 Synthèse générale

Notion	Résultat essentiel
Nombre dérivé	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Tangente	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$
Continuité	Dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a
Somme	$(u + v)' = u' + v'$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Composition	$(g \circ u)' = (g' \circ u)u'$
Réciproque	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
Arctangente	$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
Puissance rationnelle	$(u^r)' = ru'u^{r-1}$, si $u > 0$
Variations	Le signe de f' détermine le sens de variation de f

Erreurs fréquentes à éviter

- Oublier de préciser le domaine de dérivabilité.
- Dériver un quotient sans vérifier que le dénominateur est non nul.
- Écrire $(uv)' = u'v'$ au lieu de $u'v + uv'$.
- Oublier le facteur u' dans une fonction composée.
- Conclure à un extremum uniquement parce que $f'(a) = 0$.
- Confondre dérivabilité et continuité.
- Utiliser une formule de puissance rationnelle sans vérifier la positivité de la base lorsque cela est nécessaire.