

Correction détaillée

Dérivabilité en un point et fonction partie entière

Exercice 1 - Toutes les étapes de démonstration

Énoncé intégralement réécrit

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x + \sin x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{x^2}{2} E\left(\frac{1}{2x}\right), & x < 0, \end{cases}$$

où E désigne la fonction partie entière.

1) Montrer que f est dérivable à droite en $a = 0$.

2) La fonction f est-elle dérivable en $a = 0$?

Étudier ensuite la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes au point indiqué :

a)

$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4} - 1}{\sqrt{x} + 1} \quad \text{au point } x_0 = 4.$$

b)

$$h(x) = \sin^2 x E\left(\frac{x}{2}\right), \quad h(0) = 0, \quad \text{au point } x_0 = 0.$$

Rappels indispensables

Une fonction u est dérivable à droite en a lorsque la limite finie

$$u'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

existe. Elle est dérivable à gauche en a lorsque

$$u'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

existe et est finie.

La fonction est dérivable en a si et seulement si les deux nombres dérivés unilatéraux existent et sont égaux :

$$u'_d(a) = u'_g(a).$$

Nous utiliserons aussi les limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, pour tout réel t , si $\{t\} = t - [t]$ désigne sa partie fractionnaire, alors

$$0 \leq \{t\} < 1 \quad \text{et} \quad [t] = t - \{t\}.$$

1. Dérivabilité à droite de f en 0

Par définition,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Comme $f(0) = 0$ et que, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x + \sin x},$$

on obtient

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(x + \sin x)}.$$

Pour faire apparaître les limites usuelles, écrivons

$$\frac{1 - \cos x}{x(x + \sin x)} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{x + \sin x}.$$

Or

$$\frac{x}{x + \sin x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}}.$$

Ainsi,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \right).$$

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Par produit des limites,

$$f'_d(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable à droite en 0 et

$$f'_d(0) = \frac{1}{4}.$$

2. Dérivabilité de f en 0

Pour savoir si f est dérivable en 0, il reste à calculer le nombre dérivé à gauche :

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Pour $x < 0$,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} E\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{x^2}{2} \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor.$$

Comme $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor.$$

Nous devons donc étudier

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor.$$

Posons

$$t = \frac{1}{2x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $t \rightarrow -\infty$, et

$$x = \frac{1}{2t}.$$

Alors

$$\frac{x}{2} \left\lfloor \frac{1}{2x} \right\rfloor = \frac{1}{4t} \lfloor t \rfloor = \frac{1}{4} \frac{\lfloor t \rfloor}{t}.$$

Montrons maintenant que

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \longrightarrow 1 \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Écrivons

$$\lfloor t \rfloor = t - \{t\}, \quad 0 \leq \{t\} < 1.$$

Donc

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} = 1 - \frac{\{t\}}{t}.$$

Comme $|\{t\}| < 1$ et $|t| \rightarrow +\infty$, nous avons

$$\left| \frac{\{t\}}{t} \right| \leq \frac{1}{|t|} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \longrightarrow 1.$$

Il vient alors

$$f'_g(0) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Nous avons donc obtenu

$$f'_d(0) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'_g(0) = \frac{1}{4}.$$

Les deux nombres dérivés unilatéraux existent, sont finis et sont égaux.

Conclusion

La fonction f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = \frac{1}{4}.$$

La tangente à la courbe de f au point $O(0,0)$ a donc pour équation

$$y = \frac{1}{4}x.$$

3. Dérivabilité de $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ en $x_0 = 4$

3.1 Domaine de définition

La racine carrée $\sqrt{x}$ impose

$$x \geq 0.$$

De plus,

$$\sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0,$$

donc le dénominateur n'est jamais nul sur $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$D_g = [0, +\infty[.$$

Le point 4 appartient à l'intérieur de ce domaine.

3.2 Dérivabilité des fonctions composantes

Posons

$$u(x) = \sqrt[3]{x+4} - 1 = (x+4)^{1/3} - 1$$

et

$$v(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Au voisinage de 4, les fonctions u et v sont dérivables et $v(4) \neq 0$. Le quotient $g = u/v$ est donc dérivable en 4.

Calculons les dérivées :

$$u'(x) = \frac{1}{3(x+4)^{2/3}}$$

et

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La formule de dérivation d'un quotient donne

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

3.3 Calcul exact de $g'(4)$

Calculons chaque quantité séparément :

$$\sqrt[3]{4+4} = \sqrt[3]{8} = 2, \quad u(4) = 2 - 1 = 1,$$

$$v(4) = \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$u'(4) = \frac{1}{3(8)^{2/3}} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12},$$

car

$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4,$$

et

$$v'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(4) &= \frac{\frac{1}{12} \cdot 3 - 1 \cdot \frac{1}{4}}{3^2} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{9} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La valeur de la fonction au point est

$$g(4) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion

La fonction g est dérivable en 4 et

$$g'(4) = 0.$$

La tangente à sa courbe au point d'abscisse 4 est horizontale et a pour équation

$$y = \frac{1}{3}.$$

4. Dérivabilité de $h(x) = \sin^2 x E\left(\frac{x}{2}\right)$ en 0

La présence de la fonction partie entière oblige à distinguer les valeurs de x à droite et à gauche de 0.

4.1 Comportement à droite de 0

Pour

$$0 < x < 2,$$

on a

$$0 < \frac{x}{2} < 1.$$

Par définition de la partie entière,

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]0, 2[$,

$$h(x) = \sin^2 x \times 0 = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc

$$h'_d(0) = 0.$$

4.2 Comportement à gauche de 0

Pour

$$-2 < x < 0,$$

on a

$$-1 < \frac{x}{2} < 0.$$

Le plus grand entier inférieur ou égal à $x/2$ est alors -1 , donc

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = -1.$$

Par conséquent,

$$h(x) = -\sin^2 x \quad (-2 < x < 0).$$

Le taux d'accroissement à gauche vaut

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = -\frac{\sin^2 x}{x}.$$

Écrivons

$$-\frac{\sin^2 x}{x} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right) \sin x.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$,

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sin x \rightarrow 0.$$

Donc

$$h'_g(0) = -(1)(0) = 0.$$

4.3 Comparaison des deux dérivées unilatérales

Nous avons

$$h'_d(0) = 0 \quad \text{et} \quad h'_g(0) = 0.$$

Elles sont égales. La fonction est donc dérivable en 0.

Remarquons aussi que la fonction est continue en 0 : à droite elle est identiquement nulle près de 0, tandis qu'à gauche

$$-\sin^2 x \longrightarrow 0 = h(0).$$

Conclusion

La fonction h est dérivable en 0 et

$$h'(0) = 0.$$

La tangente à sa courbe au point $(0, 0)$ est l'axe des abscisses :

$$y = 0.$$

Synthèse finale

Fonction étudiée	Point	Résultat
Fonction définie par morceaux	0	$f'(0) = \frac{1}{4}$
$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4} - 1}{\sqrt{x} + 1}$	4	$g'(4) = 0$
$h(x) = \sin^2 x E\left(\frac{x}{2}\right), h(0) = 0$	0	$h'(0) = 0$

Document pédagogique - correction rigoureuse, progressive et détaillée.

Exercice 2

Théorème des accroissements finis

Sujet réécrit et correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

- 1) a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x.$$

- b) En déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}.$$

- 2) Utiliser le théorème des accroissements finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1).$$

- 3) a) Utiliser le théorème des accroissements finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x.$$

- b) Démontrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

- 4) En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer, pour un entier $n \geq 2$, la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right).$$

Rappel

Le **théorème des accroissements finis** affirme que si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Il permet donc de transformer une différence de valeurs de f en un produit contenant une valeur de la dérivée.

1.a) Encadrement de $\arctan x$ pour $x \geq 0$

Soit $x \geq 0$. Le cas $x = 0$ est immédiat, car

$$\frac{0}{1+0^2} = 0 = \arctan 0.$$

Supposons désormais $x > 0$ et considérons la fonction

$$f(t) = \arctan t.$$

Elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, avec

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$\arctan x - \arctan 0 = f'(c)(x - 0).$$

Comme $\arctan 0 = 0$, on obtient

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2}.$$

Or $0 < c < x$, donc

$$0 < c^2 < x^2, \quad 1 < 1+c^2 < 1+x^2.$$

Les quantités étant strictement positives, l'inversion renverse l'ordre :

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1.$$

En multipliant par $x > 0$, il vient

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x.$$

Puisque $\frac{x}{1+c^2} = \arctan x$, nous avons

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

En réintroduisant le cas $x = 0$, les inégalités deviennent larges :

Conclusion

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x.$$

1.b) Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}$

Pour $x > 0$, l'encadrement précédent donne

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x.$$

En soustrayant $\arctan x$ à x , on obtient

$$0 \leq x - \arctan x \leq x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Calculons le membre de droite :

$$x - \frac{x}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2) - x}{1+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Ainsi,

$$0 \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, nous pouvons diviser par x^2 :

$$0 \leq \frac{x - \arctan x}{x^2} \leq \frac{x}{1 + x^2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{x}{1 + x^2} \rightarrow 0.$$

Le théorème des gendarmes donne donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan x}{x^2} = 0.$$

Il reste à examiner la limite à gauche. Pour $x < 0$, posons $t = -x > 0$. Puisque la fonction arctan est impaire,

$$\arctan(-t) = -\arctan t.$$

Alors

$$\frac{x - \arctan x}{x^2} = \frac{-t - \arctan(-t)}{t^2} = \frac{-t + \arctan t}{t^2} = -\frac{t - \arctan t}{t^2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$, on a $t \rightarrow 0^+$, donc

$$-\frac{t - \arctan t}{t^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi, les limites à droite et à gauche existent et sont égales.

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2} = 0.$$

2) Encadrement de différences de valeurs de arctan

Soit $x > 1$. Nous allons appliquer deux fois le théorème des accroissements finis à

$$f(t) = \arctan t, \quad f'(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Sur $]0, +\infty[$, la dérivée f' est strictement décroissante, car

$$f''(t) = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2} < 0 \quad (t > 0).$$

Première inégalité

Appliquons le TAF sur $[x, x + 1]$. Il existe $c_1 \in]x, x + 1[$ tel que

$$\arctan(x + 1) - \arctan x = f'(c_1)((x + 1) - x) = \frac{1}{1 + c_1^2}.$$

Comme $c_1 > x > 0$ et que f' est décroissante,

$$\frac{1}{1 + c_1^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donc

$$\arctan(x + 1) - \arctan x \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Deuxième inégalité

Appliquons le TAF sur $[x-1, x]$. Comme $x > 1$, cet intervalle est inclus dans $]0, +\infty[$. Il existe $c_2 \in]x-1, x[$ tel que

$$\arctan x - \arctan(x-1) = f'(c_2)(x - (x-1)) = \frac{1}{1+c_2^2}.$$

Comme $0 < c_2 < x$ et que f' est décroissante,

$$\frac{1}{1+c_2^2} \geq \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1).$$

En réunissant les deux résultats :

Conclusion

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1).$$

3.a) Démonstration de $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$

Le cas $x = 0$ est évident : $\sin 0 = 0$.

Soit $x > 0$. Considérons la fonction

$$f(t) = \sin t.$$

Elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Le TAF fournit un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin x - \sin 0 = f'(c)(x - 0).$$

Comme $f'(c) = \cos c$ et $\sin 0 = 0$, nous obtenons

$$\sin x = x \cos c.$$

Or, pour tout réel c ,

$$\cos c \leq 1.$$

Comme $x > 0$, la multiplication par x conserve l'ordre :

$$x \cos c \leq x.$$

Donc

$$\sin x \leq x.$$

En tenant compte de $x = 0$:

Conclusion

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x.$$

3.b) Démonstration de $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

Commençons par $x \geq 0$ et introduisons la fonction auxiliaire

$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = -\sin x + x = x - \sin x.$$

D'après la question 3.a, pour tout $x \geq 0$,

$$\sin x \leq x,$$

donc

$$g'(x) = x - \sin x \geq 0.$$

Ainsi, g est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme

$$g(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0,$$

on en déduit, pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq g(0) = 0.$$

Autrement dit,

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0,$$

soit

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Pour $x < 0$, posons $u = -x > 0$. La fonction cosinus est paire et $x^2 = u^2$, donc

$$\cos x = \cos(-u) = \cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

La propriété est donc vraie pour tout réel.

Conclusion

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

4) Limite avec des racines n -ièmes

On cherche, pour $n \geq 2$,

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right).$$

Écrivons

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} = x^{\frac{n-1}{n}}.$$

Considérons la fonction

$$f(t) = t^{1/n}, \quad t > 0.$$

Elle est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, avec

$$f'(t) = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n t^{\frac{n-1}{n}}}.$$

D'après le TAF, il existe un réel $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} = f'(c_x)((x+1) - x) = \frac{1}{n c_x^{n-1}}.$$

En multipliant par $x^{\frac{n-1}{n}}$, on obtient

$$x^{\frac{n-1}{n}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{c_x} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Or

$$x < c_x < x+1.$$

En divisant par $x > 0$:

$$1 < \frac{c_x}{x} < 1 + \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les deux membres extrêmes tendent vers 1. Ainsi,

$$\frac{c_x}{x} \longrightarrow 1, \quad \frac{x}{c_x} \longrightarrow 1.$$

Par continuité de la fonction $u \mapsto u^{\frac{n-1}{n}}$ en 1,

$$\left(\frac{x}{c_x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \longrightarrow 1.$$

Finalement,

$$L = \frac{1}{n} \times 1.$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right) = \frac{1}{n}.$$

Synthèse des résultats

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x \quad (x \geq 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2} = 0,$$

$$\arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1) \quad (x > 1),$$

$$\sin x \leq x \quad (x \geq 0),$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{n-1}{n}} \left((x+1)^{1/n} - x^{1/n} \right) = \frac{1}{n}.$$

Correction intégralement détaillée

Exercice 3

Fonction arctangente et dérivation

Énoncé réécrit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

1) a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2 + 1} - x \geq 0.$$

b) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on en déduire ?2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$.3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

Preliminaires

Rappel utile

La fonction $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel u ,

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

lorsque u est une fonction dérivable.De plus, si $t > 0$, alors

$$\arctan t + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, si $\theta = \arctan t$, alors $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{t} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Comme $\frac{\pi}{2} - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on obtient

$$\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

1. Étude de l'expression et relation entre $f(x)$ et $f(-x)$ 1.a. Montrer que $\sqrt{x^2 + 1} - x \geq 0$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait que

$$x^2 + 1 > x^2.$$

Les deux membres étant positifs ou nuls, la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donne

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|.$$

Or, pour tout réel x ,

$$|x| \geq x.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x.$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{x^2 + 1} - x > 0.}$$

L'inégalité demandée est donc vérifiée, et même de manière stricte :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2 + 1} - x > 0.}$$

Cette stricte positivité sera importante pour utiliser la relation

$$\arctan t + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

1.b. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$

Par définition,

$$f(-x) = \arctan\left(\sqrt{(-x)^2 + 1} - (-x)\right).$$

Comme $(-x)^2 = x^2$, on obtient

$$f(-x) = \arctan\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right).$$

Posons

$$u = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

D'après la question précédente,

$$u > 0.$$

Calculons le produit de u par $\sqrt{x^2 + 1} + x$:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) &= (\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2 \\ &= x^2 + 1 - x^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{u}.$$

Par conséquent,

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{u}\right).$$

Puisque $u > 0$, le rappel précédent donne

$$\arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan u.$$

Or

$$\arctan u = f(x).$$

Donc

$$f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x).$$

Ou encore,

$$f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}.$$

Interprétation et déduction

La fonction f n'est ni paire ni impaire. En revanche, si l'on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{\pi}{4},$$

alors

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x) - \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - f(x) \right) - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - f(x) \\ &= - \left(f(x) - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Ainsi, g est impaire.

Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de f admet le point

$$I \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$$

comme centre de symétrie.

En effet, la relation

$$f(-x) + f(x) = \frac{\pi}{2}$$

s'écrit

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{\pi}{4},$$

ce qui exprime exactement la symétrie centrale de la courbe par rapport au point $I \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$.

Conclusion

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x).$$

La courbe de f possède donc le centre de symétrie

$$I \left(0, \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et calcul de $f'(x)$

On pose

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x.$$

Alors

$$f(x) = \arctan(u(x)).$$

Étape 1 : dérivabilité de u

La fonction

$$x \mapsto x^2 + 1$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$x^2 + 1 > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par composition,

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto -x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée :

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ainsi,

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1.$$

Mettons cette expression sous une forme plus utile :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$u'(x) = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Étape 2 : dérivabilité de f

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition,

$$f = \arctan \circ u$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La formule de dérivation d'une composée donne

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}.$$

En remplaçant $u'(x)$ par l'expression précédente,

$$f'(x) = \frac{-\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{1 + u(x)^2}.$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1} [1 + u(x)^2]}.$$

Il reste à simplifier $1 + u(x)^2$.

Étape 3 : simplification de $1 + u(x)^2$

Rappelons que

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + u(x)^2 &= 1 + (\sqrt{x^2+1} - x)^2 \\ &= 1 + (x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2) \\ &= 2x^2 + 2 - 2x\sqrt{x^2+1}. \end{aligned}$$

Or

$$x^2 + 1 = (\sqrt{x^2+1})^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 + u(x)^2 &= 2(x^2 + 1) - 2x\sqrt{x^2+1} \\ &= 2\sqrt{x^2+1} (\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= 2\sqrt{x^2+1} u(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{1 + u(x)^2 = 2\sqrt{x^2+1} u(x).}$$

Comme $u(x) > 0$, nous pouvons simplifier par $u(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1} [2\sqrt{x^2+1} u(x)]} \\ &= -\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}}.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}}.$$

En particulier, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Démonstration de l'identité demandée

Nous devons montrer que, pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

Il existe deux méthodes naturelles. Nous présentons d'abord la méthode demandée par l'enchaînement des questions, fondée sur les dérivées.

Méthode 1 : comparaison de deux fonctions ayant la même dérivée

Définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$h(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

D'après la question 2,

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = h'(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la fonction $f - h$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$(f - h)'(x) = f'(x) - h'(x) = 0.$$

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Il existe donc une constante C telle que

$$f(x) - h(x) = C$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculons cette constante en prenant $x = 0$.

D'une part,

$$\begin{aligned} f(0) &= \arctan(\sqrt{0^2 + 1} - 0) \\ &= \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Donc

$$C = f(0) - h(0) = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = h(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

Méthode 2 : vérification trigonométrique directe

Cette seconde méthode permet de mieux comprendre l'identité.

Posons

$$\alpha = \arctan x.$$

Comme $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Ainsi,

$$x = \tan \alpha.$$

De plus, $\cos \alpha > 0$, donc

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} - x &= \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Or la formule de l'angle moitié donne

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Donc

$$\sqrt{1+x^2} - x = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Puisque

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

on a

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Cet angle appartient donc à l'intervalle de valeurs de la fonction arctan. Ainsi,

$$\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Comme $\alpha = \arctan x$, on retrouve

$$\boxed{\arctan(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.}$$

Bilan général

Pour la fonction

$$f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x),$$

nous avons démontré les résultats suivants :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2 + 1} - x > 0.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{\pi}{2} - f(x).$$

La courbe de f admet donc le point

$$I\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

comme centre de symétrie.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Enfin,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

Exercice 4

Correction intégralement détaillée

Sujet réécrit intégralement.

On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x.$$

- 1) Montrer que F est deux fois dérivable et que

$$F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x).$$

- 2) Étudier le sens de variation de F' , puis en déduire le signe de $F'(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- 3) En déduire que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi} x(\pi - x).$$

Préliminaires

La fonction F est une somme et un produit de fonctions usuelles :

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto \pi - x, \quad x \mapsto \sin x.$$

Ces fonctions sont dérivables autant de fois que nécessaire sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, F est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Idée directrice

La stratégie est la suivante :

1. calculer F' puis F'' ;
2. montrer que $F'' < 0$ sur tout l'intervalle, ce qui entraîne que F' est strictement décroissante ;
3. calculer $F'(0)$ et $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pour déterminer le signe de F' ;
4. en déduire que F est croissante et utiliser $F(0) = 0$ pour obtenir $F(x) \geq 0$;
5. transformer enfin $F(x) \geq 0$ en l'inégalité demandée.

1) Calcul de $F'(x)$ et de $F''(x)$

On part de

$$F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x.$$

Nous allons dériver séparément les deux termes.

Dérivée de $4x(\pi - x)$

Le facteur 4 est constant. Pour dériver $x(\pi - x)$, on peut soit utiliser la formule du produit, soit développer. Développons :

$$4x(\pi - x) = 4\pi x - 4x^2.$$

Donc

$$(4\pi x - 4x^2)' = 4\pi - 8x.$$

Ainsi,

$$(4x(\pi - x))' = 4\pi - 8x.$$

Dérivée de $-\pi \sin^2 x$

On écrit

$$\sin^2 x = (\sin x)^2.$$

La dérivée d'un carré u^2 est $2uu'$. Ici, $u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$. Par conséquent,

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x.$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

on obtient

$$(\sin^2 x)' = \sin 2x.$$

Donc

$$(-\pi \sin^2 x)' = -\pi \sin 2x.$$

Expression de $F'(x)$

En additionnant les dérivées obtenues,

$$F'(x) = 4\pi - 8x - \pi \sin 2x.$$

Nous dérivons une seconde fois :

$$F''(x) = (4\pi)' - (8x)' - \pi(\sin 2x)'.$$

Or

$$(4\pi)' = 0, \quad (8x)' = 8,$$

et, par la dérivation d'une fonction composée,

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x.$$

Ainsi,

$$F''(x) = -8 - 2\pi \cos 2x.$$

On factorise par -2 :

$$F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x).$$

Conclusion

La fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et

$$F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x).$$

2) Variations de F' et signe de F'

Pour étudier les variations de F' , nous devons étudier le signe de sa dérivée, c'est-à-dire le signe de F'' .

Nous savons que, pour tout réel t ,

$$-1 \leq \cos t \leq 1.$$

En particulier, pour $t = 2x$,

$$\cos 2x \geq -1.$$

En multipliant par $\pi > 0$,

$$\pi \cos 2x \geq -\pi.$$

Puis, en ajoutant 4,

$$4 + \pi \cos 2x \geq 4 - \pi.$$

Or

$$\pi < 4,$$

donc

$$4 - \pi > 0.$$

Par conséquent,

$$4 + \pi \cos 2x > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en particulier pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Puisque

$$F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x),$$

et puisque le facteur -2 est négatif, on obtient

$$F''(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Donc F' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Valeur de $F'(0)$

À partir de

$$F'(x) = 4\pi - 8x - \pi \sin 2x,$$

on obtient

$$F'(0) = 4\pi - 8 \times 0 - \pi \sin 0 = 4\pi.$$

Ainsi,

$$F'(0) = 4\pi > 0.$$

Valeur de $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

On remplace x par $\frac{\pi}{2}$:

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi - 8 \times \frac{\pi}{2} - \pi \sin \pi.$$

Or

$$8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi \quad \text{et} \quad \sin \pi = 0.$$

Donc

$$F' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4\pi - 4\pi = 0.$$

Ainsi,

$$F' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Comme F' est strictement décroissante et passe de la valeur 4π à la valeur 0, on a :

$$F'(x) > 0 \quad \text{pour } 0 \leq x < \frac{\pi}{2},$$

et

$$F' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Autrement dit,

$$F'(x) \geq 0 \quad \text{sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$F''(x)$	-		
$F'(x)$	4π	$\searrow$	0

Conclusion

$$F' \text{ est strictement décroissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

De plus,

$$F'(x) > 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{et} \quad F' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Par conséquent, F est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

3) Démonstration de l'inégalité

Nous venons de montrer que $F'(x) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. La fonction F est donc croissante sur cet intervalle.

Calculons sa valeur à l'origine :

$$F(0) = 4 \times 0 \times (\pi - 0) - \pi \sin^2 0 = 0.$$

Donc

$$F(0) = 0.$$

Puisque F est croissante et que $x \geq 0$, on a

$$F(x) \geq F(0) = 0.$$

Ainsi,

$$4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x \geq 0.$$

Transposons le terme $\pi \sin^2 x$ dans le membre de droite :

$$4x(\pi - x) \geq \pi \sin^2 x.$$

Comme $\pi > 0$, nous pouvons diviser les deux membres par π sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{4}{\pi}x(\pi - x) \geq \sin^2 x.$$

En inversant l'ordre des membres,

$$\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi}x(\pi - x).$$

Conclusion

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi}x(\pi - x).$$

L'égalité est réalisée pour $x = 0$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a même une inégalité stricte, car F est strictement croissante et $F(0) = 0$.

Synthèse finale

1. F est deux fois dérivable et

$$F'(x) = 4\pi - 8x - \pi \sin 2x, \quad F''(x) = -2(4 + \pi \cos 2x).$$

2. Puisque $4 + \pi \cos 2x \geq 4 - \pi > 0$, on a $F''(x) < 0$. Donc F' est strictement décroissante.
3. Comme $F'(0) = 4\pi$ et $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $F'(x) \geq 0$ sur l'intervalle.
4. Ainsi, F est croissante et $F(x) \geq F(0) = 0$.
5. Cette dernière inégalité équivaut exactement à

$$\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi}x(\pi - x).$$

Exercice 5 - Fonction réciproque

Sujet intégralement réécrit et correction entièrement détaillée

Énoncé. Soit h la fonction définie sur

$$D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

par

$$h(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

- 1) Montrer que h est une bijection de D vers un intervalle J à déterminer.
- 2) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J et que

$$\forall x \in J, \quad (h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

- 3) En déduire que

$$\forall x \in J, \quad h^{-1}(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Préliminaire : la fonction est-elle bien définie sur D ?

Pour tout

$$x \in D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

on a

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Sur cet intervalle, le cosinus est strictement positif :

$$\cos x > 0.$$

Le dénominateur de $h(x)$ n'est donc jamais nul sur D . Par conséquent, l'expression

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

a un sens pour tout $x \in D$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Comme le dénominateur ne s'annule pas sur D , la fonction quotient h est continue sur D et dérivable sur

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Elle est aussi dérivable à droite en 0.

1. Montrer que h est une bijection de D vers un intervalle J

1.1 Calcul détaillé de la dérivée

On pose

$$u(x) = 1 + \sin x, \quad v(x) = \cos x.$$

Alors

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

On a

$$u'(x) = \cos x$$

et

$$v'(x) = -\sin x.$$

La formule de dérivation d'un quotient donne

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - (1 + \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + (1 + \sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Or

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Donc

$$h'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{h'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}}.$$

1.2 Signe de la dérivée

Pour tout $x \in D$:

$$\sin x \geq 0,$$

donc

$$1 + \sin x \geq 1 > 0.$$

De plus,

$$\cos x > 0,$$

donc

$$\cos^2 x > 0.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} > 0.$$

Par conséquent, h est **strictement croissante** sur D .

$$\boxed{\forall x \in D, h'(x) > 0}$$

$\implies$

$$\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } D.}$$

1.3 Valeur de h à l'extrémité gauche

Calculons $h(0)$:

$$h(0) = \frac{1 + \sin 0}{\cos 0}.$$

Or

$$\sin 0 = 0 \quad \text{et} \quad \cos 0 = 1.$$

Donc

$$h(0) = \frac{1}{1} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{h(0) = 1}.$$

1.4 Limite de h lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$

Lorsque

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-,$$

on a

$$\sin x \rightarrow 1$$

et

$$\cos x \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent,

$$1 + \sin x \rightarrow 2 > 0$$

et le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty}.$$

1.5 Détermination de l'image de D

La fonction h est :

- continue sur D ;
- strictement croissante sur D ;
- telle que $h(0) = 1$;
- telle que $h(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$.

Elle prend donc toutes les valeurs réelles comprises entre 1 et $+\infty$. Comme 1 est atteint en $x = 0$, mais $+\infty$ n'est évidemment pas une valeur réelle atteinte, on obtient

$$h(D) = [1, +\infty[.$$

On pose donc

$$\boxed{J = [1, +\infty[}.$$

1.6 Justification complète de la bijectivité

Injectivité. Une fonction strictement croissante sur un intervalle est injective. En effet, si $x_1 < x_2$, alors

$$h(x_1) < h(x_2),$$

donc deux réels distincts de D ne peuvent pas avoir la même image.

Surjectivité sur J . Par définition de $J = h(D)$, chaque réel $y \in J$ possède au moins un antécédent $x \in D$ tel que

$$h(x) = y.$$

Ainsi, h est à la fois injective et surjective de D vers J .

$$h : D \longrightarrow J \text{ est bijective, } D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad J = [1, +\infty[.$$

2. Dérivabilité de h^{-1} et calcul de sa dérivée

Puisque h est bijective de D vers J , sa fonction réciproque

$$h^{-1} : J \longrightarrow D$$

est bien définie.

2.1 Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Le théorème utilisé est le suivant.

Méthode

Si une fonction h est bijective, dérivable en un point t et si $h'(t) \neq 0$, alors sa fonction réciproque est dérivable au point $h(t)$ et

$$(h^{-1})'(h(t)) = \frac{1}{h'(t)}.$$

De façon équivalente, pour $y \in J$ et $t = h^{-1}(y)$,

$$(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

Or nous avons montré que

$$h'(t) > 0$$

pour tout $t \in D$. En particulier,

$$h'(t) \neq 0.$$

Le théorème s'applique donc sur tout J (avec une dérivée à droite au point initial 1 si l'on considère l'extrémité de l'intervalle).

2.2 Établissement de la relation entre $h'(t)$ et $h(t)$

Pour obtenir une formule de $(h^{-1})'(y)$ uniquement en fonction de y , il faut exprimer $h'(t)$ en fonction de $h(t)$.

Nous savons que

$$h(t) = \frac{1 + \sin t}{\cos t}.$$

Calculons $1 + h(t)^2$:

$$\begin{aligned} 1 + h(t)^2 &= 1 + \left(\frac{1 + \sin t}{\cos t} \right)^2 \\ &= \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} \\ &= \frac{\cos^2 t + (1 + \sin t)^2}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

Développons le carré :

$$(1 + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t + \sin^2 t.$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos^2 t + (1 + \sin t)^2 &= \cos^2 t + 1 + 2 \sin t + \sin^2 t \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t) + 1 + 2 \sin t \\ &= 1 + 1 + 2 \sin t \\ &= 2(1 + \sin t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1 + h(t)^2 = \frac{2(1 + \sin t)}{\cos^2 t}.$$

Or

$$h'(t) = \frac{1 + \sin t}{\cos^2 t}.$$

Par conséquent,

$$1 + h(t)^2 = 2h'(t).$$

Donc

$$\boxed{h'(t) = \frac{1 + h(t)^2}{2}}.$$

2.3 Calcul de la dérivée de la réciproque

Soit $x \in J$. Posons

$$t = h^{-1}(x).$$

Alors

$$h(t) = x.$$

Le théorème de dérivation de la fonction réciproque donne

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(t)}.$$

Or

$$h'(t) = \frac{1 + h(t)^2}{2}.$$

Comme $h(t) = x$, on obtient

$$h'(t) = \frac{1 + x^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(x) &= \frac{1}{\frac{1+x^2}{2}} \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall x \in J, \quad (h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

3. Détermination explicite de h^{-1}

Nous savons maintenant que

$$(h^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Or la dérivée de la fonction arctangente est

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$(2 \arctan x)' = \frac{2}{1+x^2}.$$

Les fonctions

$$x \mapsto h^{-1}(x)$$

et

$$x \mapsto 2 \arctan x$$

ont donc la même dérivée sur J . Leur différence est constante sur J . Il existe ainsi un réel C tel que

$$h^{-1}(x) = 2 \arctan x + C.$$

3.1 Détermination de la constante

Nous avons montré que

$$h(0) = 1.$$

Par définition de la fonction réciproque,

$$h^{-1}(1) = 0.$$

En remplaçant x par 1 dans

$$h^{-1}(x) = 2 \arctan x + C,$$

on obtient

$$0 = 2 \arctan(1) + C.$$

Or

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$0 = 2 \times \frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{2} + C.$$

Ainsi,

$$C = -\frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$h^{-1}(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

3.2 Vérification de la cohérence des intervalles

Pour $x \in J = [1, +\infty[$, on a

$$\arctan x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Donc

$$2 \arctan x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

En soustrayant $\frac{\pi}{2}$,

$$2 \arctan x - \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[= D.$$

La formule obtenue envoie donc bien J dans D , comme doit le faire h^{-1} .

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad h^{-1}(x) = 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Bilan général

$$\begin{aligned} D &= \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, & J &= [1, +\infty[, \\ h : D &\rightarrow J \text{ est bijective,} \\ (h^{-1})'(x) &= \frac{2}{1+x^2}, \\ h^{-1}(x) &= 2 \arctan(x) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6 - Fonction réciproque du sinus

Sujet réécrit et correction intégralement détaillée

Énoncé. On considère la fonction G définie sur

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

par

$$G(x) = \sin x.$$

1) Montrer que G est bijective de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

2) Montrer que G^{-1} est dérivable sur $] -1, 1[$ et que, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$(G^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) On pose

$$h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x-1).$$

a) Montrer que le domaine de définition de h est $D = [0, 1]$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0, 1[$, puis calculer $h'(x)$.

c) Calculer $G^{-1}(1)$ et en déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x-1).$$

1) Bijection de G et détermination de J

La fonction G est définie par

$$G(x) = \sin x$$

sur l'intervalle fermé

$$I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a) Continuité

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc, en particulier, continue sur l'intervalle I .

b) Variation de G sur I

La fonction G est dérivable sur I et

$$G'(x) = \cos x.$$

Pour tout

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

on a

$$\cos x > 0.$$

Ainsi,

$$G'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Par conséquent, G est **strictement croissante** sur I .

On peut résumer cette variation par

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$G'(x)$		+
$G(x)$	-1	↗ 1

car

$$G\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

et

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

c) Image de I

Comme G est continue et strictement croissante sur I , son image est l'intervalle compris entre les images des extrémités :

$$G(I) = \left[G\left(-\frac{\pi}{2}\right), G\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = [-1, 1].$$

Ainsi,

$$J = [-1, 1].$$

d) Conclusion sur la bijectivité

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est injective. De plus, par définition de $J = G(I)$, la fonction G est surjective de I vers J .

Elle est donc bijective de I vers J .

Conclusion

$$G : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [-1, 1]$$

est bijective.

2) Dérivabilité et dérivée de G^{-1}

Puisque G est bijective de I vers $J = [-1, 1]$, sa fonction réciproque existe :

$$G^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Méthode / propriété utilisée

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I vers un intervalle J . Si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

De manière équivalente, pour $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Soit maintenant $x \in]-1, 1[$. Alors

$$G^{-1}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Sur cet intervalle ouvert, le cosinus est strictement positif. Donc

$$G'(G^{-1}(x)) = \cos(G^{-1}(x)) > 0.$$

En particulier, cette quantité n'est pas nulle. Le théorème de dérivation d'une fonction réciproque s'applique et donne

$$(G^{-1})'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(G^{-1}(x))}.$$

Il reste à exprimer ce cosinus en fonction de x .

Posons

$$t = G^{-1}(x).$$

Par définition de la fonction réciproque,

$$G(t) = x.$$

Or $G(t) = \sin t$, donc

$$\sin t = x.$$

À l'aide de l'identité

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t,$$

on obtient

$$\cos^2 t = 1 - x^2.$$

Comme

$$t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

on a $\cos t > 0$. Ainsi, on choisit la racine carrée positive :

$$\cos t = \sqrt{1 - x^2}.$$

Donc

$$\cos(G^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Finalement,

$$\boxed{(G^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

Point important

La formule précédente n'est valable que sur $] -1, 1[$. Aux points -1 et 1 , le dénominateur $\sqrt{1 - x^2}$ s'annule ; la fonction réciproque n'y est donc pas dérivable au sens usuel.

3) Étude de la fonction h

On pose

$$h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x - 1).$$

3.a) Domaine de définition de h

Pour que $h(x)$ soit défini, les deux expressions

$$G^{-1}(\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad G^{-1}(2x - 1)$$

doivent avoir un sens.

Or G^{-1} est définie exactement sur

$$J = [-1, 1].$$

Nous devons donc imposer simultanément

$$\sqrt{x} \in [-1, 1]$$

et

$$2x - 1 \in [-1, 1].$$

Première condition : $\sqrt{x} \in [-1, 1]$

La racine carrée $\sqrt{x}$ existe si et seulement si

$$x \geq 0.$$

De plus, lorsqu'elle existe, $\sqrt{x} \geq 0$. Ainsi,

$$\sqrt{x} \in [-1, 1]$$

équivalent à

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 1.$$

En élevant au carré, on obtient

$$0 \leq x \leq 1.$$

Donc la première condition donne

$$x \in [0, 1].$$

Deuxième condition : $2x - 1 \in [-1, 1]$

On doit avoir

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1.$$

Ajoutons 1 aux trois membres :

$$0 \leq 2x \leq 2.$$

Puis divisons par $2 > 0$:

$$0 \leq x \leq 1.$$

La deuxième condition donne donc également

$$x \in [0, 1].$$

Les deux conditions sont satisfaites simultanément exactement lorsque

$$x \in [0, 1].$$

Conclusion

Le domaine de définition de h est

$$D_h = [0, 1].$$

3.b) Dérivabilité de h sur $]0, 1[$ et calcul de $h'(x)$

Soit $x \in]0, 1[$.

Alors

$$0 < x < 1.$$

Il en résulte que

$$0 < \sqrt{x} < 1,$$

donc

$$\sqrt{x} \in]-1, 1[.$$

De même,

$$-1 < 2x - 1 < 1,$$

donc

$$2x - 1 \in]-1, 1[.$$

Ainsi, les fonctions composées

$$x \mapsto G^{-1}(\sqrt{x})$$

et

$$x \mapsto G^{-1}(2x - 1)$$

sont dérivables sur $]0, 1[$. Par conséquent, h est dérivable sur $]0, 1[$.

Calculons maintenant sa dérivée en utilisant uniquement la notation usuelle avec le symbole prime.

On a

$$h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x - 1).$$

Par dérivation d'une fonction composée,

$$h'(x) = 2 \left(G^{-1} \right)'(\sqrt{x}) (\sqrt{x})' - \left(G^{-1} \right)'(2x - 1) (2x - 1)'$$

Pour $x > 0$,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

et

$$(2x - 1)' = 2.$$

Par ailleurs, d'après la question 2,

$$\left(G^{-1} \right)'(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \text{pour } u \in]-1, 1[.$$

On obtient donc

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} \times 2.$$

Simplifions le premier terme. Comme

$$(\sqrt{x})^2 = x,$$

on a

$$2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}.$$

Simplifions maintenant le second radical :

$$1 - (2x - 1)^2 = 1 - (4x^2 - 4x + 1).$$

Donc

$$1 - (2x - 1)^2 = 1 - 4x^2 + 4x - 1 = 4x - 4x^2 = 4x(1 - x).$$

Comme $x \in]0, 1[$, on a $x > 0$ et $1 - x > 0$. Par conséquent,

$$\sqrt{4x(1-x)} = 2\sqrt{x(1-x)}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Or

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$$

car $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

Les deux termes de $h'(x)$ sont donc égaux :

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 0.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\boxed{h'(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.}$$

Conséquence : h est constante sur $[0, 1]$

La fonction h est continue sur $[0, 1]$:

- $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto 2x - 1$ sont continues sur $[0, 1]$;
- G^{-1} est continue sur $[-1, 1]$ puisqu'elle est la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone ;
- les sommes et différences de fonctions continues sont continues.

De plus, h est dérivable sur $]0, 1[$ et sa dérivée y est nulle.

Soient $a, b \in [0, 1]$ avec $a < b$. Le théorème des accroissements finis appliqué à h sur $[a, b]$ assure l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a).$$

Or $h'(c) = 0$. Donc

$$h(b) - h(a) = 0,$$

c'est-à-dire

$$h(b) = h(a).$$

Ainsi, h est constante sur tout l'intervalle $[0, 1]$.

Conclusion

h est constante sur $[0, 1]$.

3.c) Calcul de $G^{-1}(1)$ et déduction de l'identité

Étape 1 : calcul de $G^{-1}(1)$

Par définition de la fonction réciproque,

$$G^{-1}(1)$$

est l'unique réel $t \in I$ tel que

$$G(t) = 1.$$

Comme

$$G(t) = \sin t,$$

nous cherchons l'unique $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant

$$\sin t = 1.$$

Or

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Donc

$$G^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Étape 2 : détermination de la constante h

Nous avons démontré dans la question 3.b que h est constante sur $[0, 1]$.

Nous pouvons donc calculer cette constante en choisissant une valeur particulièrement simple, par

exemple $x = 1$.

On a

$$h(1) = 2G^{-1}(\sqrt{1}) - G^{-1}(2 \times 1 - 1).$$

Or

$$\sqrt{1} = 1 \quad \text{et} \quad 2 \times 1 - 1 = 1.$$

Donc

$$h(1) = 2G^{-1}(1) - G^{-1}(1) = G^{-1}(1).$$

D'après le calcul précédent,

$$h(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme h est constante sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$h(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Étape 3 : déduction explicite de l'égalité demandée

Par définition de h ,

$$h(x) = 2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x - 1).$$

D'autre part, nous venons de déduire que

$$h(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

En identifiant ces deux expressions de $h(x)$, on obtient

$$2G^{-1}(\sqrt{x}) - G^{-1}(2x - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Ajoutons $G^{-1}(2x - 1)$ aux deux membres :

$$2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x - 1).$$

Point important

L'égalité finale n'est pas obtenue par un nouveau calcul direct. Elle est bien une **déduction** des deux résultats précédents :

1. h est constante sur $[0, 1]$;

2. la valeur de cette constante est $h(1) = G^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.

En remplaçant ensuite $h(x)$ par sa définition, on déduit exactement l'identité demandée.

Conclusion

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x - 1).$$

Synthèse finale

$$J = [-1, 1]$$

$$(G^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } x \in]-1, 1[$$

$$D_h = [0, 1]$$

$$h'(x) = 0 \quad \text{pour } x \in]0, 1[$$

$$G^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$2G^{-1}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} + G^{-1}(2x - 1) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Exercice 7

Correction intégralement détaillée

Énoncé. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1) Montrer que

$$\exists c \in [a, b] \quad 2f(c) = f(a) + f(b).$$

2) On pose

$$g(x) = f(x) - f(c), \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Montrer que

$$\exists \alpha \in [a, b] \quad g(\alpha) = 0.$$

3) On suppose que $\alpha \neq c$. Dédurre que

$$\exists \beta \in [a, b] \quad f'(\beta) = 0.$$

Rappels utilisés

Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction u est continue sur un intervalle $[p, q]$, alors elle prend toute valeur comprise entre $u(p)$ et $u(q)$.

En particulier, si $u(p)u(q) \leq 0$, alors il existe $\xi \in [p, q]$ tel que $u(\xi) = 0$.

Théorème de Rolle

Si une fonction u est continue sur $[p, q]$, dérivable sur $]p, q[$ et vérifie $u(p) = u(q)$, alors il existe $\xi \in]p, q[$ tel que $u'(\xi) = 0$.

1) Existence de c tel que $2f(c) = f(a) + f(b)$

On cherche un réel $c \in [a, b]$ pour lequel

$$2f(c) = f(a) + f(b).$$

Cette égalité est équivalente à

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Le nombre

$$m = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

est la moyenne arithmétique des deux réels $f(a)$ et $f(b)$.

Nous allons montrer que m est toujours compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Premier cas : $f(a) \leq f(b)$

Dans ce cas,

$$f(a) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq f(b).$$

En effet,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{2} \geq 0$$

et

$$f(b) - \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2} \geq 0.$$

Donc m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = m = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Deuxième cas : $f(b) \leq f(a)$

De la même manière,

$$f(b) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq f(a).$$

La continuité de f sur $[a, b]$ permet encore d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Dans les deux cas,

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

En multipliant les deux membres par 2, on obtient

$$\boxed{2f(c) = f(a) + f(b)}.$$

Conclusion

Il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$\boxed{2f(c) = f(a) + f(b)}.$$

Cette existence résulte directement de la continuité de f et du théorème des valeurs intermédiaires.

2) Existence de α tel que $g(\alpha) = 0$

On définit sur $[a, b]$ la fonction

$$g(x) = f(x) - f(c).$$

Première observation : une solution est déjà connue

En prenant $x = c$, on obtient immédiatement

$$g(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Ainsi, le choix

$$\alpha = c$$

convient déjà. On peut donc écrire sans autre calcul :

$$\exists \alpha \in [a, b] \quad g(\alpha) = 0.$$

Cependant, pour préparer la question suivante, il est utile d'étudier également les valeurs de g aux extrémités a et b .

Calcul de $g(a)$ et de $g(b)$

D'après la question 1,

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(c) \\ &= f(a) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &= \frac{2f(a) - f(a) - f(b)}{2} \\ &= \frac{f(a) - f(b)}{2}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - f(c) \\ &= f(b) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &= \frac{2f(b) - f(a) - f(b)}{2} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{2}. \end{aligned}$$

On remarque donc que

$$g(b) = -g(a).$$

Par conséquent,

$$g(a)g(b) = -(g(a))^2 \leq 0.$$

Comme f est continue sur $[a, b]$, la fonction g , différence de la fonction continue f et de la constante $f(c)$, est également continue sur $[a, b]$.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g donne alors l'existence d'au moins un $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$g(\alpha) = 0.$$

Conclusion

Il existe au moins un $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$g(\alpha) = 0.$$

Le choix $\alpha = c$ convient toujours, puisque $g(c) = 0$. La question 3 ajoute l'hypothèse $\alpha \neq c$ afin de disposer de deux zéros distincts de g .

3) Dédution de l'existence de β tel que $f'(\beta) = 0$

On suppose maintenant que

$$\alpha \neq c.$$

D'après la question 2,

$$g(\alpha) = 0.$$

D'autre part, par définition de g ,

$$g(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Nous avons donc deux points distincts α et c tels que

$$g(\alpha) = g(c).$$

Pour appliquer proprement le théorème de Rolle, distinguons simplement l'ordre de ces deux réels.

Cas 1 : $\alpha < c$

La fonction g est continue sur $[\alpha, c]$ et dérivable sur $] \alpha, c[$, car f possède ces propriétés et $g = f - f(c)$.

De plus,

$$g(\alpha) = g(c) = 0.$$

Le théorème de Rolle assure donc l'existence d'un réel

$$\beta \in] \alpha, c[$$

tel que

$$g'(\beta) = 0.$$

Cas 2 : $c < \alpha$

De même, g est continue sur $[c, \alpha]$, dérivable sur $] c, \alpha[$ et

$$g(c) = g(\alpha) = 0.$$

Le théorème de Rolle donne alors un réel

$$\beta \in] c, \alpha[$$

tel que

$$g'(\beta) = 0.$$

Dans les deux cas, β appartient à l'intervalle ouvert situé entre α et c , donc nécessairement

$$\beta \in]a, b[\subset [a, b].$$

Passage de $g'(\beta) = 0$ à $f'(\beta) = 0$

La fonction g est définie par

$$g(x) = f(x) - f(c).$$

Le nombre $f(c)$ est une constante par rapport à x . Sa dérivée est donc nulle. Ainsi, pour tout $x \in]a, b[$,

$$g'(x) = f'(x).$$

En particulier,

$$g'(\beta) = f'(\beta).$$

Or le théorème de Rolle nous a donné

$$g'(\beta) = 0.$$

On en **déduit** donc que

$$\boxed{f'(\beta) = 0}.$$

Conclusion

L'hypothèse $\alpha \neq c$ fournit deux zéros distincts de g . Le théorème de Rolle appliqué à g entre ces deux zéros donne un réel β situé strictement entre α et c tel que $g'(\beta) = 0$. Comme $g' = f'$, on en déduit

$$\boxed{\exists \beta \in]a, b[\subset [a, b] \quad f'(\beta) = 0}.$$

L'égalité finale est bien une **déduction** de l'égalité $g'(\beta) = 0$ et de la relation $g'(x) = f'(x)$.

Synthèse de la démonstration

1. La moyenne $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Par continuité, elle est atteinte en un point $c \in [a, b]$.
2. La fonction $g(x) = f(x) - f(c)$ vérifie automatiquement $g(c) = 0$. De plus, $g(a)$ et $g(b)$ sont opposés, ce qui confirme l'existence d'un zéro de g .
3. Si un autre zéro α est distinct de c , alors $g(\alpha) = g(c) = 0$. Le théorème de Rolle donne un point β entre α et c tel que $g'(\beta) = 0$.
4. Puisque $g'(x) = f'(x)$, on déduit finalement que $f'(\beta) = 0$.

Exercice 8 - Correction intégralement détaillée

Énoncé réécrit sans omission

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, telle que

$$f(a) = f(b)$$

et

$$f'(a)f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f''(c) = 0.$$

Analyse préalable de l'énoncé

Avant de chercher une démonstration, il faut vérifier si la conclusion est réellement une conséquence des hypothèses.

L'énoncé affirme que les trois informations suivantes :

- f est deux fois dérivable sur $[a, b]$;
- $f(a) = f(b)$;
- $f'(a)f'(b) < 0$;

forcent nécessairement l'existence d'un point $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = 0$.

Nous allons montrer que ce n'est pas le cas.

La proposition est fausse telle qu'elle est écrite. Il est donc impossible d'en fournir une démonstration correcte. Pour le prouver rigoureusement, il suffit de construire un contre-exemple qui vérifie toutes les hypothèses, mais pas la conclusion.

Construction d'un contre-exemple

Choisissons l'intervalle

$$[a, b] = [0, 1]$$

et définissons

$$f(x) = x(1 - x) = x - x^2.$$

Cette fonction est un polynôme. Elle est donc dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$, et en particulier deux fois dérivable sur $[0, 1]$.

Vérification détaillée des hypothèses

1. Vérification de l'égalité $f(0) = f(1)$

Calculons d'abord $f(0)$:

$$f(0) = 0(1 - 0) = 0.$$

Calculons ensuite $f(1)$:

$$f(1) = 1(1 - 1) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(0) = f(1) = 0}.$$

La condition $f(a) = f(b)$ est donc bien vérifiée.

2. Calcul de la première dérivée

À partir de

$$f(x) = x - x^2,$$

on dérive terme à terme :

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

Aux extrémités de l'intervalle, on obtient :

$$f'(0) = 1 - 2 \times 0 = 1,$$

et

$$f'(1) = 1 - 2 \times 1 = -1.$$

Ainsi,

$$f'(0)f'(1) = 1 \times (-1) = -1 < 0.$$

Donc

$$\boxed{f'(0)f'(1) < 0}.$$

La deuxième hypothèse est elle aussi vérifiée.

3. Calcul de la seconde dérivée

Nous avons

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

En dérivant encore, on obtient

$$f''(x) = -2.$$

Cette valeur est constante et strictement négative sur tout $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f''(x) = -2 \neq 0.$$

Il n'existe donc aucun réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$f''(c) = 0.$$

La fonction $f(x) = x(1 - x)$ sur $[0, 1]$ vérifie bien toutes les hypothèses de l'énoncé, mais elle ne vérifie pas la conclusion. C'est donc un contre-exemple complet.

Conclusion logique

Nous avons vérifié :

$$f(0) = f(1),$$

$$f'(0)f'(1) < 0,$$

mais

$$f''(x) = -2 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

Par conséquent,

l'énoncé est faux tel qu'il est formulé.

Pourquoi le théorème de Rolle ne permet-il pas d'obtenir $f''(c) = 0$?

Puisque f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle permet seulement d'affirmer qu'il existe un réel $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f'(\xi) = 0.$$

C'est une conclusion concernant la première dérivée.

Pour appliquer ensuite le théorème de Rolle à la fonction f' , il faudrait disposer de deux points distincts u et v tels que

$$f'(u) = f'(v).$$

Or les informations

$$f'(a)f'(b) < 0$$

et

$$f'(\xi) = 0$$

ne garantissent pas l'existence de deux points distincts où f' prend la même valeur.

Dans le contre-exemple,

$$f'(x) = 1 - 2x,$$

qui est une fonction strictement décroissante sur $[0, 1]$. Une fonction strictement décroissante ne prend jamais deux fois la même valeur. Il est donc impossible d'appliquer le théorème de Rolle à f' sur un intervalle non réduit à un point.

Le théorème de Rolle appliqué à f donne bien un point où f' s'annule, mais cela ne suffit pas à produire un point où f'' s'annule.

Interprétation géométrique

La courbe de

$$f(x) = x(1 - x)$$

est une parabole tournée vers le bas.

Elle passe par les deux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$, donc les valeurs aux extrémités sont égales.

La pente vaut 1 en $x = 0$ et -1 en $x = 1$. Elle passe donc d'une valeur positive à une valeur négative. Cependant, cette pente décroît à vitesse constante, puisque

$$f''(x) = -2.$$

Le fait que la pente change de signe n'implique donc pas que sa vitesse de variation s'annule.

Une version correcte possible de l'énoncé

Une formulation correcte serait par exemple :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$. Supposons qu'il existe deux réels distincts $u, v \in [a, b]$ tels que

$$f'(u) = f'(v).$$

Montrer qu'il existe $c \in]u, v[$ tel que

$$f''(c) = 0.$$

En effet, la fonction f' est continue sur $[u, v]$ et dérivable sur $]u, v[$. Comme

$$f'(u) = f'(v),$$

le théorème de Rolle appliqué à f' garantit l'existence de $c \in]u, v[$ tel que

$$(f')'(c) = 0.$$

Or

$$(f')'(c) = f''(c).$$

On en déduit donc

$$f''(c) = 0.$$

Réponse finale

L'énoncé proposé est faux. Un contre-exemple est donné par

$$f(x) = x(1 - x) \quad \text{sur } [0, 1].$$

On a

$$f(0) = f(1), \quad f'(0)f'(1) < 0,$$

mais

$$f''(x) = -2 \neq 0$$

pour tout $x \in [0, 1]$. Il n'existe donc aucun $c \in]0, 1[$ tel que $f''(c) = 0$.