

LA DÉRIVATION

Cours complet, méthodes, graphiques, activités et exercices corrigés

Deuxième année du baccalauréat - Sciences Mathématiques

Ce document reprend l'intégralité des notions du support fourni, les réorganise, corrige les erreurs typographiques ou mathématiques repérées et présente les activités et exercices à la fin, suivis de corrigés détaillés.

Mathématiques - Système éducatif marocain

Table des matières

1	Nombre dérivé et dérivabilité en un point	2
1.1	Définition par le taux d'accroissement	2
1.2	Dérivées à droite et à gauche	2
1.3	Dérivabilité et continuité	2
2	Interprétation géométrique et tangentes	3
2.1	Pente d'une sécante puis d'une tangente	3
2.2	Équation de la tangente	3
2.3	Demi-tangentes et tangente verticale	3
2.4	Approximation affine	4
3	Fonction dérivée et règles de calcul	4
3.1	Définition de la fonction dérivée	4
3.2	Dérivées usuelles	4
3.3	Opérations	5
4	Dérivation d'une fonction composée	5
5	Dérivée de la fonction réciproque	5
6	La fonction arctangente	6
7	Racines n-ièmes et puissances rationnelles	6
7.1	Racine n -ième	6
7.2	Puissances rationnelles	7
8	Lien entre dérivée et variations	7
9	Activités et exercices	8
10	Corrigés détaillés	10
	Synthèse finale	14

1 Nombre dérivé et dérivabilité en un point

1.1 Définition par le taux d'accroissement

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a . On dit que f est **dérivable en a** si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$.

En posant $h = x - a$, on obtient la formulation équivalente

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple

Pour $f(x) = x^3 + x$ et $a = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^3 + (1+h) - 2}{h} \\ &= \frac{4h + 3h^2 + h^3}{h} = 4 + 3h + h^2. \end{aligned}$$

Donc $f'(1) = 4$.

1.2 Dérivées à droite et à gauche

Définition

Si f est définie sur $[a, a+r[$, on appelle **dérivée à droite** de f en a la limite finie

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si f est définie sur $]a-r, a]$, on appelle **dérivée à gauche** de f en a la limite finie

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Théorème

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et

$$f'_d(a) = f'_g(a).$$

1.3 Dérivabilité et continuité

Théorème

Toute fonction dérivable en a est continue en a .

Démonstration. Si f est dérivable en a , alors

$$f(x) - f(a) = (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lorsque $x \rightarrow a$, le premier facteur tend vers 0 et le second vers $f'(a)$, donc $f(x) - f(a) \rightarrow 0$, c'est-à-dire $f(x) \rightarrow f(a)$.

Remarque

La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais

$$f'_g(0) = -1 \quad \text{et} \quad f'_d(0) = 1,$$

donc elle n'est pas dérivable en 0.

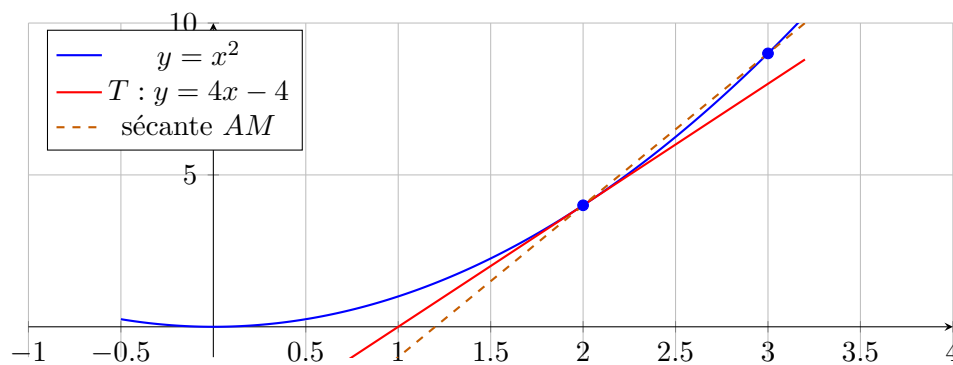
2 Interprétation géométrique et tangentes

2.1 Pente d'une sécante puis d'une tangente

Le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est le coefficient directeur de la sécante joignant $A(a, f(a))$ à $M(x, f(x))$. Lorsque M se rapproche de A , la sécante tend vers la tangente.



2.2 Équation de la tangente

Propriété

Si f est dérivable en a , la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple

Pour $f(x) = x^2$, en $a = 2$, on a $f'(2) = 4$ et $f(2) = 4$. La tangente est

$$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$

2.3 Demi-tangentes et tangente verticale

Si seules les dérivées unilatérales existent, la courbe peut avoir deux demi-tangentes distinctes :

$$T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a), \quad x \geq a,$$

$$T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a), \quad x \leq a.$$

Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe possède une tangente verticale d'équation $x = a$.

2.4 Approximation affine

Propriété

Au voisinage de a ,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

En posant $x = a + h$:

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Exemple

Comme $\sin \pi = 0$ et $\cos \pi = -1$,

$$\sin 3 \approx \sin \pi + (3 - \pi) \cos \pi = \pi - 3.$$

Cette approximation est positive, ce qui est cohérent puisque $3 < \pi$.

3 Fonction dérivée et règles de calcul

3.1 Définition de la fonction dérivée

Définition

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f sur I .

3.2 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbb{R}$

3.3 Opérations

Pour des fonctions dérivables u et v :

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v', \\ (\lambda u)' &= \lambda u', \\ (uv)' &= u'v + uv', \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2}, \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, \\ (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).\end{aligned}$$

Méthode

Avant de dériver une expression, il faut :

1. déterminer son domaine de définition ;
2. identifier sa structure (somme, produit, quotient, composition) ;
3. appliquer la formule correspondante ;
4. simplifier sans perdre les conditions de validité.

4 Dérivation d'une fonction composée

Théorème

Si u est dérivable en a et g est dérivable en $u(a)$, alors $g \circ u$ est dérivable en a et

$$(g \circ u)'(a) = g'(u(a))u'(a).$$

Sur un intervalle :

$$(g \circ u)' = (g' \circ u) u'.$$

Exemple

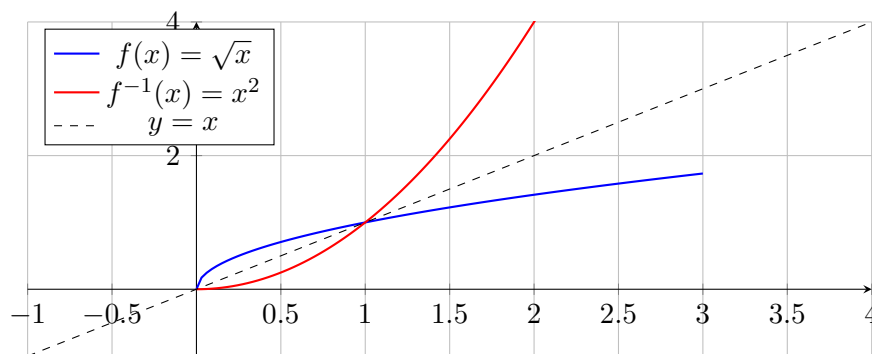
$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(2x^2 + 1) & \implies & f'(x) = 4x \cos(2x^2 + 1), \\ g(x) &= \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) & \implies & g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right), \\ h(x) &= \tan(\cos x) & \implies & h'(x) = -\sin x (1 + \tan^2(\cos x)).\end{aligned}$$

5 Dérivée de la fonction réciproque

Théorème

Soit f continue et strictement monotone sur I , et $J = f(I)$. Si f est dérivable en $y_0 \in I$ et $f'(y_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$ et

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$



Exemple

La fonction $f(x) = \cos x$ est une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. Comme $f(\pi/2) = 0$ et $f'(\pi/2) = -1$,

$$(f^{-1})'(0) = -1.$$

Ici $f^{-1} = \arccos$ sur $[-1, 1]$.

6 La fonction arctangente

Propriété

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si u est dérivable sur I , alors

$$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}.$$

Remarque

Le facteur $u'(x)$ est indispensable. Il était omis dans le corollaire du support initial; la formule ci-dessus est la formule correcte.

7 Racines n -ièmes et puissances rationnelles

7.1 Racine n -ième

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si u est dérivable et strictement positive,

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}.$$

Remarque

Dans le support d'origine, le numérateur de cette dernière formule était parfois écrit $u(x)$; il faut lire $u'(x)$.

7.2 Puissances rationnelles

Pour $r \in \mathbb{Q}$ et $x > 0$,

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Si $u > 0$ et u est dérivable,

$$(u^r)' = r u' u^{r-1}.$$

8 Lien entre dérivée et variations**Théorème**

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ (resp. < 0) sur I , alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Exemple

Pour $g(x) = \cos(2x)$ sur $[0, \pi]$,

$$g'(x) = -2 \sin(2x).$$

Ainsi $g' \leq 0$ sur $[0, \pi/2]$ et $g' \geq 0$ sur $[\pi/2, \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	0 −	0	+ 0
$g(x)$	1	↘ −1	↗ 1

9 Activités et exercices

Activité 1 - Dérivation par la définition

1. Montrer que $f(x) = 2x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = 2$.
2. Montrer que $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ est dérivable en $a = 1$.
3. Montrer que $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$ est dérivable en $a = -1$.
4. La fonction $u(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est-elle dérivable en $a = 3$?

Activité 2 - Fonction définie par morceaux

Étudier la dérivabilité en 1 de

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x \leq 1, \\ \frac{4x + 2}{x + 1}, & x > 1. \end{cases}$$

Activité 3 - Valeur absolue et demi-tangentes

Soit $g(x) = |2x^2 - 8| + x + 1$.

1. Étudier la dérivabilité en -2 .
2. Déterminer la tangente en $A(0, g(0))$.
3. Déterminer les demi-tangentes en $B(-2, g(-2))$.
4. Représenter la courbe et ces trois droites.

Exercice 1 - Tangente à une parabole

Soit $f(x) = x^2$, $A(a, a^2)$ et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . La droite T coupe les axes en M et N . Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

Exercice 2 - Continuité et dérivabilité avec paramètres

Déterminer a et b pour que

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b, & x \leq 1, \\ \frac{2x + a}{x + 2}, & x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable en 1.

Exercice 3 - Fonctions composées

Dériver :

$$f(x) = \sin(2x^2 + 1), \quad g(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right), \quad h(x) = \tan(\cos x).$$

Exercice 4 - Fonction réciproque

Soit $f(x) = x^3 + x^2$.

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f(1)$.
3. Calculer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 5 - Arctangente

Pour $x \neq 0$, poser

$$F(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que F est constante sur $]0, +\infty[$ et déterminer cette constante.
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(2x^2 + x + 1) - \frac{\pi}{2}}{2 \arctan x - \pi}.$$

Exercice 6 - Racines et domaines de dérivabilité

Déterminer les domaines de dérivabilité et les dérivées de

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 4}, \quad g(x) = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{x^2-x}}.$$

Puis calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x^4} - \sqrt[4]{1+x^3}}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1+x}}.$$

Exercice 7 - Problème de synthèse

On définit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \sin x}{\cos x}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt[3]{1-x^3}), & x < 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité en 0.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Pour $g = f|_{[0, \pi/2[}$, déterminer $J = g([0, \pi/2[)$, montrer que g^{-1} existe et que

$$(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

En déduire g^{-1} .

4. Étudier les variations de f sur $] -\infty, 0[$.

10 Corrigés détaillés

Corrigé de l'activité 1

Corrigé détaillé

1. Pour $f(x) = 2x^2 + x - 3$,

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{9h + 2h^2}{h} = 9 + 2h \rightarrow 9.$$

Donc $f'(2) = 9$.

2. $g(1) = \sqrt{2} + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= 1 + \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 1} - \sqrt{2}}{h} \\ &= 1 + \frac{2+h}{\sqrt{(1+h)^2 + 1} + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La limite vaut $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Posons $A(h) = \sqrt[3]{2(1-2h+h^2)} + 3 = \sqrt[3]{5-4h+2h^2}$. En utilisant $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

$$\frac{A(h) - \sqrt[3]{5}}{h} = \frac{-4+2h}{A(h)^2 + A(h)\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}} \rightarrow -\frac{4}{3\sqrt[3]{25}}.$$

Ainsi $h'(-1) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{25}}$.

4. Pour $x > 3$,

$$\frac{u(x) - u(3)}{x - 3} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \rightarrow +\infty.$$

La dérivée à droite n'est pas finie. La fonction n'est donc pas dérivable en 3 ; la courbe possède une tangente verticale $x = 3$.

Corrigé de l'activité 2

Corrigé détaillé

On vérifie d'abord la continuité :

$$f(1) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x+2}{x+1} = 3.$$

La fonction est continue en 1. À gauche, $f'(x) = 4x + 1$, donc $f'_g(1) = 5$. À droite,

$$\left(\frac{4x+2}{x+1} \right)' = \frac{4(x+1) - (4x+2)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2},$$

donc $f'_d(1) = \frac{1}{2}$. Les dérivées unilatérales sont différentes : f n'est pas dérivable en 1.

Corrigé de l'activité 3

Corrigé détaillé

Les zéros de $2x^2 - 8$ sont -2 et 2 . Près de -2 :

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 7, & x < -2, \\ -2x^2 + x + 9, & x > -2. \end{cases}$$

Donc

$$g'_g(-2) = 4(-2) + 1 = -7, \quad g'_d(-2) = -4(-2) + 1 = 9.$$

La fonction n'est pas dérivable en -2 .

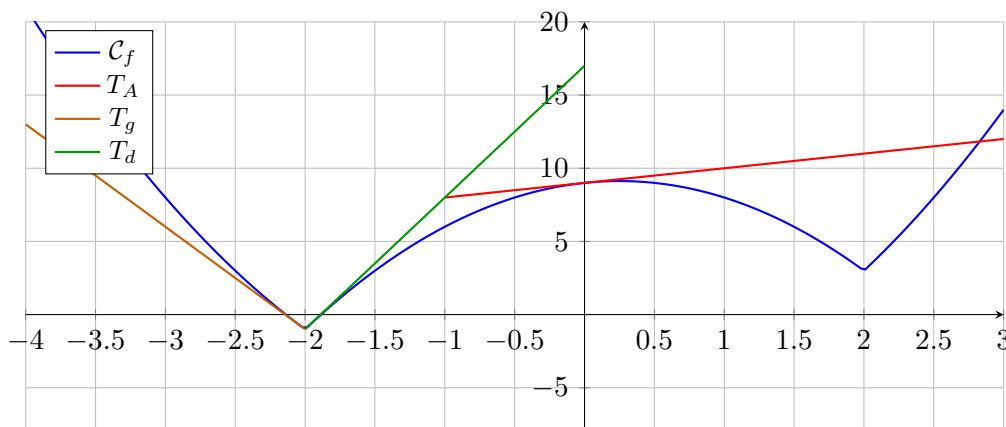
En 0 , $g(0) = 9$ et, dans un voisinage de 0 , $g(x) = -2x^2 + x + 9$, donc $g'(0) = 1$. La tangente en $A(0, 9)$ est

$$T_A : y = x + 9.$$

Comme $g(-2) = -1$, les demi-tangentes en $B(-2, -1)$ sont

$$T_g : y = -7(x + 2) - 1 = -7x - 15 \quad (x \leq -2),$$

$$T_d : y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17 \quad (x \geq -2).$$



Corrigé de l'exercice 1

Corrigé détaillé

$f'(a) = 2a$, donc $T : y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Pour $a \neq 0$, l'intersection avec l'axe des abscisses est $M(a/2, 0)$ et l'intersection avec l'axe des ordonnées est $N(0, -a^2)$. Le milieu de $[AN]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{a^2 - a^2}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, 0 \right) = M.$$

Donc M est bien le milieu de $[AN]$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé détaillé

Continuité en 1 :

$$2 + a + b = \frac{2+a}{3} \iff 2a + 3b + 4 = 0. \quad (1)$$

Dérivée à gauche : $f'_g(1) = 4 + a$. Dérivée à droite :

$$\left(\frac{2x+a}{x+2}\right)' = \frac{4-a}{(x+2)^2},$$

donc $f'_d(1) = \frac{4-a}{9}$. L'égalité donne

$$4 + a = \frac{4-a}{9} \iff 10a = -32 \iff a = -\frac{16}{5}.$$

Dans (1),

$$-\frac{32}{5} + 3b + 4 = 0 \iff 3b = \frac{12}{5} \iff b = \frac{4}{5}.$$

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé détaillé

$$f'(x) = 4x \cos(2x^2 + 1).$$

$$g'(x) = -\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

$$h'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)} = -\sin x (1 + \tan^2(\cos x)).$$

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé détaillé

$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$. Ainsi f est croissante sur $] -\infty, -2/3]$, décroissante sur $[-2/3, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$. Sur $\mathbb{R}_+$, f est continue, strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(x) \rightarrow +\infty$; elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(1) = 2$, $f^{-1}(2) = 1$. Enfin

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}.$$

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé détaillé

Pour $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Donc F est constante sur $]0, +\infty[$. En $x = 1$,

$$F(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour $x > 0$.

Pour la limite, posons $A = 2x^2 + x + 1$. On utilise

$$\arctan A - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{A}\right), \quad 2 \arctan x - \pi = -2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors

$$\frac{\arctan A - \pi/2}{2 \arctan x - \pi} = \frac{\arctan(1/A)}{2 \arctan(1/x)}.$$

Comme $\arctan t \sim t$ en 0,

$$\frac{\arctan(1/A)}{2 \arctan(1/x)} \sim \frac{1/A}{2/x} = \frac{x}{2A} \rightarrow 0.$$

La limite vaut 0.

Corrigé de l'exercice 6

Corrigé détaillé

Pour $f(x) = \sqrt[3]{P(x)}$ avec $P(x) = 3x^2 + x - 4$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable lorsque $P(x) \neq 0$. Or

$$P(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{4}{3}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{6x+1}{3\sqrt[3]{(3x^2+x-4)^2}}, \quad x \neq 1, -\frac{4}{3}.$$

Aux deux racines, la dérivée n'est en général pas finie.

Pour $g(x) = \sqrt[4]{R(x)}$, $R(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$. Il faut $R(x) > 0$ pour la dérivabilité. Le tableau de signes donne

$$R(x) > 0 \quad \text{sur} \quad]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[.$$

Sur cet ensemble,

$$g'(x) = \frac{1}{4} R'(x) R(x)^{-3/4},$$

avec

$$R'(x) = \frac{2(x^2 - x) - (2x - 1)^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2}.$$

Pour la limite, les approximations affines en 1 donnent

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t).$$

Ainsi le numérateur est

$$\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{4}x^3 + o(x^3),$$

et le dénominateur

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + o(x) = -\frac{1}{2}x + o(x).$$

Le quotient est équivalent à $\frac{1}{2}x^2$, donc la limite vaut 0.

Corrigé de l'exercice 7

Corrigé détaillé

Pour $x \geq 0$,

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Ainsi $f(0) = 1$. Pour $x \rightarrow 0^-$, $\sqrt[3]{1-x^3} \rightarrow 1$ et

$$\frac{4}{\pi} \arctan 1 = 1,$$

donc f est continue en 0.

À droite, la dérivée de $\tan(\pi/4 + x/2)$ en 0 vaut

$$\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\pi/4)) = 1.$$

À gauche, posons $u(x) = (1 - x^3)^{1/3}$. Alors

$$u'(x) = -x^2(1 - x^3)^{-2/3},$$

et

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} \rightarrow 0.$$

Donc $f'_g(0) = 0 \neq 1 = f'_d(0)$: f n'est pas dérivable en 0.

Quand $x \rightarrow (\pi/2)^-$, $\cos x \rightarrow 0^+$ et $1 + \sin x \rightarrow 2$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $1 - x^3 \rightarrow +\infty$, donc $\sqrt[3]{1 - x^3} \rightarrow +\infty$, $\arctan \rightarrow \pi/2$ et $f(x) \rightarrow 2$.

Sur $I = [0, \pi/2[$,

$$g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Elle est continue et strictement croissante, avec $g(0) = 1$ et $g(x) \rightarrow +\infty$. Donc $J = [1, +\infty[$. En résolvant $y = \tan(\pi/4 + x/2)$,

$$\arctan y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \implies \boxed{g^{-1}(y) = 2 \arctan y - \frac{\pi}{2}}.$$

Par dérivation,

$$(g^{-1})'(y) = \frac{2}{1 + y^2}.$$

Sur $] -\infty, 0[$,

$$f'(x) = \frac{4 - x^2(1 - x^3)^{-2/3}}{\pi (1 + (1 - x^3)^{2/3})} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante de la limite 2 vers la limite 1.

Synthèse finale

À retenir

- Dérivable $\implies$ continue, mais la réciproque est fausse.
- Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Composition : $(g \circ u)' = (g' \circ u)u'$.
- Réciproque : $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.
- Arctangente composée : $(\arctan u)' = u'/(1 + u^2)$.
- Racine composée : $(\sqrt[n]{u})' = u'/(n \sqrt[n]{u^{n-1}})$.
- Le signe de f' gouverne les variations de f .