

COURS COMPLET

Étude des fonctions

Deuxième année du baccalauréat

Filière Sciences Mathématiques

Domaine de définition, symétries, limites, asymptotes, dérivation, variations, convexité, branches infinies, tangentes, étude complète et représentation graphique.

Conforme aux méthodes usuelles du programme marocain

Sans développements limités ni notations associées

Document de cours, activités, exercices et corrigés détaillés

Table des matières

1 Objectifs et démarche générale	2
2 Domaine de définition et premières simplifications	2
2.1 Rappels sur le domaine de définition	2
2.2 Parité et réduction de l'étude	3
3 Limites et comportement aux bornes	3
3.1 Rôle des limites	3
4 Asymptotes	4
4.1 Asymptote verticale	4
4.2 Asymptote horizontale	4
4.3 Asymptote oblique	5
5 Branches paraboliques	6
5.1 Branche parabolique vers l'axe (Oy)	6
5.2 Branche parabolique vers l'axe (Ox)	6
5.3 Branche parabolique de direction $y = ax$	6
6 Dérivation, variations et extrema	6
6.1 Rappels fondamentaux	7
6.2 Extrema locaux	7
7 Tangentes et demi-tangentes verticales	7
7.1 Tangente en un point	7
7.2 Demi-tangente verticale	7
8 Convexité, concavité et points d'inflexion	8
8.1 Définitions géométriques	8
8.2 Critère de la dérivée seconde	8
8.3 Position par rapport à une tangente	9
9 Axes et centres de symétrie	9
9.1 Axe vertical de symétrie	9
9.2 Centre de symétrie	9
10 Étude complète d'un exemple modèle	9
10.1 Domaine	10
10.2 Décomposition et asymptotes	10

10.3	Dérivée et variations	10
10.4	Convexité	10
10.5	Position par rapport à l'asymptote oblique	11
10.6	Représentation graphique	11
11	Activités et exercices	12
12	Corrigés très détaillés	14
13	Fiche de synthèse	19

1. Objectifs et démarche générale

L'étude d'une fonction consiste à recueillir, dans un ordre logique, toutes les informations permettant de comprendre son comportement et de construire une représentation graphique fidèle. Les objectifs essentiels sont les suivants :

- déterminer l'ensemble de définition ;
- rechercher les simplifications, parités et symétries ;
- calculer les limites aux bornes du domaine ;
- identifier les asymptotes et les branches infinies ;
- étudier la dérivabilité, les variations et les extrema ;
- étudier la convexité, la concavité et les points d'inflexion ;
- déterminer les tangentes remarquables et la position relative de la courbe ;
- synthétiser les résultats dans des tableaux, puis tracer la courbe.

Méthode globale d'étude d'une fonction

Pour une fonction f , on suit généralement cet ordre :

1. Déterminer D_f .
2. Rechercher une éventuelle parité, périodicité ou symétrie.
3. Calculer les limites aux bornes de D_f .
4. Dédire les asymptotes et les branches infinies.
5. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variations.
7. Calculer, si utile, $f''(x)$ et étudier la convexité.
8. Déterminer les tangentes et les points remarquables.
9. Étudier la position de la courbe par rapport aux asymptotes et tangentes.
10. Construire la représentation graphique.

2. Domaine de définition et premières simplifications

2.1. Rappels sur le domaine de définition

Définition

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens.

Règles usuelles :

- Pour $\frac{P(x)}{Q(x)}$, on impose $Q(x) \neq 0$.
- Pour $\sqrt{u(x)}$, on impose $u(x) \geq 0$.
- Pour $\frac{1}{\sqrt{u(x)}}$, on impose $u(x) > 0$.
- Pour $\ln(u(x))$, on impose $u(x) > 0$.
- Pour $\tan(u(x))$, on impose $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Attention

Une simplification algébrique ne change pas le domaine initial. Par exemple,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \text{pour } x \neq 1,$$

mais la fonction initiale n'est toujours pas définie en $x = 1$. Le point $(1, 2)$ est un trou de la courbe, et non un point appartenant à la courbe.

2.2. Parité et réduction de l'étude**Définition**

Soit f définie sur un domaine D_f symétrique par rapport à 0.

- f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
- f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O .

Exemple

La fonction

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Comme

$$h(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = -h(x),$$

la fonction est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty[$, puis de compléter la courbe par symétrie centrale de centre O .

3. Limites et comportement aux bornes**3.1. Rôle des limites**

Les limites servent à décrire le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche :

- d'une borne finie du domaine ;
- de $+\infty$;
- de $-\infty$.

Calcul d'une limite d'une fonction rationnelle

Pour $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$:

- à l'infini, on compare les termes de plus haut degré ;
- près d'une valeur annulant le dénominateur, on factorise et on étudie les signes ;
- si le numérateur et le dénominateur s'annulent, on simplifie lorsque cela est possible, tout en conservant le domaine initial.

4. Asymptotes

4.1. Asymptote verticale

Définition

La droite $x = a$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si au moins une des limites latérales suivantes est infinie :

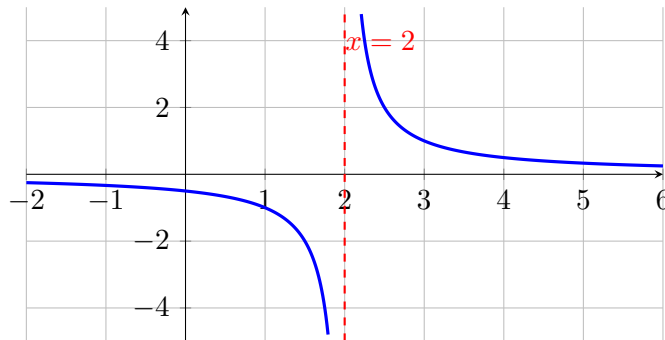
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple

Pour $f(x) = \frac{1}{x-2}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Ainsi, $x = 2$ est une asymptote verticale.



4.2. Asymptote horizontale

Définition

La droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

La définition est analogue au voisinage de $-\infty$.

Position relative

Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $y = \ell$, on étudie le signe de $f(x) - \ell$:

- si $f(x) - \ell > 0$, la courbe est au-dessus de l'asymptote ;
- si $f(x) - \ell < 0$, la courbe est au-dessous ;
- si $f(x) - \ell = 0$, la courbe coupe l'asymptote.

Exemple

Pour

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1},$$

on écrit

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2,$$

et $y = 2$ est une asymptote horizontale. De plus,

$$f(x) - 2 = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

La courbe est donc au-dessus de $y = 2$ lorsque $|x| > 1$, et au-dessous lorsque $|x| < 1$.

4.3. Asymptote oblique

Définition

La droite $\Delta : y = ax + b$, avec $a \neq 0$, est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

La définition est analogue au voisinage de $-\infty$.

Recherche de a et b

Lorsque les limites existent et sont finies,

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Exemple

Soit

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}.$$

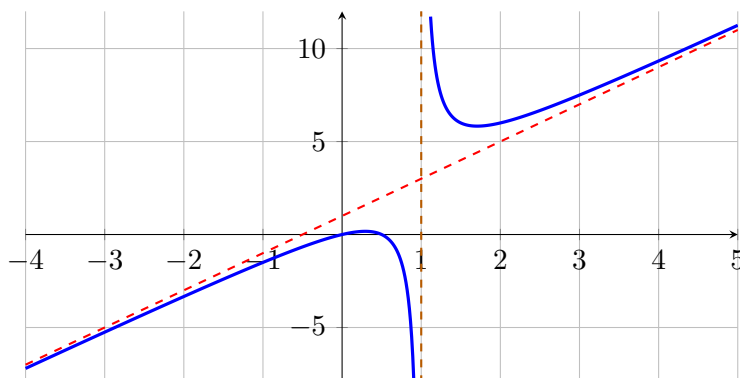
La division euclidienne donne

$$g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - (2x + 1)) = 0.$$

La droite $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique aux deux infinis.



5. Branches paraboliques

5.1. Branche parabolique vers l'axe (Oy)

Définition

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

Exemple : $f(x) = x^2$ vérifie $f(x)/x = x$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

5.2. Branche parabolique vers l'axe (Ox)

Définition

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

5.3. Branche parabolique de direction $y = ax$

Définition

Si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty,$$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple

Pour $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1,$$

mais

$$f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty.$$

La courbe a donc une branche parabolique de direction $y = x$.

6. Dérivation, variations et extrema

6.1. Rappels fondamentaux

Lien entre signe de la dérivée et variations

Soit f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est strictement croissante.
- Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante.

Étude des variations

1. Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.
2. Factoriser $f'(x)$ autant que possible.
3. Résoudre $f'(x) = 0$ et repérer les valeurs interdites.
4. Construire le tableau de signe de f' .
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Calculer les valeurs de f aux points critiques et les limites aux bornes.

6.2. Extrema locaux

Théorème / Propriété

Si f' change de signe en a :

- de $+$ vers $-$, alors f admet un maximum local en a ;
- de $-$ vers $+$, alors f admet un minimum local en a .

7. Tangentes et demi-tangentes verticales

7.1. Tangente en un point

Si f est dérivable en a , la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ a pour équation

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

7.2. Demi-tangente verticale

Théorème / Propriété

Supposons que f soit continue à droite en a et que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty.$$

Alors $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente verticale à droite, d'équation $x = a$.

Attention

La continuité unilatérale est indispensable. Une limite infinie du taux d'accroissement ne suffit pas si la fonction n'est pas continue du côté considéré.

Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 0^+).$$

La courbe admet donc en $O(0,0)$ une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$.

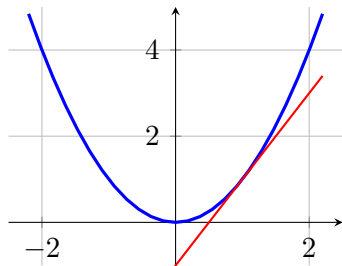
8. Convexité, concavité et points d'inflexion

8.1. Définitions géométriques

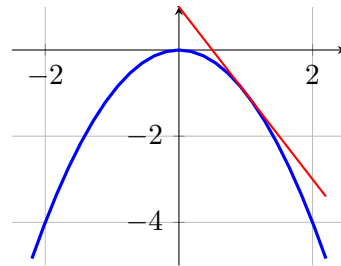
Définition

Soit f définie sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- f est concave sur I si sa courbe est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- Un point d'inflexion est un point où la courbe change de convexité.



Fonction convexe



Fonction concave

8.2. Critère de la dérivée seconde

Théorème / Propriété

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f''(x) \geq 0$ sur I , alors f est convexe sur I .
- Si $f''(x) \leq 0$ sur I , alors f est concave sur I .
- Si f'' change de signe en a , alors $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Attention

La condition $f''(a) = 0$ seule ne suffit pas. Il faut vérifier un changement de signe de f'' , ou démontrer directement un changement de convexité.

8.3. Position par rapport à une tangente

Si f est deux fois dérivable et convexe sur I , alors pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

La courbe est donc au-dessus de sa tangente. Dans le cas concave, l'inégalité est inversée.

9. Axes et centres de symétrie**9.1. Axe vertical de symétrie****Théorème / Propriété**

La droite $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x).$$

9.2. Centre de symétrie**Théorème / Propriété**

Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x).$$

Exemple

Pour un polynôme cubique

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad A \neq 0,$$

le point d'inflexion a pour abscisse

$$\alpha = -\frac{B}{3A}.$$

Le point $\Omega(\alpha, f(\alpha))$ est également un centre de symétrie de la courbe.

10. Étude complète d'un exemple modèle

Considérons

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

10.1. Domaine

Le dénominateur doit être non nul :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

10.2. Décomposition et asymptotes

La division euclidienne donne

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Ainsi :

- $x = 1$ est une asymptote verticale ;
- $y = x + 1$ est une asymptote oblique aux deux infinis.

Les limites latérales en 1 sont

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

10.3. Dérivée et variations

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}.$$

Le dénominateur est positif sur D_f . Les zéros du numérateur sont

$$x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x = 1 + \sqrt{2}.$$

Le signe de f' est positif à l'extérieur de l'intervalle délimité par ces deux valeurs, et négatif à l'intérieur, en tenant compte de la coupure en 1.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$2 - 2\sqrt{2}$		$2 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$

10.4. Convexité

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Donc

$$f''(x) < 0 \text{ sur }]-\infty, 1[, \quad f''(x) > 0 \text{ sur }]1, +\infty[.$$

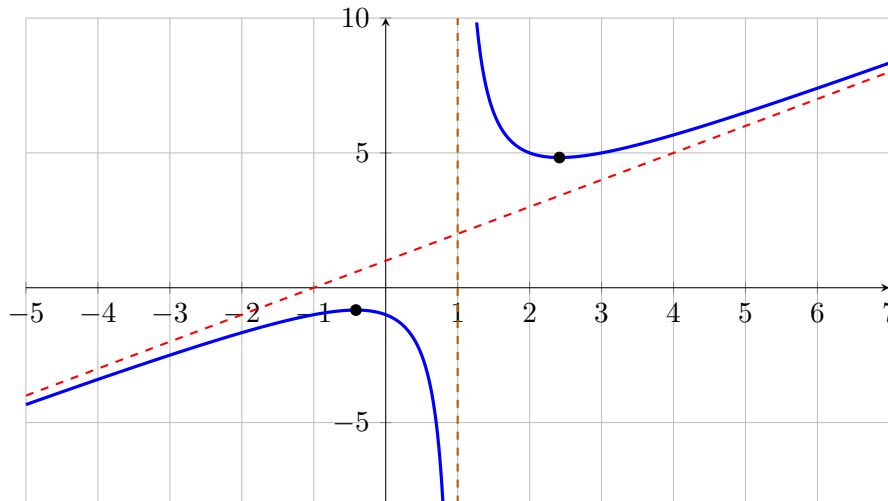
La courbe est concave à gauche de l'asymptote verticale et convexe à droite. Il n'y a pas de point d'inflexion en $x = 1$, puisque la fonction n'y est pas définie.

10.5. Position par rapport à l'asymptote oblique

$$f(x) - (x + 1) = \frac{2}{x - 1}.$$

Ainsi, la courbe est au-dessous de $y = x + 1$ pour $x < 1$, et au-dessus pour $x > 1$.

10.6. Représentation graphique



11. Activités et exercices

Activité 1 - Convexité d'une parabole

Soit $f(x) = x^2 + x$ et $A(a, f(a))$ un point de $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T_A .
2. Pour un réel x , comparer $f(x)$ à l'ordonnée du point de T_A d'abscisse x .
3. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à toutes ses tangentes.
4. Calculer f'' et retrouver le résultat par le critère de la dérivée seconde.

Activité 2 - Étude d'une fonction impaire

Soit

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. Déterminer D_h et étudier la parité de h .
2. Calculer les limites en $\pm\infty$.
3. Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations.
4. Déterminer la tangente en $O(0, 0)$.
5. Étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.
6. Étudier la convexité de h .
7. Tracer la courbe.

Exercice 1 - Point d'inflexion sans dérivée seconde

On définit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Déterminer f' sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la dérivabilité de f' en 0.
4. Montrer que $O(0, 0)$ est un point d'inflexion.

Exercice 2 - Asymptotes horizontale et verticale

Soit

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

1. Déterminer D_f .
2. Calculer les limites aux bornes de D_f .
3. Déterminer les asymptotes.
4. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote horizontale.
5. Étudier les variations de f .

Exercice 3 - Asymptote oblique

Soit

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}.$$

1. Déterminer D_g .
2. Effectuer la division euclidienne.
3. Déterminer les asymptotes.
4. Étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
5. Étudier les variations et la convexité.

Exercice 4 - Symétrie

Soit

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 6}.$$

1. Déterminer D_f .
2. Montrer que $x \in D_f \Rightarrow 2 - x \in D_f$.
3. Montrer que $f(2 - x) = f(x)$.
4. En déduire un axe de symétrie.

Exercice 5 - Étude complète

Étudier complètement la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

et construire sa courbe.

12. Corrigés très détaillés

Correction de l'activité 1

On considère $f(x) = x^2 + x$.

1. Tangente en $A(a, f(a))$.

La dérivée est

$$f'(x) = 2x + 1,$$

donc

$$f'(a) = 2a + 1 \quad \text{et} \quad f(a) = a^2 + a.$$

L'équation de la tangente en A est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En remplaçant,

$$y = (2a + 1)(x - a) + a^2 + a.$$

Développons soigneusement :

$$(2a + 1)(x - a) = (2a + 1)x - (2a + 1)a = (2a + 1)x - 2a^2 - a.$$

Ainsi,

$$y = (2a + 1)x - 2a^2 - a + a^2 + a = (2a + 1)x - a^2.$$

Donc

$$T_A : y = (2a + 1)x - a^2.$$

2. Comparaison entre la courbe et la tangente.

L'ordonnée du point de la tangente d'abscisse x vaut

$$y_T = (2a + 1)x - a^2.$$

Calculons la différence :

$$f(x) - y_T = x^2 + x - (2a + 1)x + a^2.$$

On regroupe :

$$f(x) - y_T = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Or $(x - a)^2 \geq 0$ pour tout réel x . Donc

$$f(x) \geq y_T.$$

La courbe est donc au-dessus de sa tangente en A , quel que soit le point A choisi.

3. Conclusion géométrique.

Puisque cette propriété est vraie pour toute tangente, la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Vérification avec la dérivée seconde.

$$f''(x) = 2 > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Le critère de la dérivée seconde confirme que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'activité 2

On considère

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. Domaine et parité.

Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$, donc la racine existe et le dénominateur n'est jamais nul. Ainsi,

$$D_h = \mathbb{R}.$$

Ensuite,

$$h(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -h(x).$$

Donc h est impaire et sa courbe admet O comme centre de symétrie.

2. Limites.

Pour $x > 0$,

$$h(x) = \frac{x}{x\sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2}},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1.$$

Par impairs,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1.$$

Les droites $y = 1$ et $y = -1$ sont donc des asymptotes horizontales respectivement à droite et à gauche.

3. Dérivée et variations.

Écrivons $h(x) = x(x^2 + 1)^{-1/2}$. Alors

$$h'(x) = (x^2 + 1)^{-1/2} + x \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + 1)^{-3/2} (2x).$$

Donc

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} > 0.$$

La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Tangente en O .

$h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. Donc

$$T : y = x.$$

5. Position par rapport à T .

Calculons

$$h(x) - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x = x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right).$$

Comme $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \leq 0.$$

Donc :

— si $x > 0$, $h(x) - x < 0$: la courbe est au-dessous de T ;

- si $x < 0$, $h(x) - x > 0$: la courbe est au-dessus de T ;
- si $x = 0$, la courbe et la tangente se rencontrent.

La courbe traverse donc sa tangente en O .

6. Convexité.

À partir de

$$h'(x) = (x^2 + 1)^{-3/2},$$

on obtient

$$h''(x) = -\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{-5/2}(2x) = -\frac{3x}{(x^2 + 1)^{5/2}}.$$

Le dénominateur est positif. Ainsi :

- $h''(x) > 0$ si $x < 0$: h est convexe sur $] -\infty, 0[$;
- $h''(x) < 0$ si $x > 0$: h est concave sur $]0, +\infty[$.

Il y a changement de convexité en 0 : O est un point d'inflexion.

Correction de l'exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Dérivabilité en 0.

On a $f(0) = 0$. À droite,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x \longrightarrow 0.$$

À gauche,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x^2}{x} = -x \longrightarrow 0.$$

Les deux limites sont égales et finies. Donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0.$$

2. Expression de f' .

Pour $x < 0$, $f'(x) = -2x$. Pour $x > 0$, $f'(x) = 2x$. Avec $f'(0) = 0$, on peut écrire

$$f'(x) = 2|x|.$$

3. Dérivabilité de f' en 0.

À droite,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{2x}{x} = 2.$$

À gauche,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{-2x}{x} = -2.$$

Les limites sont différentes. Ainsi f' n'est pas dérivable en 0 et f n'est pas deux fois dérivable en 0.

4. Point d'inflexion.

Sur $] -\infty, 0[$, $f(x) = -x^2$, donc la courbe est concave. Sur $]0, +\infty[$, $f(x) = x^2$, donc la courbe est convexe. La convexité change en 0, donc $O(0, 0)$ est un point d'inflexion, bien que $f''(0)$ n'existe pas.

Correction de l'exercice 2

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

1. Domaine.

$x^2 - 1 \neq 0$, donc $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Ainsi

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

2. Limites aux bornes.

Écrivons

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x^2 - 1}.$$

À l'infini,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2.$$

Près de 1, le numérateur tend vers $2 > 0$. Le dénominateur $(x - 1)(x + 1)$ a le signe de $x - 1$ car $x + 1 > 0$ près de 1. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Près de -1 , $x - 1 < 0$ et le signe du dénominateur est l'opposé de celui de $x + 1$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

3. Asymptotes.

Les droites $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales. La droite $y = 2$ est une asymptote horizontale aux deux infinis.

4. Position par rapport à $y = 2$.

$$f(x) - 2 = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Cette expression est positive si $|x| > 1$ et négative si $|x| < 1$. Donc la courbe est au-dessus de $y = 2$ sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, et au-dessous sur $] -1, 1[$.

5. Variations.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Le dénominateur est positif. Ainsi $f'(x)$ a le signe opposé de x : positif pour $x < 0$, nul en 0, négatif pour $x > 0$. En tenant compte des coupures en -1 et 1 , f est croissante sur $] -\infty, -1[$ et $] -1, 0[$, puis décroissante sur $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$. On a $f(0) = 0$, qui est un maximum local sur $] -1, 1[$.

Correction de l'exercice 3

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}.$$

1. Domaine.

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2. Division euclidienne.

On cherche $2x + 1$ car

$$(x - 1)(2x + 1) = 2x^2 - x - 1.$$

Ainsi

$$2x^2 - x = (x - 1)(2x + 1) + 1,$$

d'où

$$g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

3. Asymptotes.

Comme $1/(x - 1)$ tend vers 0 aux deux infinis, $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty,$$

donc $x = 1$ est une asymptote verticale.

4. Position par rapport à l'asymptote oblique.

$$g(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x - 1}.$$

La courbe est au-dessous de l'asymptote pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$.

5. Variations.

$$g'(x) = 2 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{2(x - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2}.$$

Les zéros sont

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le numérateur est positif à l'extérieur de l'intervalle délimité par ces valeurs et négatif à l'intérieur.

On dresse alors le tableau sur les quatre intervalles séparés par $1 - 1/\sqrt{2}$, 1 , $1 + 1/\sqrt{2}$.

6. Convexité.

$$g''(x) = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Donc $g'' < 0$ pour $x < 1$ et $g'' > 0$ pour $x > 1$. La courbe est concave à gauche de 1 et convexe à droite. Il n'y a pas de point d'inflexion en 1, car la fonction n'y est pas définie.

Correction de l'exercice 4

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 6}.$$

1. Domaine.

On doit avoir

$$2x^2 - 4x - 6 \geq 0.$$

En factorisant,

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 3)(x + 1).$$

Le produit est positif ou nul à l'extérieur de l'intervalle $[-1, 3]$. Donc

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[.$$

2. Stabilité du domaine par $x \mapsto 2 - x$.

Si $x \leq -1$, alors $2 - x \geq 3$, donc $2 - x \in D_f$. Si $x \geq 3$, alors $2 - x \leq -1$, donc encore $2 - x \in D_f$.

3. Calcul de $f(2 - x)$.

$$f(2 - x) = \sqrt{2(2 - x)^2 - 4(2 - x) - 6}.$$

Développons :

$$2(4 - 4x + x^2) - 8 + 4x - 6 = 8 - 8x + 2x^2 - 8 + 4x - 6 = 2x^2 - 4x - 6.$$

Ainsi

$$f(2 - x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 6} = f(x).$$

4. Conclusion.

La relation est de la forme $f(2a - x) = f(x)$ avec $2a = 2$, donc $a = 1$. La droite

$$x = 1$$

est un axe de symétrie de la courbe.

Correction de l'exercice 5

Cette étude a été menée intégralement dans la section « Étude complète d'un exemple modèle ». Les points essentiels sont :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1},$$

avec les asymptotes $x = 1$ et $y = x + 1$. La dérivée

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2}$$

s'annule en $1 \pm \sqrt{2}$, et la dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{4}{(x - 1)^3}$$

montre une concavité à gauche de 1 et une convexité à droite. La position par rapport à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $2/(x - 1)$.

13. Fiche de synthèse

Objet étudié	Critère / calcul à effectuer
Domaine	Exclure les zéros de dénominateur, imposer les conditions des racines et logarithmes.
Parité	Vérifier $f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$.
Asymptote verticale	Chercher une limite infinie en une borne finie du domaine.
Asymptote horizontale	Chercher $\lim f(x) = \ell$ à l'infini.
Asymptote oblique	Chercher $a = \lim f(x)/x$, puis $b = \lim(f(x) - ax)$.
Position relative	Étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ (équation de la droite).
Variations	Étudier le signe de f' .
Extrema	Repérer les changements de signe de f' .
Convexité	Étudier le signe de f'' .
Point d'inflexion	Vérifier un changement de signe de f'' ou un changement de convexité.
Tangente	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Demi-tangente verticale	Continuité unilatérale et taux d'accroissement tendant vers $\pm\infty$.
Axe de symétrie $x = a$	Vérifier $f(2a - x) = f(x)$.
Centre $\Omega(a, b)$	Vérifier $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Erreurs fréquentes à éviter

- Confondre un trou de courbe avec une asymptote verticale.
- Oublier de conserver le domaine initial après simplification.
- Conclure à un point d'inflexion uniquement parce que $f''(a) = 0$.
- Oublier d'étudier la position par rapport aux asymptotes.
- Dresser un tableau de variations sans calculer les valeurs et limites nécessaires.
- Utiliser une demi-tangente verticale sans vérifier la continuité unilatérale.
- Tracer la courbe avant d'avoir synthétisé tous les résultats.