

EXERCICE 1

Étude détaillée de la dérivabilité en un point

Énoncé intégralement réécrit

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants :

1)

$$f(x) = 2x - \sqrt[3]{2-x} \quad \text{et} \quad a = 1.$$

2)

$$f(x) = \sqrt{2+x} \cos(\pi x) \quad \text{et} \quad a = -1.$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right), & x > 2, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 2, \end{cases} \quad \text{et} \quad a = 2.$$

Rappel utile

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a .

La fonction f est dérivable en a si la limite finie

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite est alors notée $f'(a)$.

Si a est une extrémité du domaine, on étudie la dérivabilité du côté où la fonction est définie.

Par exemple, si le domaine commence en a , on calcule

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Une limite infinie ne donne pas un nombre dérivé : la fonction n'est alors pas dérivable au sens usuel, même si la courbe peut posséder une demi-tangente verticale.

1) Étude de $f(x) = 2x - \sqrt[3]{2-x}$ au point $a = 1$

Étape 1 : domaine de définition

La racine cubique est définie pour tout réel. Ainsi,

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Le point 1 appartient à l'intérieur du domaine.

Étape 2 : dérivabilité au voisinage de 1

Écrivons

$$f(x) = 2x - (2-x)^{1/3}.$$

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto (2-x)^{1/3}$ est dérivable lorsque $2-x \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq 2$. En particulier, elle est dérivable dans un voisinage de 1.

Par conséquent, f est dérivable en 1.

Étape 3 : calcul de $f'(x)$

Pour $x \neq 2$,

$$\left((2-x)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(2-x)^{-2/3}(2-x)'.$$

Or

$$(2-x)' = -1.$$

Donc

$$\left((2-x)^{1/3}\right)' = -\frac{1}{3(2-x)^{2/3}}.$$

Comme $f(x) = 2x - (2-x)^{1/3}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \left(-\frac{1}{3(2-x)^{2/3}}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{3(2-x)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Étape 4 : valeur de $f'(1)$

En remplaçant x par 1 :

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 + \frac{1}{3(2-1)^{2/3}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 \times 1} \\ &= 2 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Calculons également le point de contact :

$$f(1) = 2 - \sqrt[3]{1} = 1.$$

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a donc pour équation

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{7}{3}(x-1).$$

On peut aussi écrire

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable en 1 et

$$f'(1) = \frac{7}{3}.$$

La tangente au point $A(1, 1)$ est

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}.$$

2) Étude de $f(x) = \sqrt{2+x} \cos(\pi x)$ au point $a = -1$

Étape 1 : domaine de définition

La racine carrée impose

$$2+x \geq 0,$$

donc

$$x \geq -2.$$

Ainsi,

$$D_f = [-2, +\infty[.$$

Le point -1 est strictement supérieur à -2 : il appartient donc à l'intérieur du domaine.

Étape 2 : justification de la dérivabilité

La fonction

$$x \mapsto \sqrt{2+x}$$

est dérivable lorsque $2+x > 0$, donc sur $] -2, +\infty[$.

La fonction

$$x \mapsto \cos(\pi x)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le produit de deux fonctions dérivables est dérivable. Par conséquent, f est dérivable en -1 .

Étape 3 : calcul de la dérivée

Posons

$$u(x) = \sqrt{2+x} \quad \text{et} \quad v(x) = \cos(\pi x).$$

Alors

$$f(x) = u(x)v(x).$$

Calculons les dérivées des deux facteurs.

Pour u :

$$u'(x) = \frac{(2+x)'}{2\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}.$$

Pour v :

$$v'(x) = -\sin(\pi x) (\pi x)' = -\pi \sin(\pi x).$$

La formule du produit donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{\cos(\pi x)}{2\sqrt{2+x}} - \pi\sqrt{2+x} \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Étape 4 : calcul de $f'(-1)$

Nous avons

$$2 + (-1) = 1, \quad \sqrt{1} = 1, \\ \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1,$$

et

$$\sin(-\pi) = 0.$$

Ainsi,

$$f'(-1) = \frac{-1}{2 \times 1} - \pi \times 1 \times 0 \\ = -\frac{1}{2}.$$

Calculons la valeur de la fonction :

$$f(-1) = \sqrt{1} \cos(-\pi) = -1.$$

La tangente au point d'abscisse -1 a pour équation

$$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1) \\ = -1 - \frac{1}{2}(x + 1) \\ = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable en -1 et

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

La tangente au point $B(-1, -1)$ est

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

3) Étude de la fonction définie par morceaux au point $a = 2$

La fonction est définie sur

$$D_f = [2, +\infty[.$$

Le point 2 est l'extrémité gauche du domaine. Nous devons donc étudier la continuité à droite, puis la dérivabilité à droite.

Étape 1 : continuité à droite en 2

Pour $x > 2$,

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow 2^+$, nous avons

$$x \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x-2} \rightarrow 0^+.$$

Par conséquent,

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}} \rightarrow +\infty.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(2).$$

La fonction est donc continue à droite en 2.

Étape 2 : écriture du taux d'accroissement à droite

Par définition,

$$f'_d(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2},$$

si cette limite existe et est finie.

Ici,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right) - \frac{\pi}{2}}{x - 2}.$$

Pour simplifier, posons

$$t = \sqrt{x-2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 2^+$, on a $t \rightarrow 0^+$, et

$$x = t^2 + 2, \quad x - 2 = t^2.$$

De plus,

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{t^2 + 2}{t}.$$

Le taux d'accroissement devient alors

$$\frac{\arctan\left(\frac{t^2 + 2}{t}\right) - \frac{\pi}{2}}{t^2}.$$

Étape 3 : utilisation d'une identité sur arctan

Pour tout réel $U > 0$,

$$\arctan U + \arctan\left(\frac{1}{U}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\arctan U - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{U}\right).$$

Ici,

$$U = \frac{t^2 + 2}{t} > 0,$$

donc

$$\frac{1}{U} = \frac{t}{t^2 + 2}.$$

Ainsi,

$$\arctan\left(\frac{t^2 + 2}{t}\right) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{t}{t^2 + 2}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{\arctan\left(\frac{t}{t^2 + 2}\right)}{t^2}.$$

Étape 4 : calcul précis de la limite

Posons

$$u_t = \frac{t}{t^2 + 2}.$$

Lorsque $t \rightarrow 0^+$,

$$u_t \rightarrow 0^+.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} -\frac{\arctan(u_t)}{t^2} &= -\frac{\arctan(u_t)}{u_t} \times \frac{u_t}{t^2} \\ &= -\frac{\arctan(u_t)}{u_t} \times \frac{1}{t(t^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Or la limite usuelle donne

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1.$$

Donc

$$\frac{\arctan(u_t)}{u_t} \rightarrow 1.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{t(t^2 + 2)} \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow 0^+),$$

car le dénominateur est positif et tend vers 0.

Par produit,

$$-\frac{\arctan(u_t)}{t^2} \rightarrow -\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\infty.$$

Point important

La limite du taux d'accroissement n'est pas un nombre réel fini. Par conséquent, la fonction n'est pas dérivable à droite en 2 au sens usuel.

Cependant, cette limite égale à $-\infty$ signifie géométriquement que la courbe admet au point

$$C\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$$

une demi-tangente verticale, d'équation

$$x = 2.$$

Conclusion

La fonction est continue à droite en 2, mais elle n'est pas dérivable à droite en 2, car

$$f'_d(2) = -\infty$$

au sens d'une limite infinie du taux d'accroissement.

La courbe possède une demi-tangente verticale au point

$$C\left(2, \frac{\pi}{2}\right),$$

d'équation

$$x = 2.$$

Synthèse finale

Cas	Dérivabilité au point étudié	Résultat
1	Oui, en 1	$f'(1) = \frac{7}{3}$
2	Oui, en -1	$f'(-1) = -\frac{1}{2}$
3	Non, à droite en 2	Taux d'accroissement $\rightarrow -\infty$

EXERCICE 2

Limites, continuité et dérivabilité

Énoncé intégralement réécrit

1) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sin x$$

n'admet pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

2) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable en $a = 0$.

b) Calculer la dérivée $f'(x)$. La fonction f' admet-elle une limite au point $a = 0$?

Remarque importante

L'énoncé contient vraisemblablement une erreur typographique. Avec la fonction réellement écrite,

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

la fonction f est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. Nous allons le démontrer rigoureusement. Une version probablement voulue, avec $x^2 \cos(1/x)$, est étudiée à la fin.

1. La fonction $g(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$

Méthode

Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en $+\infty$, il suffit de trouver deux suites qui tendent vers $+\infty$ mais dont les images ont deux limites différentes.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$u_n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow +\infty.$$

Calculons les images :

$$g(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1,$$

car le sinus est 2π -périodique, et

$$g(v_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1.$$

Ainsi,

$$g(u_n) \rightarrow 1 \quad \text{tandis que} \quad g(v_n) \rightarrow -1.$$

Si g possédait une limite L en $+\infty$, alors l'image de toute suite tendant vers $+\infty$ devrait tendre vers L . Ici, deux suites conduisent à deux limites différentes. C'est impossible.

Conclusion

La fonction $g(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. La fonction $g(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $-\infty$

Posons maintenant

$$a_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3\pi}{2} - 2n\pi.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$a_n \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad b_n \rightarrow -\infty.$$

Mais

$$g(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = 1$$

et

$$g(b_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2n\pi\right) = -1.$$

Donc les deux suites d'images convergent encore vers deux valeurs distinctes.

Conclusion

La fonction $g(x) = \sin x$ n'admet pas de limite en $-\infty$.

3. Étude préalable de la continuité de f en 0

On a, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1,$$

on obtient

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1.$$

Ainsi,

$$|f(x)| = \left|x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Donc

$$0 \leq |f(x)| \leq |x|.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Conclusion

La fonction f est continue en 0.

4. Étude de la dérivabilité de f en 0

Par définition, f est dérivable en 0 si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x \cos(1/x)$ et $f(0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{x \cos(1/x)}{x} \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Il faut donc étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Choisissons deux suites tendant vers 0 :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}, \quad n \geq 1.$$

Alors

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow 0.$$

Mais

$$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1,$$

tandis que

$$\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Le taux d'accroissement possède donc deux comportements incompatibles selon la suite choisie. Il n'a pas de limite en 0.

Remarque importante

La fonction f n'est pas dérivable en 0. La consigne « montrer que f est dérivable en 0 » est donc fausse pour la fonction telle qu'elle apparaît sur l'image.

5. Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$

Pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors

$$u'(x) = 1.$$

Pour dériver v , posons

$$w(x) = \frac{1}{x}.$$

On a

$$w'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Comme la dérivée de $\cos t$ est $-\sin t$, la dérivation d'une fonction composée donne

$$\begin{aligned} v'(x) &= -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\sin(1/x)}{x^2}. \end{aligned}$$

La formule du produit donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \frac{\sin(1/x)}{x^2} \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(1/x)}{x}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(1/x)}{x}.$$

Il n'existe pas de valeur $f'(0)$, puisque f n'est pas dérivable en 0.

6. La fonction f' admet-elle une limite en 0 ?

Pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(1/x)}{x}.$$

Le premier terme est borné entre -1 et 1 . Le second terme peut, lui, devenir arbitrairement grand en valeur absolue.

Prenons

$$p_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Alors $p_n \rightarrow 0^+$ et

$$\sin\left(\frac{1}{p_n}\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{1}{p_n}\right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(p_n) &= 0 + \frac{1}{p_n} \\ &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Prenons maintenant

$$q_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Alors $q_n \rightarrow 0^+$ et

$$\sin\left(\frac{1}{q_n}\right) = -1, \quad \cos\left(\frac{1}{q_n}\right) = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(q_n) &= 0 - \frac{1}{q_n} \\ &= -\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) \\ &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Le long de deux suites tendant toutes deux vers 0^+ , la fonction f' tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

Conclusion

La fonction f' n'admet aucune limite en 0, ni finie ni infinie.

7. Bilan de l'énoncé tel qu'il est écrit

Question	Résultat correct
Limite de $\sin x$ en $+\infty$	Elle n'existe pas.
Limite de $\sin x$ en $-\infty$	Elle n'existe pas.
Continuité de f en 0	f est continue en 0.
Dérivabilité de f en 0	f n'est pas dérivable en 0.
Dérivée pour $x \neq 0$	$f'(x) = \cos(1/x) + \frac{\sin(1/x)}{x}$.
Limite de f' en 0	Elle n'existe pas.

8. Version probablement voulue : $f(x) = x^2 \cos(1/x)$

Remarque importante

Cette section ne remplace pas l'énoncé photographié. Elle expose seulement la correction typographique la plus probable.

Supposons que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Le taux d'accroissement en 0 vaut

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} \\ &= x \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Comme $|x| \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc, dans cette version,

$$\boxed{f'(0) = 0}.$$

Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \frac{\sin(1/x)}{x^2} \\ &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0, mais le second oscille entre -1 et 1 . Ainsi f' n'admet toujours pas de limite en 0.

Conclusion

La photographie contient très probablement une coquille : avec le facteur x , la fonction est continue mais non dérivable en 0 ; avec le facteur x^2 , elle est dérivable en 0, ce qui correspond à l'objectif pédagogique annoncé.

EXERCICE 3 - CORRECTION INTÉGRALEMENT DÉTAILLÉE

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction dérivable au point $x_0 = 0$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = n!$$

où

$$\prod_{k=1}^n f(kx) = f(x)f(2x) \cdots f(nx).$$

1. Exploitation précise de la dérivabilité de f en 0

Puisque f est dérivable en 0, le nombre dérivé $f'(0)$ est défini par

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}.$$

Or l'énoncé donne $f(0) = 0$. On obtient donc

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}.$$

Comme $f'(0) = 1$, il vient

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1.$$

Rappel essentiel

Cette limite est la seule information fondamentale dont nous avons besoin. Elle signifie que, lorsque t est proche de 0, le quotient $f(t)/t$ est proche de 1.

On peut également écrire, pour $t \neq 0$,

$$f(t) = t \frac{f(t)}{t}.$$

Comme $\frac{f(t)}{t} \rightarrow 1$, cette écriture montre que $f(t)$ se comporte comme t au voisinage de 0.

2. Étude d'un facteur général $f(kx)$

Fixons un entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Lorsque $x \rightarrow 0$, le nombre k étant fixe, on a

$$kx \rightarrow 0.$$

Nous allons étudier le quotient $\frac{f(kx)}{x}$.

Pour $x \neq 0$, on écrit

$$\frac{f(kx)}{x} = \frac{f(kx)}{kx} \times k.$$

En effet,

$$\frac{f(kx)}{kx} \times k = \frac{kf(kx)}{kx} = \frac{f(kx)}{x}.$$

Posons $t = kx$. Alors $t \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Par le résultat obtenu précédemment,

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow 1.$$

En remplaçant t par kx , on obtient

$$\frac{f(kx)}{kx} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{f(kx)}{x} = k \frac{f(kx)}{kx} \longrightarrow k \times 1 = k.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(kx)}{x} = k.$$

En particulier,

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{f(2x)}{x} \rightarrow 2, \quad \dots, \quad \frac{f(nx)}{x} \rightarrow n.$$

3. Transformation exacte de l'expression demandée

Pour $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = \frac{f(x)f(2x) \cdots f(nx)}{x \times x \times \cdots \times x}.$$

Il y a exactement n facteurs x au dénominateur. On peut donc associer un facteur x à chaque facteur du numérateur :

$$\frac{f(x)f(2x) \cdots f(nx)}{x^n} = \frac{f(x)}{x} \times \frac{f(2x)}{x} \times \cdots \times \frac{f(nx)}{x}.$$

Sous la notation produit,

$$\frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = \prod_{k=1}^n \frac{f(kx)}{x}.$$

4. Passage à la limite dans le produit fini

Le produit contient un nombre fini de facteurs, puisque n est un entier fixé. Nous pouvons donc utiliser la propriété suivante : la limite d'un produit fini est égale au produit des limites, lorsque chacune de ces limites existe et est finie.

Nous avons démontré que, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(kx)}{x} = k.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{f(kx)}{x} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(kx)}{x} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n k.\end{aligned}$$

Or, par définition de la factorielle,

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!.$$

Nous obtenons donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = n!.$$

Conclusion

La dérivabilité de f en 0, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donne

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow 1.$$

Ainsi, pour chaque entier k fixé,

$$\frac{f(kx)}{x} = k \frac{f(kx)}{kx} \rightarrow k.$$

Le produit des n limites vaut alors

$$1 \times 2 \times \cdots \times n = n!.$$

D'où le résultat demandé.

5. Deuxième démonstration, encore plus structurée

Définissons, pour $t \neq 0$,

$$u(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

D'après la dérivabilité de f en 0,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 1.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et pour $x \neq 0$,

$$f(kx) = kx u(kx).$$

Alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n f(kx) &= \prod_{k=1}^n (kx u(kx)) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n k \right) \left(\prod_{k=1}^n x \right) \left(\prod_{k=1}^n u(kx) \right) \\ &= n! x^n \prod_{k=1}^n u(kx). \end{aligned}$$

En divisant par x^n ,

$$\frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = n! \prod_{k=1}^n u(kx).$$

Pour chaque k fixé, $kx \rightarrow 0$, donc

$$u(kx) \rightarrow 1.$$

Comme le produit est fini,

$$\prod_{k=1}^n u(kx) \rightarrow 1^n = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^n f(kx)}{x^n} = n! \times 1 = n!.$$

6. Vérification sur quelques valeurs de n

n	Expression	Limite
1	$\frac{f(x)}{x}$	$1 = 1!$
2	$\frac{f(x)f(2x)}{x^2}$	$1 \times 2 = 2!$
3	$\frac{f(x)f(2x)f(3x)}{x^3}$	$1 \times 2 \times 3 = 3!$

Ces vérifications illustrent le mécanisme général, mais elles ne remplacent pas la démonstration pour un entier n quelconque.

7. Idée essentielle à retenir

L'égalité $f'(0) = 1$ signifie précisément

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \rightarrow 1.$$

Comme $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1.$$

Chaque facteur $f(kx)$ fournit alors un facteur k après division par x . Le produit de tous ces facteurs est

$$1 \times 2 \times \cdots \times n = n!.$$

EXERCICE 4

Correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

1) Montrer que

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

2) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Préliminaire : le théorème des accroissements finis

Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Dans notre situation, f est dérivable sur $[a, b]$. En particulier, elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Les hypothèses du théorème des accroissements finis sont donc satisfaites.

1) Encadrement de $f(b) - f(a)$

Nous supposons, comme il est usuel pour un intervalle $[a, b]$, que $a \leq b$. Ainsi,

$$b - a \geq 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Or l'hypothèse de l'énoncé affirme que

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leq f'(x) \leq M.$$

En particulier, puisque $c \in]a, b[\subset [a, b]$, nous avons

$$m \leq f'(c) \leq M.$$

Comme $b - a \geq 0$, nous pouvons multiplier les trois membres de cette double inégalité par $b - a$ sans changer le sens des inégalités :

$$m(b-a) \leq f'(c)(b-a) \leq M(b-a).$$

Mais le théorème des accroissements finis nous a donné

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

En remplaçant le terme central, nous obtenons

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Ainsi, lorsque la dérivée est encadrée entre m et M sur $[a, b]$, l'accroissement de la fonction entre a et b est encadré par les accroissements des fonctions affines de pentes m et M .

Interprétation géométrique

Le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

représente le coefficient directeur de la droite sécante reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. L'inégalité précédente équivaut, lorsque $a < b$, à

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Autrement dit, la pente moyenne de la courbe entre a et b est elle aussi comprise entre m et M .

2) Encadrement de $\sqrt{1+x}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Nous voulons démontrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Étape 1 : choix de la fonction

Considérons la fonction

$$g(t) = \sqrt{1+t}.$$

Elle est définie et dérivable pour $t > -1$. En particulier, elle est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Sa dérivée est

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}.$$

Étape 2 : encadrement précis de $g'(t)$

Soit $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Alors

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

En ajoutant 1 aux trois membres, on obtient

$$1 \leq 1+t \leq \frac{3}{2}.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$,

$$1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Toutes les quantités étant strictement positives, l'inversion renverse le sens des inégalités :

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq \frac{1}{\sqrt{3/2}}.$$

En remettant les termes dans l'ordre croissant,

$$\frac{1}{\sqrt{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1.$$

Puis en divisant par $2 > 0$,

$$\frac{1}{2\sqrt{3/2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2}.$$

Simplifions le membre de gauche :

$$2\sqrt{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \leq g'(t) \leq \frac{1}{2}.$$

Étape 3 : application du résultat de la question 1

Fixons maintenant un réel

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Nous appliquons la question 1 à la fonction g sur l'intervalle $[0, x]$.

Sur cet intervalle, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq g'(t) \leq \frac{1}{2}.$$

Nous pouvons donc choisir

$$m = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad M = \frac{1}{2},$$

et utiliser $a = 0$, $b = x$ dans l'inégalité démontrée à la question 1 :

$$m(x - 0) \leq g(x) - g(0) \leq M(x - 0).$$

Ainsi,

$$\frac{x}{\sqrt{6}} \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x}{2}.$$

Or

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

et

$$g(0) = \sqrt{1} = 1.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}.$$

Enfin, en ajoutant 1 aux trois membres,

$$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Cette inégalité est une conséquence directe de l'encadrement de la dérivée de $t \mapsto \sqrt{1+t}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Vérification aux extrémités

Pour $x = 0$

Les trois termes valent 1 :

$$1 + \frac{0}{\sqrt{6}} = \sqrt{1+0} = 1 + \frac{0}{2} = 1.$$

Il y a donc égalité des deux côtés.

Pour $x = \frac{1}{2}$

L'encadrement devient

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{5}{4}.$$

Il est cohérent avec les valeurs numériques approximatives

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{6}} \approx 1,2041, \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,2247, \quad \frac{5}{4} = 1,25.$$

Bilan général

Résultat	Idée essentielle
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$	Appliquer le théorème des accroissements finis, puis utiliser $m \leq f'(c) \leq M$.
$1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$	Appliquer le résultat précédent à $g(t) = \sqrt{1+t}$, dont la dérivée est comprise entre $1/\sqrt{6}$ et $1/2$ sur $[0, 1/2]$.

EXERCICE 5**Énoncé intégralement réécrit**

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$f'_d(0) = f(1) = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Lecture attentive de l'énoncé

La notation $f'_d(0)$ désigne le *nombre dérivé à droite* de f en 0 :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

L'hypothèse $f'_d(0) = 0$ ne signifie donc pas que $f(0) = 0$. Elle signifie seulement que le taux d'accroissement à droite de f en 0 tend vers 0.

Or la conclusion demandée fait apparaître le quotient $\frac{f(c)}{c}$. L'idée naturelle serait d'introduire la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

mais pour prolonger cette fonction en 0 par continuité, il faudrait normalement connaître $f(0) = 0$. Cette information n'apparaît pas dans l'énoncé.

Attention : analyse de l'énoncé

L'énoncé est faux tel qu'il est écrit. Nous allons le démontrer par un contre-exemple rigoureux. Ensuite, nous proposerons la correction vraisemblable de l'énoncé et nous la démontrerons intégralement.

2. Contre-exemple : l'énoncé est faux

Considérons la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Cette fonction est polynomiale ; elle est donc dérivable sur $[0, 1]$.

2.1. Vérification de l'hypothèse $f'_d(0) = 0$

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -2x.$$

En particulier,

$$f'_d(0) = f'(0) = 0.$$

2.2. Vérification de l'hypothèse $f(1) = 0$

On a

$$f(1) = 1 - 1^2 = 0.$$

Ainsi, la fonction $f(x) = 1 - x^2$ satisfait bien toutes les hypothèses écrites dans l'énoncé.

2.3. Vérification de la conclusion demandée

Supposons qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Pour notre fonction,

$$f'(c) = -2c \quad \text{et} \quad f(c) = 1 - c^2.$$

L'égalité demandée deviendrait donc

$$-2c = \frac{1 - c^2}{c}.$$

Comme $c \in]0, 1[$, on a $c > 0$, donc on peut multiplier les deux membres par c :

$$-2c^2 = 1 - c^2.$$

En ajoutant c^2 aux deux membres, on obtient

$$-c^2 = 1.$$

Cette égalité est impossible, car $c^2 \geq 0$, donc $-c^2 \leq 0$, alors que $1 > 0$.

Conclusion

La fonction $f(x) = 1 - x^2$ vérifie bien $f'_d(0) = 0$ et $f(1) = 0$, mais aucun $c \in]0, 1[$ ne vérifie

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

L'énoncé est donc faux tel qu'il est rédigé.

3. Version vraisemblablement correcte de l'énoncé

L'hypothèse probablement oubliée est

$$f(0) = 0.$$

Une version correcte serait alors la suivante.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et dérivable à droite en 0, telle que

$$f(0) = 0, \quad f'_d(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

4. Démonstration complète de la version corrigée

4.1. Choix de la fonction auxiliaire

Nous cherchons à obtenir une égalité de la forme

$$cf'(c) - f(c) = 0.$$

Or cette expression apparaît naturellement dans la dérivée du quotient $\frac{f(x)}{x}$.

Pour $x \in]0, 1]$, posons donc

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

4.2. Prolongement de g en 0

Comme $f(0) = 0$, la définition du nombre dérivé à droite donne

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}.$$

Or l'hypothèse fournit $f'_d(0) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Nous pouvons donc prolonger g en 0 en posant

$$g(0) = 0.$$

Avec cette définition, g est continue en 0.

Sur $]0, 1]$, la fonction g est quotient de deux fonctions continues et le dénominateur x ne s'annule pas. Donc g est continue sur $]0, 1]$.

Par conséquent,

$$g \text{ est continue sur } [0, 1].$$

4.3. Valeurs de g aux extrémités

Par définition,

$$g(0) = 0.$$

D'autre part, comme $f(1) = 0$,

$$g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0.$$

Ainsi,

$$g(0) = g(1).$$

4.4. Dérivabilité de g sur $]0, 1[$

Sur $]0, 1[$, la fonction f est dérivable, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas. La fonction g est donc dérivable sur $]0, 1[$.

La formule de dérivation d'un quotient donne

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

4.5. Application du théorème de Rolle

Nous avons vérifié que :

- g est continue sur $[0, 1]$;
- g est dérivable sur $]0, 1[$;
- $g(0) = g(1)$.

Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont donc satisfaites. Il existe alors un réel

$$c \in]0, 1[$$

tel que

$$g'(c) = 0.$$

En remplaçant $g'(c)$ par son expression, on obtient

$$\frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0.$$

Comme $c \in]0, 1[$, on a $c \neq 0$, donc $c^2 > 0$. Une fraction dont le dénominateur est non nul est égale

à zéro si et seulement si son numérateur est nul. Ainsi,

$$cf'(c) - f(c) = 0.$$

Donc

$$cf'(c) = f(c).$$

Enfin, comme $c \neq 0$, nous pouvons diviser par c :

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Conclusion

Sous l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$, le résultat est vrai. Il est obtenu en appliquant le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

prolongée en 0 par $g(0) = 0$.

5. Bilan final

Élément	Résultat
Énoncé photographié	Faux tel qu'il est écrit.
Contre-exemple	$f(x) = 1 - x^2$.
Hypothèse manquante probable	$f(0) = 0$.
Fonction auxiliaire	$g(x) = \frac{f(x)}{x}$, prolongée par $g(0) = 0$.
Théorème utilisé	Théorème de Rolle.
Conclusion correcte	Il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

EXERCICE 6 - CORRECTION INTÉGRALEMENT DÉTAILLÉE

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'_d(0) = 0, \\ \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } f(a)f'(a) < 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

1. Lecture précise des hypothèses

L'ensemble $\mathbb{R}_+$ désigne $[0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^*$ désigne $]0, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Cela signifie qu'elle est dérivable en tout point strictement positif et qu'elle admet en 0 une dérivée à droite.

Les deux premières données sont

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'_d(0) = 0.$$

Par définition de la dérivée à droite,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0. \quad (1)$$

La troisième donnée affirme qu'il existe $a > 0$ tel que

$$f(a)f'(a) < 0.$$

Ainsi, $f(a)$ et $f'(a)$ sont non nuls et de signes contraires. Deux cas seulement sont possibles :

$$f(a) > 0 \text{ et } f'(a) < 0$$

ou

$$f(a) < 0 \text{ et } f'(a) > 0.$$

Idée de la démonstration

Nous allons choisir un point x_0 très proche de 0 pour lequel $f(x_0)$ est très proche de 0, puis un point x_1 très proche de a pour lequel $f(x_1)$ se trouve de l'autre côté de la valeur $f(a)$. Le TVI donnera alors un point b tel que $f(b) = f(a)$, puis le théorème de Rolle appliqué sur $[b, a]$ fournira un point c tel que $f'(c) = 0$.

2. Conséquence de $f(0) = 0$ et de $f'_d(0) = 0$

À partir de (1), nous allons montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+ .

En effet,

$$f(x) = x \frac{f(x)}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0.$$

Par produit des limites,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.} \quad (2)$$

Cette conclusion utilise bien les deux données $f(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0$.

3. Premier cas : $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$

3.1. Choix d'un point x_0 proche de 0

D'après (2), on a $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Comme $f(a) > 0$, prenons

$$\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

Il existe alors $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \delta_0[$,

$$|f(x)| < \frac{f(a)}{2}.$$

Choisissons

$$x_0 \in]0, \min(\delta_0, a)[.$$

Alors

$$|f(x_0)| < \frac{f(a)}{2}.$$

En particulier,

$$f(x_0) \leq |f(x_0)| < \frac{f(a)}{2} < f(a).$$

Donc

$$\boxed{f(x_0) < f(a).} \quad (3)$$

3.2. Choix d'un point x_1 proche de a

Comme $f'(a) < 0$, choisissons

$$\varepsilon = -\frac{f'(a)}{2} > 0.$$

Par définition de la dérivée en a , il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout x vérifiant

$$0 < |x - a| < \delta_1,$$

on ait

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < -\frac{f'(a)}{2}.$$

Cette inégalité implique

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a) - \frac{f'(a)}{2} = \frac{f'(a)}{2} < 0.$$

Choisissons maintenant x_1 tel que

$$\max(x_0, a - \delta_1) < x_1 < a.$$

Alors $x_1 - a < 0$ et

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < 0.$$

Le dénominateur étant négatif, le numérateur doit être positif. Ainsi,

$$f(x_1) - f(a) > 0,$$

donc

$$\boxed{f(x_1) > f(a)}. \quad (4)$$

3.3. Application du TVI

D'après (3) et (4),

$$f(x_0) < f(a) < f(x_1).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc continue sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $[x_0, x_1]$.

Le nombre $f(a)$ est compris entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe

$$b \in]x_0, x_1[$$

tel que

$$\boxed{f(b) = f(a)}. \quad (5)$$

Comme $0 < x_0 < b < x_1 < a$, nous avons bien

$$0 < b < a.$$

3.4. Application du théorème de Rolle

La fonction f est continue sur $[b, a]$, dérivable sur $]b, a[$ et vérifie, d'après (5),

$$f(b) = f(a).$$

Le théorème de Rolle assure donc l'existence d'un réel

$$c \in]b, a[$$

tel que

$$f'(c) = 0.$$

Puisque $b > 0$, on a $c > 0$, donc $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Conclusion

Dans le premier cas, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

4. Deuxième cas : $f(a) < 0$ et $f'(a) > 0$

4.1. Choix d'un point x_0 proche de 0

Comme $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et comme $f(a) < 0$, prenons

$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0.$$

Il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \delta_0[$,

$$|f(x)| < \frac{|f(a)|}{2}.$$

Choisissons $x_0 \in]0, \min(\delta_0, a)[$. Alors

$$f(x_0) \geq -|f(x_0)| > -\frac{|f(a)|}{2}.$$

Or, puisque $f(a) < 0$,

$$f(a) = -|f(a)| < -\frac{|f(a)|}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x_0) > f(a)}. \quad (6)$$

4.2. Choix d'un point x_1 proche de a

Comme $f'(a) > 0$, choisissons

$$\varepsilon = \frac{f'(a)}{2} > 0.$$

Par définition de la dérivée en a , il existe $\delta_1 > 0$ tel que, lorsque

$$0 < |x - a| < \delta_1,$$

on ait

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \frac{f'(a)}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) - \frac{f'(a)}{2} = \frac{f'(a)}{2} > 0.$$

Choisissons x_1 tel que

$$\max(x_0, a - \delta_1) < x_1 < a.$$

Alors $x_1 - a < 0$ et

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > 0.$$

Le dénominateur étant négatif, le numérateur doit être négatif. Par conséquent,

$$f(x_1) - f(a) < 0,$$

donc

$$\boxed{f(x_1) < f(a)}. \quad (7)$$

4.3. Application du TVI puis du théorème de Rolle

D'après (6) et (7),

$$f(x_1) < f(a) < f(x_0).$$

La fonction f est continue sur $[x_0, x_1]$. Le TVI fournit donc un réel

$$b \in]x_0, x_1[$$

tel que

$$f(b) = f(a).$$

Comme $0 < b < a$, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à f sur $[b, a]$. Il existe alors

$$c \in]b, a[$$

tel que

$$f'(c) = 0.$$

Comme $c > b > 0$, nous avons $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Conclusion

Dans le deuxième cas également, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

5. Conclusion générale

Les deux seuls cas possibles issus de $f(a)f'(a) < 0$ ont été traités. Dans chacun d'eux, nous avons construit un point $b \in]0, a[$ tel que

$$f(b) = f(a),$$

puis appliqué le théorème de Rolle sur $[b, a]$.

Nous obtenons finalement

$$\exists c \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

Remarque

La démonstration utilise toutes les données de l'énoncé :

- $f(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0$ donnent $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$;
- le signe de $f(a)$ permet de situer $f(x_0)$ par rapport à $f(a)$;
- le signe de $f'(a)$ permet de situer $f(x_1)$ de l'autre côté de $f(a)$;
- le TVI produit un point b tel que $f(b) = f(a)$;
- Rolle produit enfin le point c tel que $f'(c) = 0$.

Aucun théorème de Fermat ni théorème de Darboux n'est utilisé.

EXERCICE 7 - FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c).$$

Idée de la démonstration

Nous voulons faire apparaître le terme $f''(c)$. Le théorème de Rolle permet d'obtenir l'annulation d'une dérivée première. En l'appliquant une seconde fois à une dérivée, on pourra obtenir l'annulation d'une dérivée seconde.

L'idée est donc de construire une fonction auxiliaire φ qui vérifie :

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(a) = 0.$$

Une première application de Rolle donnera un point $u \in]a, b[$ tel que $\varphi'(u) = 0$. Comme $\varphi'(a) = \varphi'(u) = 0$, une deuxième application de Rolle donnera alors un point $c \in]a, u[$ tel que $\varphi''(c) = 0$.

1. Construction de la fonction auxiliaire

Posons

$$A = f(b) - f(a) - (b - a)f'(a).$$

Le nombre A mesure exactement l'écart entre $f(b)$ et l'approximation affine de f au point a .

Nous définissons, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - A \left(\frac{x - a}{b - a} \right)^2.$$

Ce choix n'est pas arbitraire :

- les trois premiers termes représentent $f(x)$ moins son approximation affine en a ;
- le dernier terme est choisi pour annuler exactement la valeur obtenue en $x = b$;
- le facteur $(x - a)^2$ garantit que ce dernier terme et sa dérivée s'annulent en $x = a$.

Comme f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, la fonction φ est elle aussi deux fois dérivable sur $[a, b]$.

2. Vérification des valeurs de φ aux extrémités

2.1. Calcul de $\varphi(a)$

En remplaçant x par a , nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) - f(a) - (a - a)f'(a) - A \left(\frac{a - a}{b - a} \right)^2 \\ &= 0 - 0 - A \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi(a) = 0.}$$

2.2. Calcul de $\varphi(b)$

En remplaçant x par b , nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) - A \left(\frac{b - a}{b - a} \right)^2 \\ &= f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) - A.\end{aligned}$$

Or, par définition,

$$A = f(b) - f(a) - (b - a)f'(a).$$

Donc

$$\varphi(b) = A - A = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi(b) = 0.}$$

Nous avons donc bien

$$\boxed{\varphi(a) = \varphi(b).}$$

3. Première application du théorème de Rolle

La fonction φ est :

- continue sur $[a, b]$ puisqu'elle est dérivable sur cet intervalle ;
- dérivable sur $]a, b[$;
- telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont donc satisfaites. Il existe alors un réel

$$u \in]a, b[$$

tel que

$$\boxed{\varphi'(u) = 0.}$$

4. Calcul de $\varphi'(x)$ et vérification de $\varphi'(a) = 0$

À partir de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) - A \frac{(x - a)^2}{(b - a)^2},$$

nous dérivons terme à terme.

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x)$. La quantité $f(a)$ est constante, donc sa dérivée est nulle. La dérivée de $(x - a)f'(a)$ est $f'(a)$, car $f'(a)$ est une constante. Enfin,

$$\left(A \frac{(x - a)^2}{(b - a)^2} \right)' = A \frac{2(x - a)}{(b - a)^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{2A(x - a)}{(b - a)^2}.$$

En $x = a$,

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= f'(a) - f'(a) - \frac{2A(a - a)}{(b - a)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi'(a) = 0.}$$

D'après la première application de Rolle, nous avons aussi

$$\boxed{\varphi'(u) = 0.}$$

5. Deuxième application du théorème de Rolle

Nous appliquons maintenant le théorème de Rolle à la fonction φ' sur l'intervalle $[a, u]$.

La fonction φ' est :

- continue sur $[a, u]$, puisque φ est deux fois dérivable ;
- dérivable sur $]a, u[$;
- telle que $\varphi'(a) = \varphi'(u) = 0$.

Le théorème de Rolle garantit donc l'existence d'un réel

$$c \in]a, u[$$

tel que

$$\boxed{\varphi''(c) = 0.}$$

Puisque $u \in]a, b[$, nous avons

$$]a, u[\subset]a, b[,$$

donc

$$\boxed{c \in]a, b[.}$$

6. Calcul de $\varphi''(x)$

Nous partons de

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{2A(x-a)}{(b-a)^2}.$$

En dérivant une seconde fois, nous obtenons

$$\varphi''(x) = f''(x) - \frac{2A}{(b-a)^2}.$$

Au point c , la relation $\varphi''(c) = 0$ donne

$$f''(c) - \frac{2A}{(b-a)^2} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{2A}{(b-a)^2} = f''(c).$$

En multipliant les deux membres par $(b-a)^2/2$, il vient

$$A = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Or

$$A = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a).$$

Nous obtenons donc

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

En ajoutant $f(a) + (b-a)f'(a)$ aux deux membres, nous arrivons à

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Il existe bien un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

La démonstration repose uniquement sur une fonction auxiliaire bien choisie et sur deux applications successives du théorème de Rolle.

Exercice 8

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0,$$

et soit $x_0 \in]a, b[$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

1. Lecture attentive de l'objectif

L'égalité à démontrer contient trois éléments essentiels :

$$f''(c), \quad f(x_0), \quad (x_0 - a)(x_0 - b).$$

Les conditions $f(a) = f(b) = 0$ indiquent naturellement qu'il faut faire apparaître le polynôme

$$(x - a)(x - b),$$

car il s'annule exactement en a et en b .

De plus,

$$\left((x - a)(x - b)\right)'' = 2.$$

Cette dérivée seconde constante 2 explique précisément le facteur 2 qui apparaît dans la formule demandée.

Idée de la démonstration

On va construire une fonction auxiliaire φ qui s'annule en trois points distincts :

$$a, \quad x_0, \quad b.$$

Deux applications du théorème de Rolle donneront alors deux zéros de φ' , puis une troisième application de Rolle donnera un zéro de φ'' .

2. Construction de la fonction auxiliaire

Posons

$$\lambda = \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Cette quantité est bien définie. En effet, puisque $x_0 \in]a, b[$, on a

$$x_0 \neq a \quad \text{et} \quad x_0 \neq b,$$

donc

$$(x_0 - a)(x_0 - b) \neq 0.$$

Définissons maintenant, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\boxed{\varphi(x) = f(x) - \lambda(x - a)(x - b)}.$$

Autrement dit,

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x - a)(x - b).$$

Puisque f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et que $x \mapsto (x - a)(x - b)$ est un polynôme, la fonction φ est elle aussi deux fois dérivable sur $[a, b]$.

3. Vérification des trois zéros de φ

3.1. Valeur de $\varphi(a)$

En remplaçant x par a , on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) - \lambda(a - a)(a - b) \\ &= f(a) - \lambda \cdot 0 \cdot (a - b) \\ &= f(a).\end{aligned}$$

Or $f(a) = 0$. Donc

$$\boxed{\varphi(a) = 0}.$$

3.2. Valeur de $\varphi(b)$

De même,

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= f(b) - \lambda(b-a)(b-b) \\ &= f(b) - \lambda(b-a) \cdot 0 \\ &= f(b).\end{aligned}$$

Or $f(b) = 0$. Donc

$$\boxed{\varphi(b) = 0}.$$

3.3. Valeur de $\varphi(x_0)$

Par définition de φ ,

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - \lambda(x_0 - a)(x_0 - b).$$

En remplaçant λ par sa valeur,

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= f(x_0) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x_0 - a)(x_0 - b) \\ &= f(x_0) - f(x_0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi(x_0) = 0}.$$

Nous avons donc obtenu

$$\boxed{\varphi(a) = \varphi(x_0) = \varphi(b) = 0}.$$

4. Première application du théorème de Rolle

Considérons la fonction φ sur l'intervalle $[a, x_0]$.

Elle est :

- continue sur $[a, x_0]$, puisqu'elle est deux fois dérivable ;
- dérivable sur $]a, x_0[$;
- telle que $\varphi(a) = \varphi(x_0) = 0$.

Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaites. Il existe donc un réel

$$u \in]a, x_0[$$

tel que

$$\boxed{\varphi'(u) = 0}.$$

5. Deuxième application du théorème de Rolle

Considérons maintenant φ sur l'intervalle $[x_0, b]$.

La fonction φ est :

- continue sur $[x_0, b]$;
- dérivable sur $]x_0, b[$;
- telle que $\varphi(x_0) = \varphi(b) = 0$.

Le théorème de Rolle assure donc l'existence d'un réel

$$v \in]x_0, b[$$

tel que

$$\boxed{\varphi'(v) = 0}.$$

Comme

$$u \in]a, x_0[\quad \text{et} \quad v \in]x_0, b[,$$

on a nécessairement

$$a < u < x_0 < v < b.$$

En particulier,

$$u < v.$$

6. Troisième application du théorème de Rolle

Nous allons cette fois appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ' sur l'intervalle $[u, v]$.

Puisque φ est deux fois dérivable, la fonction φ' est :

- continue sur $[u, v]$;
- dérivable sur $]u, v[$.

De plus,

$$\varphi'(u) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(v) = 0.$$

Ainsi,

$$\varphi'(u) = \varphi'(v).$$

Le théorème de Rolle appliqué à φ' donne alors l'existence d'un réel

$$c \in]u, v[$$

tel que

$$\boxed{\varphi''(c) = 0}.$$

Comme

$$]u, v[\subset]a, b[,$$

on a bien

$$\boxed{c \in]a, b[}.$$

7. Calcul détaillé de φ''

Rappelons que

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda(x - a)(x - b).$$

Développons d'abord le produit :

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

Sa dérivée est

$$\left((x - a)(x - b)\right)' = 2x - (a + b),$$

et sa dérivée seconde vaut

$$\left((x - a)(x - b)\right)'' = 2.$$

Par conséquent,

$$\varphi''(x) = f''(x) - 2\lambda.$$

Au point c , nous savons que $\varphi''(c) = 0$. Donc

$$0 = f''(c) - 2\lambda.$$

Il vient

$$f''(c) = 2\lambda.$$

En remplaçant λ par sa valeur,

$$f''(c) = 2 \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}}.$$

Conclusion

Il existe donc un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

La démonstration utilise toutes les données :

- $f(a) = f(b) = 0$ pour obtenir les zéros de φ en a et en b ;
- $x_0 \in]a, b[$ pour que le quotient soit défini et pour séparer l'intervalle en $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$;
- la double dérivabilité de f pour appliquer Rolle successivement à φ , puis à φ' .

8. Résumé très court de la méthode

On pose

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x - a)(x - b).$$

Alors

$$\varphi(a) = \varphi(x_0) = \varphi(b) = 0.$$

Rolle sur $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ donne deux points $u < v$ tels que

$$\varphi'(u) = \varphi'(v) = 0.$$

Rolle appliqué à φ' sur $[u, v]$ fournit $c \in]u, v[$ tel que

$$\varphi''(c) = 0.$$

Enfin,

$$\varphi''(c) = f''(c) - \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)} = 0,$$

d'où le résultat demandé.