

EXERCICE 4 - LIMITES ET DÉRIVABILITÉ

1) Soit f une fonction dérivable en a . Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

2) Soit f une fonction dérivable au point $a = 2$, telle que

$$f(2) = 0 \quad \text{et} \quad f'(2) = 3.$$

Calculer les limites

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2 \sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2}.$$

Rappel fondamental

Dire que f est dérivable en un réel a signifie que la limite

$$\lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

existe et est finie. Cette limite est précisément $f'(a)$.

Ainsi, chaque fois qu'une expression contient $f(u) - f(a)$ avec $u \rightarrow a$, l'idée naturelle est de faire apparaître le quotient

$$\frac{f(u) - f(a)}{u - a}.$$

1) Calcul de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

Idée la plus directe

Le numérateur ne ressemble pas encore à un taux d'accroissement. Nous allons donc le transformer de manière à faire apparaître $f(x) - f(a)$.

Partons du numérateur :

$$\begin{aligned} xf(a) - af(x) &= xf(a) - af(a) + af(a) - af(x) \\ &= (x - a)f(a) - a(f(x) - f(a)). \end{aligned}$$

Pour $x \neq a$, on peut alors diviser par $x - a$:

$$\begin{aligned}\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} &= \frac{(x - a)f(a) - a(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= f(a) - a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.\end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow a$, la dérivabilité de f en a donne

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow f'(a).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

2) Première limite

Nous cherchons

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2}.$$

Étape 1 : identifier le point vers lequel tend l'argument de f

Lorsque $x \rightarrow 2$,

$$\sqrt{x+2} \rightarrow \sqrt{4} = 2.$$

L'argument de f tend donc exactement vers le point où nous connaissons $f(2)$ et $f'(2)$.

Comme $f(2) = 0$, nous pouvons écrire

$$f(\sqrt{x+2}) = f(\sqrt{x+2}) - f(2).$$

Étape 2 : faire apparaître le taux d'accroissement de f en 2

Pour $x \neq 2$, posons

$$u = \sqrt{x+2}.$$

Alors $u \rightarrow 2$ lorsque $x \rightarrow 2$, et

$$\begin{aligned} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2} &= \frac{f(u) - f(2)}{x-2} \\ &= \frac{f(u) - f(2)}{u-2} \times \frac{u-2}{x-2}. \end{aligned}$$

Le premier facteur tend vers

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{u-2} = f'(2) = 3.$$

Étape 3 : simplifier le second facteur

Nous avons

$$\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\sqrt{x+2} + 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Étape 4 : produit des deux limites

Ainsi,

$$L_1 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2} = \frac{3}{4}$$

2) Deuxième limite

Nous cherchons maintenant

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f\left(2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x - 2}.$$

Étape 1 : vérifier le point vers lequel tend l'argument de f

Lorsque $x \rightarrow 2$,

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Nous pouvons donc utiliser la dérivabilité de f en 2.

Comme $f(2) = 0$, on écrit

$$f\left(2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) = f\left(2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) - f(2).$$

Étape 2 : décomposer l'expression

Posons

$$u(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Alors $u(x) \rightarrow 2$ lorsque $x \rightarrow 2$. Pour $x \neq 2$ et $u(x) \neq 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(u(x))}{x - 2} &= \frac{f(u(x)) - f(2)}{x - 2} \\ &= \frac{f(u(x)) - f(2)}{u(x) - 2} \times \frac{u(x) - 2}{x - 2}. \end{aligned}$$

Le premier facteur tend vers

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(u(x)) - f(2)}{u(x) - 2} = f'(2) = 3.$$

Il reste donc à calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 2}{x - 2}.$$

Étape 3 : reconnaître un nombre dérivé

La fonction

$$u(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

est dérivable. Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right). \end{aligned}$$

Au point $x = 2$,

$$u'(2) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Or, par définition du nombre dérivé de u en 2,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{u(x) - u(2)}{x - 2} = u'(2).$$

Comme $u(2) = 2$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 2}{x - 2} = 0.$$

Étape 4 : conclusion

Ainsi,

$$L_2 = 3 \times 0 = 0.$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2 \sin(\frac{\pi x}{4}))}{x - 2} = 0$$

Point de vigilance

Le facteur 2 placé devant le sinus est essentiel : il garantit que

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \rightarrow 2,$$

ce qui permet d'utiliser les données $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.

Bilan général

Limite	Résultat
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$	$f(a) - af'(a)$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2}$	$\frac{3}{4}$
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2 \sin(\frac{\pi x}{4}))}{x-2}$	0

Méthode à retenir

Pour une limite de la forme

$$\frac{f(u(x)) - f(a)}{x - x_0}, \quad \text{avec } u(x) \rightarrow a,$$

on introduit le facteur $u(x) - a$:

$$\frac{f(u(x)) - f(a)}{x - x_0} = \frac{f(u(x)) - f(a)}{u(x) - a} \times \frac{u(x) - a}{x - x_0}.$$

Le premier quotient tend vers $f'(a)$ et le second vers $u'(x_0)$, lorsque ces dérivées existent. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u(x)) - f(a)}{x - x_0} = f'(a)u'(x_0).$$

Dans cet exercice, cette idée est appliquée avec

$$u(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{puis} \quad u(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

EXERCICE – ENCADREMENT PAR LE TAF

Correction complète, intuitive et détaillée

Énoncé intégralement réécrit

On pose

$$I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right]$$

et soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$.

1) Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x).$$

2) En déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

1. Analyse des données

Nous disposons de quatre informations importantes :

- x et y appartiennent à l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right]$;
- $x < y$, donc $y - x > 0$;
- la quantité à encadrer est une différence de valeurs de la fonction sinus : $\sin y - \sin x$;
- la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.

Ces données indiquent naturellement qu'il faut appliquer le **théorème des accroissements finis** à la fonction sinus sur l'intervalle $[x, y]$.

Idée essentielle

Le théorème des accroissements finis transforme une différence de valeurs $\sin y - \sin x$ en un produit contenant une valeur de la dérivée, donc une valeur de $\cos$. Il restera alors à encadrer cette valeur de $\cos$ sur l'intervalle I .

2. Rappel du théorème des accroissements finis

Soit une fonction f continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Nous allons appliquer ce théorème à

$$f(t) = \sin t$$

sur l'intervalle $[x, y]$.

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est :

- continue sur $[x, y]$;
- dérivable sur $]x, y[$.

Toutes les hypothèses du théorème sont donc satisfaites.

3. Démonstration de la première inégalité

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel

$$c \in]x, y[$$

tel que

$$\sin y - \sin x = \cos c (y - x). \quad (1)$$

Il faut maintenant encadrer $\cos c$.

Comme

$$x, y \in I = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad x < c < y,$$

on obtient

$$c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right].$$

Étudions le sens de variation de la fonction cosinus sur cet intervalle. Sa dérivée est

$$(\cos t)' = -\sin t.$$

Or, pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right]$, on a $\sin t > 0$. Donc

$$-\sin t < 0.$$

Par conséquent, la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Puisque

$$\frac{\pi}{6} \leq c \leq \frac{\pi}{4}$$

et que le cosinus est décroissant, l'ordre est renversé après application du cosinus :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \cos c \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Les valeurs remarquables donnent

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Comme $x < y$, on a

$$y - x > 0.$$

Nous pouvons donc multiplier les trois membres de l'inégalité (2) par le nombre positif $y - x$ sans changer le sens des inégalités :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \cos c (y - x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x).$$

En utilisant l'égalité (1),

$$\cos c (y - x) = \sin y - \sin x,$$

nous obtenons finalement

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)}.$$

4. Dédution de l'encadrement numérique

Pour exploiter le résultat précédent, choisissons les deux extrémités de l'intervalle I :

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifie bien que

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}.$$

Le résultat de la première question donne alors

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \leq \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right). \quad (3)$$

Calculons séparément chaque terme.

D'abord,

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

Ensuite,

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

En remplaçant dans (3), nous obtenons

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{12}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{24} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{24}. \quad (4)$$

Comme $\pi > 0$, nous pouvons multiplier les trois membres de (4) par le nombre positif

$$\frac{2}{\pi}$$

afin d'isoler l'expression demandée. Nous obtenons :

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{24} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Après simplification,

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Conclusion

Nous avons démontré successivement :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$$

pour tous $x, y \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ tels que $x < y$, puis

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

La démonstration utilise toutes les données : l'intervalle I , la condition $x < y$, la dérivée de $\sin$, la décroissance de $\cos$ sur I et les valeurs remarquables aux extrémités de I .

EXERCICE – THÉORÈME DE ROLLE ET FONCTION AUXILIAIRE

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $] - 2, 1[$ telle que

$$f(0) = f(1) = f'_d(0) = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Lecture précise de l'objectif

L'égalité recherchée est

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Comme $c \neq 0$, elle est équivalente à

$$cf'(c) - f(c) = 0.$$

Or l'expression $xf'(x) - f(x)$ apparaît naturellement lorsque l'on dérive le quotient

$$\frac{f(x)}{x}.$$

En effet, pour $x \neq 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

Idée essentielle

Nous allons donc introduire la fonction auxiliaire

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0),$$

puis la prolonger en 0. Les données $f(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0$ permettront précisément de définir ce prolongement de manière continue.

2. Construction de la fonction auxiliaire

Pour tout $x \in]0, 1]$, posons

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Cette définition est licite car, sur $]0, 1]$, on a $x \neq 0$.

Nous voulons maintenant définir $g(0)$ de sorte que g soit continue en 0.

3. Utilisation de $f(0) = 0$ et de $f'_d(0) = 0$

Par définition de la dérivée à droite de f en 0,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Or l'énoncé donne

$$f(0) = 0.$$

Ainsi,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}.$$

Mais l'énoncé donne également

$$f'_d(0) = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Comme $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x > 0$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

Nous définissons donc

$$g(0) = 0.$$

Avec cette définition,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0),$$

donc g est continue en 0.

4. Continuité de g sur $[0, 1]$

Nous avons déjà établi la continuité de g en 0.

Sur $]0, 1]$, la fonction f est continue, car elle est continue sur $[0, 1]$. La fonction $x \mapsto x$ est elle aussi continue et ne s'annule pas sur $]0, 1]$. Par conséquent, le quotient

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

est continu sur $]0, 1]$.

Ainsi,

$$g \text{ est continue sur } [0, 1].$$

5. Dérivabilité de g sur $]0, 1[$

La fonction f est dérivable sur $] - 2, 1[$. Elle est donc, en particulier, dérivable sur $]0, 1[$.

Sur $]0, 1[$, le dénominateur x ne s'annule pas. Le quotient $g(x) = f(x)/x$ est donc dérivable sur $]0, 1[$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, la formule de dérivation d'un quotient donne

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x f'(x) - f(x) \cdot 1}{x^2} \\ &= \boxed{\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}}. \end{aligned}$$

6. Vérification de l'égalité aux extrémités

Par définition du prolongement,

$$g(0) = 0.$$

D'autre part,

$$g(1) = \frac{f(1)}{1}.$$

Or l'énoncé donne $f(1) = 0$. Donc

$$g(1) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{g(0) = g(1)}.$$

7. Application du théorème de Rolle

Rappelons les hypothèses du théorème de Rolle sur l'intervalle $[0, 1]$:

- la fonction g est continue sur $[0, 1]$;
- la fonction g est dérivable sur $]0, 1[$;
- $g(0) = g(1)$.

Nous avons vérifié chacune de ces trois conditions. Le théorème de Rolle assure donc l'existence d'un réel

$$c \in]0, 1[$$

tel que

$$g'(c) = 0.$$

En utilisant l'expression de g' , nous obtenons

$$\frac{c f'(c) - f(c)}{c^2} = 0.$$

Comme $c \in]0, 1[$, on a $c > 0$, donc

$$c^2 > 0.$$

Le dénominateur étant non nul, la fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul. Ainsi,

$$cf'(c) - f(c) = 0.$$

Donc

$$cf'(c) = f(c).$$

Puisque $c \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par c :

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Conclusion

Il existe bien un réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

La démonstration utilise toutes les données utiles :

- $f(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0$ permettent de prolonger $f(x)/x$ continûment en 0 ;
- $f(1) = 0$ donne $g(1) = g(0)$;
- la continuité de f sur $[0, 1]$ donne la continuité de g sur $]0, 1]$;
- la dérivabilité de f sur $] - 2, 1[$ garantit notamment sa dérivabilité sur $]0, 1[$;
- le théorème de Rolle fournit enfin le point c recherché.

Résumé très court de la méthode

On pose

$$g(0) = 0, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0).$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'_d(0) = 0,$$

la fonction g est continue en 0. De plus,

$$g(1) = f(1) = 0 = g(0).$$

Rolle donne donc un $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0,$$

d'où

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

EXERCICE – FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2 ET DIFFÉRENCES DIVISÉES

Énoncé intégralement réécrit

1) Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

2) Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.
Montrer qu'il existe un réel $d \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c - b}{a} f''(d).$$

1. Démonstration de la première formule

Nous supposons $a < b$, comme l'indique l'intervalle $[a, b]$ et la recherche d'un point intérieur $c \in]a, b[$.

Idée essentielle

Nous allons construire une fonction auxiliaire qui s'annule en a et en b , et dont la dérivée s'annule déjà en a . Deux applications successives du théorème de Rolle feront alors apparaître une dérivée seconde.

Posons

$$A = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a).$$

Le nombre A représente exactement la différence entre $f(b)$ et l'approximation affine de f au voisinage de a .

Définissons, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - A \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2.$$

Étape 1 : vérification des valeurs aux extrémités

Pour $x = a$, on a $x - a = 0$, donc

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - 0 - 0 = 0.$$

Pour $x = b$, on a $\frac{b-a}{b-a} = 1$, donc

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - A \\ &= f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \\ &\quad - [f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi(a) = \varphi(b) = 0.}$$

Étape 2 : première application du théorème de Rolle

La fonction f est deux fois dérivable sur $[a, b]$; elle est donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. La fonction φ , obtenue à partir de f et de fonctions polynomiales, possède les mêmes propriétés.

Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$, le théorème de Rolle assure l'existence d'un réel

$$u \in]a, b[$$

tel que

$$\boxed{\varphi'(u) = 0.}$$

Étape 3 : calcul de la dérivée et valeur en a

En dérivant,

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{2A(x-a)}{(b-a)^2}.$$

Au point $x = a$,

$$\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) - 0 = 0.$$

Nous avons donc

$$\boxed{\varphi'(a) = \varphi'(u) = 0.}$$

Étape 4 : deuxième application du théorème de Rolle

La fonction φ' est continue sur $[a, u]$ et dérivable sur $]a, u[$, car φ est deux fois dérivable. Puisque $\varphi'(a) = \varphi'(u)$, le théorème de Rolle fournit un réel

$$c \in]a, u[\subset]a, b[$$

tel que

$$\boxed{\varphi''(c) = 0.}$$

Or

$$\varphi''(x) = f''(x) - \frac{2A}{(b-a)^2}.$$

Ainsi,

$$0 = \varphi''(c) = f''(c) - \frac{2A}{(b-a)^2}.$$

D'où

$$A = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

En remplaçant A par sa définition,

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Finalement,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

pour un certain $c \in]a, b[$.

Conclusion

La première proposition est vraie. Elle s'obtient uniquement à l'aide d'une fonction auxiliaire et de deux applications successives du théorème de Rolle.

2. Analyse rigoureuse de la deuxième proposition

Lecture critique de la deuxième question

Deux difficultés apparaissent dans l'écriture donnée :

- 1) le réel c figure dans la formule sans avoir été défini dans la deuxième question ;
- 2) le coefficient $\frac{c-b}{a}$ rend la proposition fausse en général.

La forme correcte usuelle comporte le coefficient $\frac{c-b}{2}$ et suppose $a < c < b$.

2.1. Contre-exemple montrant que la formule écrite est fausse

Prenons

$$f(x) = x^2, \quad a = 1, \quad c = 2, \quad b = 3.$$

La fonction f est deux fois dérivable sur $[1, 3]$ et

$$f''(x) = 2$$

pour tout x .

Calculons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{4 - 1}{2 - 1} - \frac{9 - 1}{3 - 1} \\ &= 3 - 4 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Le membre de droite donné dans l'énoncé vaut, quel que soit $d \in]1, 3[$,

$$\frac{c-b}{a} f''(d) = \frac{2-3}{1} \times 2 = -2.$$

Nous obtenons

$$-1 \neq -2.$$

Par conséquent, aucun réel d ne peut vérifier l'égalité demandée dans cet exemple.

La deuxième proposition est donc fausse telle qu'elle est écrite.

3. Version correcte et démonstration complète

La version mathématiquement correcte est la suivante :

Énoncé intégralement réécrit

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ et soit $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe un réel $d \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c - b}{2} f''(d).$$

Idée essentielle

Nous construisons le polynôme du second degré qui prend les mêmes valeurs que f aux trois points a , c et b . La différence entre f et ce polynôme possède alors trois zéros. Trois applications successives du théorème de Rolle font apparaître une dérivée seconde.

Posons

$$\lambda = \frac{2}{c-b} \left(\frac{f(c) - f(a)}{c-a} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right).$$

Comme $a < c < b$, on a $c - b \neq 0$: ce nombre est donc bien défini.

Définissons ensuite

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{\lambda}{2}(x-a)(x-b).$$

Étape 1 : calcul de $\psi(a)$ et de $\psi(b)$

Au point a , les deux facteurs contenant $x - a$ s'annulent :

$$\psi(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Au point b , le produit $(b-a)(b-b)$ est nul et

$$\begin{aligned} \psi(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) \\ &= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\psi(a) = \psi(b) = 0.}$$

Étape 2 : calcul de $\psi(c)$

On a

$$\psi(c) = f(c) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-a) - \frac{\lambda}{2}(c-a)(c-b).$$

Factorisons $c - a$ dans les trois derniers termes :

$$\psi(c) = (c-a) \left[\frac{f(c) - f(a)}{c-a} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - \frac{\lambda}{2}(c-b) \right].$$

Or, par définition de λ ,

$$\frac{\lambda}{2}(c-b) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Le crochet est donc nul, d'où

$$\boxed{\psi(c) = 0.}$$

Nous avons ainsi trois zéros ordonnés :

$$\boxed{\psi(a) = \psi(c) = \psi(b) = 0, \quad a < c < b.}$$

Étape 3 : applications successives du théorème de Rolle

Sur l'intervalle $[a, c]$, Rolle fournit un réel

$$u \in]a, c[$$

tel que

$$\psi'(u) = 0.$$

Sur l'intervalle $[c, b]$, Rolle fournit un réel

$$v \in]c, b[$$

tel que

$$\psi'(v) = 0.$$

On a donc

$$a < u < c < v < b.$$

La fonction ψ' est continue sur $[u, v]$ et dérivable sur $]u, v[$. Comme

$$\psi'(u) = \psi'(v) = 0,$$

Rolle appliqué à ψ' fournit un réel

$$d \in]u, v[\subset]a, b[$$

tel que

$$\boxed{\psi''(d) = 0.}$$

Étape 4 : calcul de la dérivée seconde

Le terme affine

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

a une dérivée seconde nulle.

De plus,

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab,$$

donc

$$\left((x - a)(x - b)\right)'' = 2.$$

Par conséquent,

$$\psi''(x) = f''(x) - \lambda.$$

Au point d ,

$$0 = \psi''(d) = f''(d) - \lambda,$$

d'où

$$f''(d) = \lambda.$$

En remplaçant λ par sa valeur,

$$f''(d) = \frac{2}{c - b} \left(\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

En multipliant par $\frac{c-b}{2}$, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{f(c) - f(a)}{c - a} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c - b}{2} f''(d)}$$

pour un certain $d \in]a, b[$.

Conclusion

- La première formule est correcte et a été démontrée par deux applications du théorème de Rolle.
- La deuxième formule avec $\frac{c-b}{a}$ est fausse en général.
- La formule correcte est obtenue en remplaçant a au dénominateur par 2 et en précisant que $c \in]a, b[$.

EXERCICE – ÉTUDE DE LA DÉRIVABILITÉ

Correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point a dans chacun des cas suivants.

1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0,$$

où $\operatorname{E}(t)$ désigne la partie entière de t .

3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

4)

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - x|, & x < 0, \\ x\sqrt{x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

Point d'attention

Dans le quatrième cas, la seconde branche est naturellement lue sous la forme $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$: une branche d'une fonction doit être écrite en fonction de la variable x .

Rappel : définition de la dérivabilité en un point

Une fonction f est dérivable en a lorsque la limite finie

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Sa valeur est alors le nombre dérivé $f'(a)$.

Avant de chercher la dérivée, il est souvent utile de vérifier la continuité : toute fonction dérivable en un point y est nécessairement continue.

1) Fonction $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ au voisinage de 0

Étape 1 : continuité en 0

Pour $x \neq 0$,

$$|f(x)| = \left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| = x^2 \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|.$$

Or, pour tout réel u ,

$$|\cos u| \leq 1.$$

Donc

$$0 \leq |f(x)| \leq x^2.$$

Comme $x^2 \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Ainsi, f est continue en 0.

Étape 2 : calcul du taux d'accroissement

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

De nouveau,

$$\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Comme $|x| \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0.$$

2) Fonction $f(x) = \sin^2 x \operatorname{E}(1/x)$ au voisinage de 0

Idée essentielle

Le terme $\operatorname{E}(1/x)$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$, mais il est multiplié par $\sin^2 x$, qui est de l'ordre de x^2 . Dans le taux d'accroissement, le produit utile est

$$x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et celui-ci tend vers 1 des deux côtés.

Étape 1 : étude de $x \operatorname{E}(1/x)$ pour $x > 0$

Par définition de la partie entière,

$$\operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) + 1.$$

Si $x > 0$, on peut multiplier par x sans changer le sens des inégalités :

$$x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 < x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) + x.$$

Ainsi,

$$1 - x < x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, les deux bornes tendent vers 1. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Étape 2 : étude pour $x < 0$

La même définition donne

$$\operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) + 1.$$

Cette fois $x < 0$: la multiplication par x renverse les inégalités :

$$x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 > x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) + x.$$

La seconde inégalité équivaut à

$$x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x.$$

Donc

$$1 \leq x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$, les deux bornes tendent encore vers 1, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1}.$$

Étape 3 : continuité en 0

Pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \sin^2 x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 x \left[x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &\rightarrow 1, & x &\rightarrow 0, \\ x &\rightarrow 0, & x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) \rightarrow 1^2 \times 0 \times 1 = 0 = f(0).$$

La fonction est donc continue en 0.

Étape 4 : dérivabilité en 0

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin^2 x}{x} \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left[x \operatorname{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

En passant à la limite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1^2 \times 1 = 1.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable en 0 et

$$\boxed{f'(0) = 1}.$$

3) Fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ au voisinage de 1

Étape 1 : simplification de l'expression

On remarque que

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|.$$

Pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}.$$

Il faut distinguer les deux côtés de 1.

Si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$, donc $|x - 1| = x - 1$ et

$$f(x) = 1.$$

Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$, donc $|x - 1| = -(x - 1)$ et

$$f(x) = -1.$$

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

Étape 2 : étude de la continuité

À gauche de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1.$$

À droite de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1.$$

Les deux limites latérales sont différentes. La limite de $f(x)$ en 1 n'existe donc pas. En particulier, f n'est pas continue en 1.

Conclusion

Une fonction dérivable étant nécessairement continue, f n'est pas dérivable en 1 :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1}.$$

4) Fonction définie par morceaux au voisinage de 0

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - x|, & x < 0, \\ x\sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Étape 1 : simplification de la branche gauche

Pour $x < 0$, on a également $x - 1 < 0$. Le produit de ces deux nombres négatifs est positif :

$$x(x - 1) = x^2 - x > 0.$$

Donc, pour $x < 0$,

$$|x^2 - x| = x^2 - x.$$

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x\sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Étape 2 : continuité en 0

À gauche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x) = 0.$$

À droite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\sqrt{x} = 0.$$

De plus,

$$f(0) = 0\sqrt{0} = 0.$$

Donc f est continue en 0.

Étape 3 : nombre dérivé à gauche

Pour $x < 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1.$$

Par conséquent,

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1.$$

Étape 4 : nombre dérivé à droite

Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}.$$

Donc

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Les deux nombres dérivés latéraux sont différents :

$$f'_g(0) = -1 \neq 0 = f'_d(0).$$

Conclusion

La fonction est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0 :

f n'est pas dérivable en 0.

La courbe admet deux demi-tangentes distinctes en l'origine :

$$y = -x \quad \text{à gauche,} \quad y = 0 \quad \text{à droite.}$$

Bilan général

Cas	Dérivabilité au point étudié	Résultat
1	Oui, en 0	$f'(0) = 0$
2	Oui, en 0	$f'(0) = 1$
3	Non, en 1	f n'est pas continue en 1
4	Non, en 0	$f'_g(0) = -1, f'_d(0) = 0$

EXERCICE – CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ SUR $\mathbb{R}_+$

Énoncé intégralement réécrit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ ax^2 + bx + 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

- 1) Déterminer la relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}_+$.
- 2) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Analyse générale

La fonction est définie par deux expressions différentes, séparées au point $x = 1$.

- Sur $[0, 1[$, on a $f(x) = \sqrt{x}$.
- Sur $[1, +\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

Chacune de ces expressions est continue sur son propre intervalle de définition. Le seul point de raccordement à étudier pour la continuité est donc $x = 1$.

Pour la dérivabilité, il faudra étudier :

- le raccordement en $x = 1$;
- le point $x = 0$, qui est l'extrémité gauche de $\mathbb{R}_+$.

1) Condition de continuité sur $\mathbb{R}_+$

Étape 1 : continuité en dehors de $x = 1$

Sur $[0, 1[$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue.

Sur $[1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ est polynomiale, donc continue.

Il reste uniquement à assurer la continuité en $x = 1$.

Étape 2 : limite à gauche en 1

Pour $x < 1$, on a $f(x) = \sqrt{x}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1.$$

Étape 3 : valeur de la fonction en 1

Comme la deuxième expression est valable pour $x \geq 1$,

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1.$$

La limite à droite vaut également

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b + 1,$$

car le polynôme est continu.

Étape 4 : condition de raccordement

La continuité en 1 exige

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

Donc

$$1 = a + b + 1.$$

En retranchant 1 aux deux membres,

$$\boxed{a + b = 0}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{b = -a}.$$

Conclusion

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

$$\boxed{a + b = 0}.$$

2) Condition de dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$

Point de vigilance

L'expression « dérivable sur $\mathbb{R}_+$ » doit inclure l'étude du point 0, puisque $0 \in \mathbb{R}_+$. À l'extrémité du domaine, on étudie la dérivée à droite.

A. Étude du raccordement en $x = 1$

Pour que f soit dérivable en 1, deux conditions sont nécessaires :

1. f doit être continue en 1 ;
2. les dérivées à gauche et à droite en 1 doivent être égales.

La continuité donne déjà

$$a + b = 0. \quad (1)$$

Dérivée à gauche en 1

Pour $0 < x < 1$,

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ainsi,

$$f'_g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Dérivée à droite en 1

Pour $x > 1$,

$$f(x) = ax^2 + bx + 1,$$

donc

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Ainsi,

$$f'_d(1) = 2a + b.$$

La dérivabilité en 1 impose

$$2a + b = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 2a + b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde,

$$a = \frac{1}{2}.$$

Puis, comme $b = -a$,

$$b = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, le raccordement en 1 est dérivable pour

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{2}.$$

B. Étude de la dérivabilité à droite en $x = 0$

Pour $0 \leq x < 1$,

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

En particulier,

$$f(0) = 0.$$

Par définition, la dérivée à droite en 0 serait

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

En remplaçant $f(x)$ et $f(0)$,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

Or, pour $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Cette limite n'est pas un réel fini. Par conséquent, f n'est pas dérivable à droite en 0.

Ce défaut de dérivabilité ne dépend ni de a ni de b , car près de 0 la fonction est toujours égale à $\sqrt{x}$.

Conclusion

Au sens strict, il n'existe aucun couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel f soit dérivable sur tout $\mathbb{R}_+$, car f n'est jamais dérivable à droite en 0.

Aucun couple (a, b) ne convient sur tout $\mathbb{R}_+$.

Interprétation vraisemblablement attendue

Il est fréquent que l'objectif réel soit de rendre la fonction dérivable au point de raccordement $x = 1$, c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.

Dans ce cas, les valeurs trouvées sont

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{2}.$$

La fonction devient alors

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, mais elle reste non dérivable à droite en 0.

Bilan final

Propriété demandée	Condition obtenue
f continue sur $\mathbb{R}_+$	$a + b = 0$
f dérivable au raccordement $x = 1$	$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$
f dérivable sur tout $\mathbb{R}_+$	impossible

CALCUL DE DÉRIVÉES

Correction intégralement détaillée

Énoncé. Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$

3) $f(x) = (1 + \sin(2x))^3.$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}.$

5) $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$

6) $f(x) = \tan(\sin x).$

7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}.$

8) $f(x) = \sin(\arctan(\pi\sqrt{x})).$

Rappels utilisés.

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (\sin u)' = u' \cos u, \quad (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (\sqrt[3]{u})' = \frac{u'}{3u^{2/3}},$$

à chaque fois sur les intervalles où les expressions considérées sont définies et dérivables.

1) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$

Domaine. Le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La fonction est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Posons

$$u(x) = (x+1)^3, \quad v(x) = x^2.$$

Alors

$$u'(x) = 3(x+1)^2, \quad v'(x) = 2x.$$

La formule du quotient donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{3(x+1)^2x^2 - (x+1)^3(2x)}{x^4}. \end{aligned}$$

Factorisons $x(x+1)^2$ au numérateur :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(x+1)^2(3x - 2(x+1))}{x^4} \\ &= \frac{x(x+1)^2(x-2)}{x^4} \\ &= \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}.$$

$$\mathbf{2)} \quad f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

Domaine. Il faut

$$1 - \cos x \neq 0.$$

Or $\cos x = 1$ exactement lorsque $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Posons

$$u(x) = \sin x, \quad v(x) = 1 - \cos x.$$

Alors

$$u'(x) = \cos x, \quad v'(x) = \sin x,$$

car $(1 - \cos x)' = \sin x$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(1 - \cos x) - \sin x \sin x}{(1 - \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

À l'aide de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} \\ &= -\frac{1}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - \cos x}.$$

3) $f(x) = (1 + \sin(2x))^3$

La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous reconnaissons une composition. Posons

$$u(x) = 1 + \sin(2x).$$

Alors

$$f(x) = u(x)^3$$

et

$$f'(x) = 3u(x)^2 u'(x).$$

Calculons $u'(x)$:

$$u'(x) = (\sin(2x))' = 2 \cos(2x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(1 + \sin(2x))^2 \cdot 2 \cos(2x) \\ &= 6 \cos(2x) (1 + \sin(2x))^2. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6 \cos(2x) (1 + \sin(2x))^2.$$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$

Domaine. La racine carrée impose $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, on a $\sqrt[3]{x} + 2 > 0$, donc le dénominateur ne s'annule jamais. Ainsi

$$D_f = [0, +\infty[.$$

La formule de dérivation ci-dessous est valable pour $x > 0$.

Posons

$$u(x) = \sqrt{x} - 2, \quad v(x) = \sqrt[3]{x} + 2 = x^{1/3} + 2.$$

Pour $x > 0$,

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad v'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^{1/3} + 2) - (\sqrt{x} - 2)\frac{1}{3x^{2/3}}}{(x^{1/3} + 2)^2}.$$

C'est déjà une forme correcte. Pour obtenir une seule fraction, prenons comme dénominateur commun du numérateur $6x^{2/3}\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} & \frac{x^{1/3} + 2}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3x^{2/3}} \\ &= \frac{3x^{2/3}(x^{1/3} + 2) - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{6x^{2/3}\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x + 6x^{2/3} - 2x + 4\sqrt{x}}{6x^{2/3}\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + 6x^{2/3} + 4\sqrt{x}}{6x^{2/3}\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{x + 6x^{2/3} + 4\sqrt{x}}{6x^{2/3}\sqrt{x}(x^{1/3} + 2)^2}.$$

Que se passe-t-il en 0 ? On a $f(0) = -1$. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{f(x) + 1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + 2)} \\ &= \frac{x^{-1/2} + x^{-2/3}}{\sqrt[3]{x} + 2}. \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, ce quotient tend vers $+\infty$. Il n'existe donc pas de dérivée à droite finie en 0.

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{x + 6x^{2/3} + 4\sqrt{x}}{6x^{2/3}\sqrt{x}(x^{1/3} + 2)^2}.$$

La fonction n'est pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

5) $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Domaine. La tangente est définie lorsque

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0.$$

Or

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \iff \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = 1 + 2k.$$

Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Posons

$$u(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Alors $f(x) = u(x)^2$, donc

$$f'(x) = 2u(x)u'(x).$$

Or

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\left(\frac{\pi x}{2}\right)'}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi/2}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\pi/2}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= \pi \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \neq 1 + 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$),

$$f'(x) = \frac{\pi \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

6) $f(x) = \tan(\sin x)$

Comme $\sin x \in [-1, 1]$ pour tout x , et comme les zéros de $\cos t$ sont de la forme $\pi/2 + k\pi$, aucun de ces zéros n'appartient à $[-1, 1]$. La fonction est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons

$$u(x) = \sin x.$$

Alors

$$f(x) = \tan(u(x)).$$

Par dérivation d'une fonction composée,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}.$$

Or $u'(x) = \cos x$. Donc

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}.$$

7) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}$

Domaine. Il faut

$$x + \sqrt[3]{3x} \geq 0.$$

Si $x \geq 0$, les deux termes sont positifs ou nuls. Si $x < 0$, les deux termes sont strictement négatifs, donc leur somme est négative. Ainsi

$$D_f = [0, +\infty[.$$

Pour $x > 0$, posons

$$u(x) = x + \sqrt[3]{3x}.$$

Alors $f(x) = \sqrt{u(x)}$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Calculons $u'(x)$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 + \left((3x)^{1/3}\right)' \\ &= 1 + \frac{1}{3}(3x)^{-2/3} \cdot 3 \\ &= 1 + (3x)^{-2/3}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{1 + (3x)^{-2/3}}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}}.$$

En 0, $f(0) = 0$, et pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}}{x}.$$

Le terme $\sqrt[3]{3x}$ domine x au voisinage de 0^+ , de sorte que ce quotient tend vers $+\infty$. Il n'existe donc pas de dérivée à droite finie en 0.

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 + (3x)^{-2/3}}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}}.$$

La fonction n'est pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

8) $f(x) = \sin(\arctan(\pi\sqrt{x}))$

Domaine. La racine carrée impose $x \geq 0$. Les fonctions arctan et sin sont définies partout. Donc

$$D_f = [0, +\infty[.$$

Pour $x > 0$, posons successivement

$$u(x) = \pi\sqrt{x}, \quad v(x) = \arctan(u(x)), \quad f(x) = \sin(v(x)).$$

On a

$$f'(x) = \cos(v(x)) v'(x).$$

Puis

$$v'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$$

et

$$u'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \cos(\arctan(\pi\sqrt{x})) \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\pi^2x)}.$$

Cette forme est correcte. Nous pouvons la simplifier grâce à l'identité

$$\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

En prenant $t = \pi\sqrt{x}$,

$$\cos(\arctan(\pi\sqrt{x})) = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2x}}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\pi^2x)^{3/2}}.$$

En 0, $f(0) = 0$. Comme $\arctan t \sim t$ et $\sin t \sim t$ lorsque $t \rightarrow 0$, on a

$$f(x) \sim \pi\sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0^+).$$

Ainsi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \sim \frac{\pi}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty.$$

La fonction n'est donc pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+\pi^2x)^{3/2}}.$$

La fonction n'est pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

Tableau récapitulatif

N°	Fonction	Dérivée
1	$\frac{(x+1)^3}{x^2}$	$\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}, x \neq 0$
2	$\frac{\sin x}{1 - \cos x}$	$-\frac{1}{1 - \cos x}, x \notin 2\pi\mathbb{Z}$
3	$(1 + \sin 2x)^3$	$6 \cos(2x)(1 + \sin 2x)^2$
4	$\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$	$\frac{x + 6x^{2/3} + 4\sqrt{x}}{6x^{2/3}(\sqrt{x}(x^{1/3} + 2)^2)}, x > 0$
5	$\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$	$\frac{\pi \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
6	$\tan(\sin x)$	$\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$
7	$\sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}$	$\frac{1 + (3x)^{-2/3}}{2\sqrt{x + \sqrt[3]{3x}}}, x > 0$
8	$\sin(\arctan(\pi\sqrt{x}))$	$\frac{\pi}{2\sqrt{x}(1 + \pi^2 x)^{3/2}}, x > 0$