

ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1 – CORRECTION INTÉGRALEMENT DÉTAILLÉE

Énoncé intégralement réécrit

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right).$$

- 1) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
- 2) a) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
b) Étudier les variations de f et dresser sa table de variation.
- 4) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I à déterminer.
- 5) Tracer dans un même repère les courbes (C_f) et $(\Gamma_{f^{-1}})$.

Préliminaire : quelques observations simples

Pour tout $x \geq 0$, on a $x+1 > 0$, donc $\sqrt{x+1}$ est bien définie et strictement positive. Par conséquent,

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \geq 0$$

et l'expression de $f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En particulier,

$$f(0) = 0 \times \arctan(0) = 0.$$

1) Dérivabilité de f à droite de 0

Par définition, le nombre dérivé à droite de f en 0, s'il existe, est

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Comme $f(0) = 0$, pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)}{x} = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 0,$$

et la fonction $\arctan$ est continue en 0. Donc

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) \rightarrow \arctan(0) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f'_d(0) = 0}.$$

Conclusion

La fonction f est dérivable à droite en 0. La courbe (C_f) admet à l'origine $O(0, 0)$ une demi-tangente horizontale d'équation

$$\boxed{y = 0}.$$

2) Étude au voisinage de $+\infty$

2.a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Étudions d'abord l'argument de arctan :

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

Pour $x > 0$,

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x} \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

Or

$$\sqrt{x} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{x}{x+1}} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, ce facteur tend vers un réel strictement positif. Comme $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

2.b) Étude de la branche infinie de (C_f)

Pour déterminer la direction éventuelle d'une branche infinie, calculons d'abord

$$\frac{f(x)}{x} = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right).$$

D'après ce qui précède,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}}.$$

La droite

$$\Delta : y = \frac{\pi}{2}x$$

est donc une direction asymptotique de la courbe.

Il faut maintenant savoir si (C_f) possède réellement cette droite comme asymptote oblique. Étudions la différence

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x = x \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2} \right].$$

Pour $u > 0$, on a l'identité

$$\arctan u + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Avec

$$u = \frac{x}{\sqrt{x+1}} > 0,$$

on obtient

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right).$$

Donc

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x = -x \arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right).$$

Posons

$$t_x = \frac{\sqrt{x+1}}{x}.$$

Alors $t_x > 0$ et $t_x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Écrivons

$$x \arctan(t_x) = xt_x \frac{\arctan(t_x)}{t_x} = \sqrt{x+1} \frac{\arctan(t_x)}{t_x}.$$

Nous justifions maintenant la limite classique

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

sans utiliser d'autre outil que le théorème des accroissements finis. Pour $t > 0$, appliquons ce théorème à $h(s) = \arctan s$ sur $[0, t]$. Il existe $\xi_t \in]0, t[$ tel que

$$\frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = h'(\xi_t) = \frac{1}{1 + \xi_t^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\arctan t}{t} = \frac{1}{1 + \xi_t^2}.$$

Comme $0 < \xi_t < t$ et $t \rightarrow 0^+$, on a $\xi_t \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\arctan t}{t} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{\arctan(t_x)}{t_x} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} \rightarrow +\infty.$$

D'où

$$x \arctan(t_x) \rightarrow +\infty$$

et finalement

$$\boxed{f(x) - \frac{\pi}{2}x \rightarrow -\infty}.$$

Conclusion

Au voisinage de $+\infty$, la courbe (C_f) possède une **branche parabolique** de direction

$$\Delta : y = \frac{\pi}{2}x.$$

La droite Δ n'est pas une asymptote oblique puisque l'écart $f(x) - \frac{\pi}{2}x$ ne tend pas vers 0 mais vers $-\infty$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$0 < \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) < \frac{\pi}{2},$$

donc

$$f(x) < \frac{\pi}{2}x.$$

La courbe reste donc au-dessous de sa direction asymptotique.

3) Dérivée et variations**3.a) Dérivabilité sur $]0, +\infty[$ et calcul de $f'(x)$**

Pour $x > 0$, posons

$$u(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} = x(x+1)^{-1/2}.$$

Les fonctions utilisées sont dérivables sur $]0, +\infty[$, donc u , $\arctan \circ u$, puis f le sont également.

Calculons $u'(x)$:

$$u'(x) = (x+1)^{-1/2} + x \left(-\frac{1}{2}\right) (x+1)^{-3/2}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$u'(x) = \frac{x+1}{(x+1)^{3/2}} - \frac{x}{2(x+1)^{3/2}} = \frac{2(x+1) - x}{2(x+1)^{3/2}}.$$

Ainsi,

$$u'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}.$$

D'autre part,

$$1 + u(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{x+1} = \frac{x+1+x^2}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Donc

$$(\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{x+2}{2(x+1)^{3/2}} \cdot \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

On simplifie :

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)\right)' = \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}(x^2+x+1)}.$$

Comme

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right),$$

la formule de dérivation d'un produit donne

$$f'(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) + \frac{x(x+2)}{2\sqrt{x+1}(x^2+x+1)}.$$

3.b) Signe de $f'(x)$ et variations de f

Soit $x > 0$. Alors

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} > 0,$$

donc

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) > 0.$$

Par ailleurs,

$$\frac{x(x+2)}{2\sqrt{x+1}(x^2+x+1)} > 0,$$

car tous les facteurs du numérateur et du dénominateur sont strictement positifs. Ainsi,

$$\boxed{f'(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0}.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Comme f est continue à droite en 0, avec $f(0) = 0$, elle est en fait strictement croissante sur tout $\mathbb{R}^+$.

Nous avons aussi

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La table de variation est donc :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

Conclusion

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+}.$$

4) Bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Son image est donc l'intervalle déterminé par ses valeurs aux extrémités du domaine :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi,

$$f(\mathbb{R}^+) = [0, +\infty[= \mathbb{R}^+.$$

Par stricte croissance, f est injective. Comme son image est exactement $\mathbb{R}^+$, elle est surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$$\boxed{f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est bijective.}}$$

L'intervalle demandé est donc

$$\boxed{I = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[}.$$

La fonction réciproque f^{-1} est elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

5) Tracé de (C_f) et $(\Gamma_{f^{-1}})$ dans un même repère

Les courbes d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice

$$\boxed{y = x}.$$

Nous allons relever les éléments utiles au tracé.

- (C_f) passe par $O(0,0)$ et y possède une demi-tangente horizontale $y = 0$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Au voisinage de $+\infty$, (C_f) possède une branche parabolique de direction $y = \frac{\pi}{2}x$, située au-dessous de cette droite.
- La courbe $(\Gamma_{f^{-1}})$ est l'image de (C_f) par la symétrie d'axe $y = x$.
- Comme (C_f) possède en O une demi-tangente horizontale, $(\Gamma_{f^{-1}})$ possède en O une demi-tangente verticale, d'équation $x = 0$.

Pour mieux positionner les deux courbes, cherchons leur point d'intersection autre que l'origine. Les courbes (C_f) et $(\Gamma_{f^{-1}})$ se coupent exactement sur la droite $y = x$. On cherche donc les solutions de

$$f(x) = x.$$

Pour $x > 0$, cela équivaut à

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = 1,$$

puis à

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \tan 1.$$

Comme les deux membres sont positifs, nous pouvons élever au carré :

$$x^2 = (\tan^2 1)(x+1).$$

On obtient

$$x^2 - (\tan^2 1)x - \tan^2 1 = 0.$$

L'unique solution positive est

$$\alpha = \frac{\tan^2 1 + \sqrt{\tan^4 1 + 4 \tan^2 1}}{2}$$

et numériquement

$$\alpha \approx 3.187.$$

Ainsi les deux courbes se coupent en

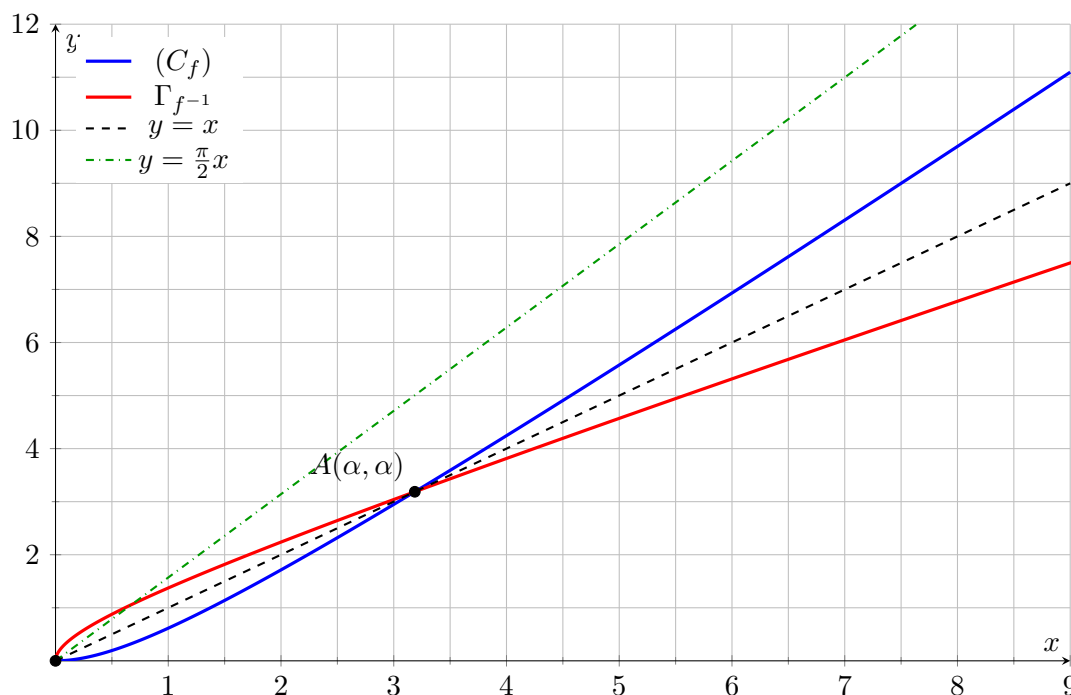
$$O(0,0) \quad \text{et} \quad A(\alpha, \alpha).$$

De plus, comme f est croissante et que $f(x) - x$ change de signe en α , on a :

$$0 < x < \alpha \implies f(x) < x,$$

$$x > \alpha \implies f(x) > x.$$

Par symétrie, cela permet de placer immédiatement $(\Gamma_{f^{-1}})$ par rapport à la droite $y = x$.



Conclusion

Les deux courbes sont symétriques par rapport à $y = x$. La courbe (C_f) part de l'origine avec une demi-tangente horizontale, tandis que $(\Gamma_{f^{-1}})$ part de l'origine avec une demi-tangente verticale. Elles se recoupent au point $A(\alpha, \alpha)$ avec $\alpha \approx 3.187$.

Synthèse finale

Question	Résultat essentiel
Dérivabilité à droite en 0	$f'_d(0) = 0$; demi-tangente horizontale $y = 0$.
Limite en $+\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$.
Branche infinie	$f(x)/x \rightarrow \pi/2$ et $f(x) - \frac{\pi}{2}x \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction $y = \frac{\pi}{2}x$.
Dérivée	$f'(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) + \frac{x(x+2)}{2\sqrt{x+1}(x^2+x+1)}$.
Variations	$f'(x) > 0$ pour $x > 0$, donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Bijection	f bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
Courbe réciproque	$\Gamma_{f^{-1}}$ est la symétrique de C_f par rapport à $y = x$.

ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 2 – CORRECTION INTÉGRALEMENT DÉTAILLÉE

Énoncé intégralement réécrit

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(x\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}}\right), & x^2 \neq 1, \\ f(1) = \frac{\pi}{2}, & f(-1) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f , puis calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

2) Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 et à droite de 1 et -1 .

3) Calculer $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f .

4) Soit g la restriction de la fonction f sur $[-1, 0]$.

a) Montrer que g est une bijection de $[-1, 0]$ vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

1. Domaine de définition et limite en $+\infty$

1.1. Domaine de définition

Pour $x^2 \neq 1$, l'expression

$$\frac{x}{x^2-1}$$

est bien définie. La racine cubique est définie pour tout nombre réel, qu'il soit positif, nul ou négatif. L'arctangente est elle aussi définie sur tout $\mathbb{R}$.

Ainsi, la formule principale définit f pour tout

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Mais l'énoncé donne séparément les deux valeurs

$$f(1) = \frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Les deux points exclus par le quotient sont donc réintroduits par la définition par morceaux. Par conséquent,

Conclusion

$$D_f = \mathbb{R}.$$

1.2. Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Posons, pour $x \neq \pm 1$,

$$u(x) = x\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}}.$$

Pour $x > 1$, toutes les quantités qui apparaissent sont positives. Cubons $u(x)$:

$$u(x)^3 = x^3 \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x^4}{x^2 - 1}.$$

Or

$$\frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x^2 \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1.$$

Donc

$$u(x)^3 \rightarrow +\infty.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$u(x) \rightarrow +\infty.$$

Enfin,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

Par composition,

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Dérivabilité aux points particuliers

2.1. Dérivabilité à gauche en 0

La formule est valable en 0 puisque $0^2 \neq 1$. On a

$$f(0) = \arctan\left(0 \times \sqrt[3]{\frac{0}{-1}}\right) = \arctan(0) = 0.$$

Le nombre dérivé à gauche en 0, s'il existe, est

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Comme $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$ proche de 0,

$$f(x) = \arctan\left(x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}\right),$$

on obtient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \arctan\left(x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}\right).$$

Posons

$$w(x) = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Alors

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\arctan(w(x))}{w(x)} \frac{w(x)}{x} = \frac{\arctan(w(x))}{w(x)} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$,

$$\frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow 0^+, \quad \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}} \rightarrow 0, \quad w(x) \rightarrow 0.$$

De plus, la limite usuelle

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

donne

$$\frac{\arctan(w(x))}{w(x)} \rightarrow 1.$$

Ainsi,

$$f'_g(0) = 1 \times 0 = 0.$$

Conclusion

f est dérivable à gauche en 0 et

$$f'_g(0) = 0.$$

Le même calcul à droite donne également $f'_d(0) = 0$; en particulier, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2.2. Dérivabilité à droite en 1

Pour $x > 1$, posons toujours

$$u(x) = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}} > 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^+$, on a $x^2 - 1 \rightarrow 0^+$, donc

$$\frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow +\infty, \quad u(x) \rightarrow +\infty,$$

et par suite

$$f(x) = \arctan u(x) \rightarrow \frac{\pi}{2} = f(1).$$

La fonction est donc continue à droite en 1.

Étudions maintenant le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\arctan u(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1}.$$

Pour $u > 0$,

$$\arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\arctan u - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{u}.$$

Ainsi

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{\arctan\left(\frac{1}{u(x)}\right)}{x - 1}.$$

Posons

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x}}.$$

Alors $v(x) \rightarrow 0^+$ et

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{\arctan(v(x))}{v(x)} \frac{v(x)}{x - 1}.$$

Or

$$\frac{v(x)}{x - 1} = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{(x - 1)(x + 1)}{x}} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x}} \frac{1}{(x - 1)^{2/3}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^+$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow 1, \quad \sqrt[3]{\frac{x + 1}{x}} \rightarrow \sqrt[3]{2}, \quad \frac{1}{(x - 1)^{2/3}} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{v(x)}{x-1} \rightarrow +\infty.$$

Comme $\arctan(v)/v \rightarrow 1$ lorsque $v \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty.$$

Point important

La limite du taux d'accroissement n'est pas finie. Ainsi f n'est pas dérivable à droite en 1 au sens usuel. La courbe possède cependant en $(1, \pi/2)$ une demi-tangente verticale à droite, d'équation $x = 1$.

2.3. Dérivabilité à droite en -1

Pour $-1 < x < 0$, on a $x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$, donc

$$\frac{x}{x^2 - 1} > 0$$

et

$$u(x) = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}} < 0.$$

Lorsque $x \rightarrow -1^+$,

$$\frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow +\infty, \quad u(x) \rightarrow -\infty,$$

donc

$$f(x) = \arctan u(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2} = f(-1).$$

La fonction est continue à droite en -1 .

Le taux d'accroissement vaut

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\arctan u(x) + \frac{\pi}{2}}{x + 1}.$$

Pour $u < 0$, on a

$$\arctan u + \frac{\pi}{2} = \arctan\left(-\frac{1}{u}\right).$$

Posons

$$v(x) = -\frac{1}{u(x)} > 0.$$

Alors $v(x) \rightarrow 0^+$ et

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\arctan(v(x))}{v(x)} \frac{v(x)}{x + 1}.$$

Calculons le second facteur. Comme

$$-\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x}},$$

on obtient, pour $x > -1$ assez proche de -1 ,

$$\frac{v(x)}{x + 1} = -\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{(x + 1)(x - 1)}{x}} \frac{1}{x + 1} = -\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x}} \frac{1}{(x + 1)^{2/3}}.$$

Quand $x \rightarrow -1^+$,

$$-\frac{1}{x} \rightarrow 1, \quad \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x}} \rightarrow \sqrt[3]{2}, \quad \frac{1}{(x + 1)^{2/3}} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\frac{v(x)}{x+1} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty.$$

Point important

f n'est pas dérivable à droite en -1 au sens usuel. La courbe possède une demi-tangente verticale à droite au point $(-1, -\pi/2)$, d'équation $x = -1$.

3. Calcul de $f'(x)$, signe de f' et variations

3.1. Calcul de la dérivée sur les intervalles où la formule est régulière

Pour

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\},$$

posons

$$u(x) = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Alors

$$f(x) = \arctan(u(x))$$

et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}.$$

Posons aussi

$$h(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

On a

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

Puis

$$u(x) = x h(x)^{1/3}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit,

$$u'(x) = h(x)^{1/3} + x \cdot \frac{1}{3} h(x)^{-2/3} h'(x).$$

En remplaçant h et h' et en simplifiant, on obtient

$$u'(x) = \frac{2(x^2 - 2)}{3(x^2 - 1)} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 2) \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}}{3(x^2 - 1) \left(1 + x^2 \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}} \right)^2 \right)} \quad (x \neq -1, 0, 1).$$

Nous avons déjà établi que

$$f'(0) = 0.$$

3.2. Signe de $f'(x)$

Le facteur

$$3 \left(1 + x^2 \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}} \right)^2 \right)$$

est strictement positif.

Il reste donc à étudier le signe de

$$\frac{(x^2-2)}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}}.$$

La racine cubique conserve le signe de son argument :

$$\operatorname{sgn} \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}} \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{x}{x^2-1} \right).$$

Ainsi,

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}} \right) = \operatorname{sgn}(x),$$

car le facteur (x^2-1) intervient deux fois dans le signe et son carré de signe vaut $+$.

On en déduit la règle particulièrement simple

$$\boxed{\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(x(x^2-2))} \quad (x \neq -1, 0, 1).$$

Les zéros pertinents sont donc

$$x = -\sqrt{2}, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{2}.$$

Les points -1 et 1 sont des points où f' n'existe pas.

3.3. Tableau de signe de f'

x	$] -\infty, -\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$] -\sqrt{2}, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, 1[$	1	$] 1, \sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$] \sqrt{2}, +\infty[$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$

Ici « n.d. » signifie que le nombre dérivé n'est pas défini au point considéré.

Conclusion

f est :

- strictement décroissante sur $] -\infty, -\sqrt{2}]$;
- strictement croissante sur $[-\sqrt{2}, -1[$;
- strictement croissante sur $[-1, 0]$;
- strictement décroissante sur $[0, 1[$;
- strictement décroissante sur $[1, \sqrt{2}]$;
- strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

3.4. Valeurs et limites nécessaires au tableau de variation

Pour $x \neq \pm 1$,

$$u(-x) = (-x) \sqrt[3]{\frac{-x}{x^2-1}} = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}} = u(x).$$

La formule principale est donc paire sur son domaine d'expression. En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Aux points critiques $\pm\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2},$$

donc

$$\sqrt{2} \sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{1/2} 2^{1/6} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$$

Ainsi

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \arctan(\sqrt[3]{4}).$$

De plus,

$$f(0) = 0.$$

Aux points ± 1 , il faut distinguer les limites et les valeurs imposées :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Il y a donc un saut à gauche de -1 et un saut en arrivant à 1 par la gauche.

3.5. Tableaux de variation de f

Posons, pour alléger l'écriture,

$$A = \arctan(\sqrt[3]{4}).$$

Comme f présente des ruptures aux points -1 et 1 , le tableau global est beaucoup plus lisible et surtout plus rigoureux si l'on sépare les trois branches de la courbe.

Première branche : $] - \infty, -1[$. Sur $] - \infty, -\sqrt{2}[$, on a $f'(x) < 0$, puis sur $] - \sqrt{2}, -1[$, on a $f'(x) > 0$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad f(-\sqrt{2}) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

x	$-\infty$	$] - \infty, -\sqrt{2}[$	$-\sqrt{2}$	$] - \sqrt{2}, -1[$	-1^-
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	A	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Deuxième branche : $[-1, 1[$. Sur $] -1, 0[$, on a $f'(x) > 0$, puis sur $]0, 1[$, on a $f'(x) < 0$. En outre,

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

D'où :

x	-1	$] -1, 0[$	0	$]0, 1[$	1^-
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

Troisième branche : $[1, +\infty[$. Sur $]1, \sqrt{2}[$, on a $f'(x) < 0$, puis sur $]\sqrt{2}, +\infty[$, on a $f'(x) > 0$. De plus,

$$f(1) = \frac{\pi}{2}, \quad f(\sqrt{2}) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

x	1	$]1, \sqrt{2}[$	$\sqrt{2}$	$]\sqrt{2}, +\infty[$	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	–	0	+	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	A	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Point important

Les ruptures sont essentielles :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq f(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq f(1) = \frac{\pi}{2}.$$

On ne doit donc jamais relier les branches à travers -1 ou 1 par une flèche continue dans un tableau de variation.

4. Restriction g de f à $[-1, 0]$

4.a. Montrer que g est bijective et déterminer J

Sur $] -1, 0[$, nous avons montré que

$$f'(x) > 0.$$

De plus, f est continue à droite en -1 , continue sur $] -1, 0]$, et

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(0) = 0.$$

Par conséquent, la restriction

$$g = f|_{[-1, 0]}$$

est continue et strictement croissante sur $[-1, 0]$.

Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est une bijection de cet intervalle sur son image. Comme g est croissante,

$$g([-1, 0]) = [g(-1), g(0)] = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Donc

Conclusion

$$J = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

et

$$g : [-1, 0] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ est bijective.}$$

4.b. Expression explicite de g^{-1}

Soit

$$y \in J = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Nous cherchons l'unique $x \in [-1, 0]$ tel que

$$y = g(x).$$

Commençons par le cas

$$-\frac{\pi}{2} < y \leq 0.$$

Alors $x \in]-1, 0]$ et la formule principale s'applique :

$$y = \arctan\left(x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}\right).$$

Comme $y \in]-\pi/2, 0]$, la tangente est définie et l'arctangente est injective. On peut donc prendre la tangente des deux membres :

$$\tan y = x \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Cubons les deux membres :

$$\tan^3 y = x^3 \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x^4}{x^2 - 1}.$$

Posons

$$X = x^2.$$

Comme $x \in]-1, 0]$,

$$X \in [0, 1[.$$

L'équation devient

$$\tan^3 y = \frac{X^2}{X - 1}.$$

Donc

$$\tan^3 y (X - 1) = X^2,$$

c'est-à-dire

$$X^2 - \tan^3 y X + \tan^3 y = 0.$$

C'est une équation du second degré en X . Son discriminant vaut

$$\Delta = \tan^6 y - 4 \tan^3 y.$$

Comme $y \in]-\pi/2, 0]$, on a $\tan y \leq 0$, donc $\tan^3 y \leq 0$ et $\Delta \geq 0$.

Les deux solutions algébriques sont

$$X_1 = \frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2},$$

$$X_2 = \frac{\tan^3 y - \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}.$$

Or

$$\sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y} \geq |\tan^3 y| = -\tan^3 y,$$

donc

$$X_2 \leq 0.$$

Comme $X = x^2 \geq 0$, la seule solution admissible est

$$X = \frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}.$$

Ainsi

$$x^2 = \frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}.$$

Mais $x \in [-1, 0]$, donc on doit choisir la racine carrée négative :

$$x = -\sqrt{\frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}}.$$

Par conséquent, pour $-\pi/2 < y \leq 0$,

$$g^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}}.$$

Au bord gauche de J , la tangente n'est pas définie, mais la valeur de l'inverse est immédiate :

$$g(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad g^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Conclusion

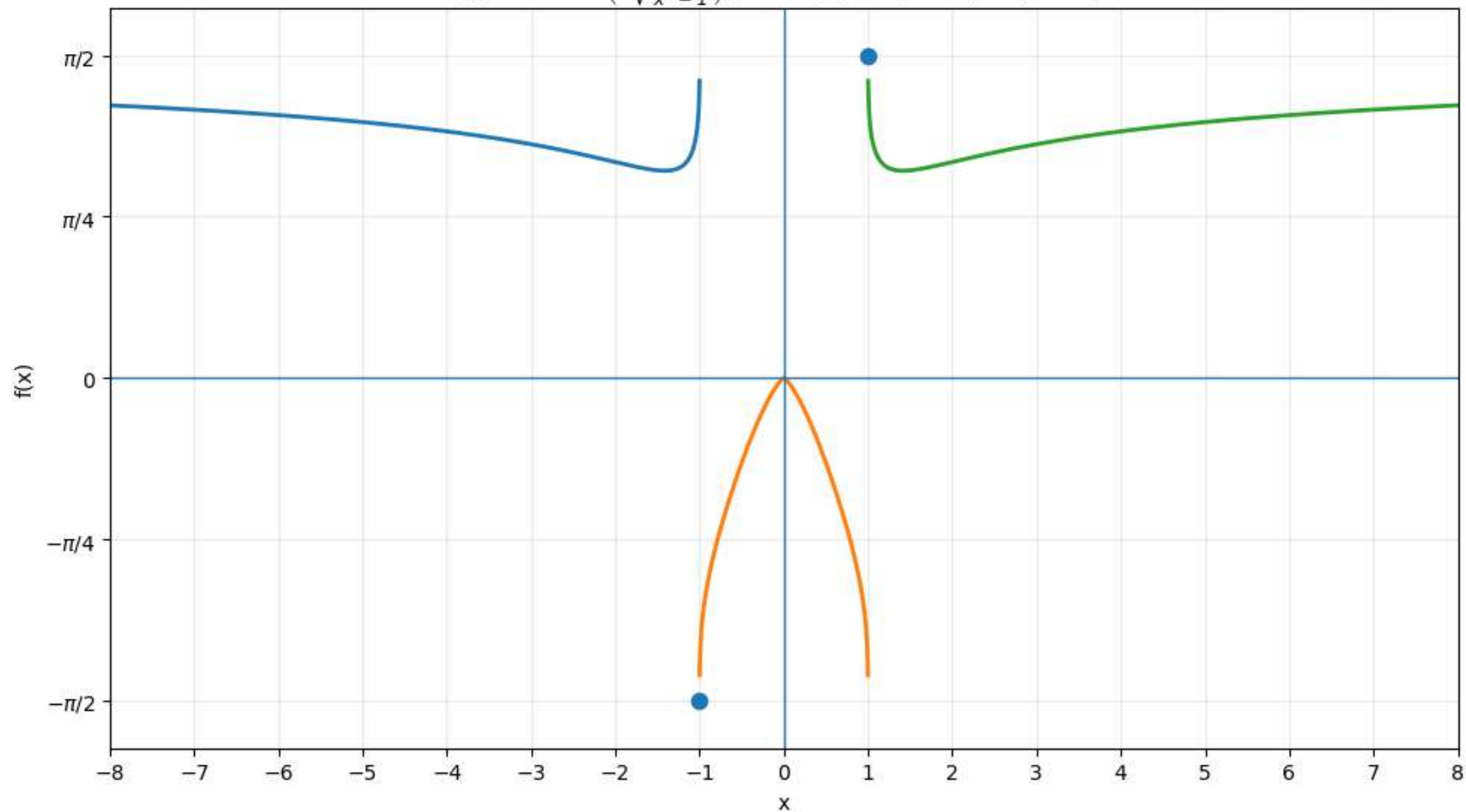
La fonction réciproque est donc donnée par

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} -1, & y = -\frac{\pi}{2}, \\ -\sqrt{\frac{\tan^3 y + \sqrt{\tan^6 y - 4 \tan^3 y}}{2}}, & -\frac{\pi}{2} < y \leq 0. \end{cases}$$

Synthèse finale

Domaine	$D_f = \mathbb{R}$
Limite en $+\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi/2$
À gauche de 0	$f'_g(0) = 0$; en fait $f'(0) = 0$
À droite de 1	taux d'accroissement $\rightarrow -\infty$: pas de dérivée finie
À droite de -1	taux d'accroissement $\rightarrow +\infty$: pas de dérivée finie
Zéros de f'	$-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$
Signe de f'	signe de $x(x^2 - 2)$ hors $\{-1, 0, 1\}$
Valeurs en $\pm\sqrt{2}$	$f(\pm\sqrt{2}) = \arctan(\sqrt[3]{4})$
Restriction g	$g : [-1, 0] \rightarrow [-\pi/2, 0]$ bijective

$$f(x) = \arctan\left(x\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right), \text{ avec } f(1) = \pi/2 \text{ et } f(-1) = -\pi/2$$



EXERCICE 3

Étude complète d'une fonction définie par morceaux

Énoncé intégralement réécrit

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}, & x \geq 2, \\ \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right), & x < 2. \end{cases}$$

- 1) a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
b) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point 2.
- 2) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 3) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

puis étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

- 4) a) Calculer la fonction dérivée sur $] - \infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.
b) Étudier les variations de f et dresser sa table de variation.
- 5) Soit g la restriction de la fonction f sur $] - \infty, 2[$.
a) Montrer que g est une bijection de $] - \infty, 2[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

1. Continuité et dérivabilité au point de raccordement 2

1.a) Étude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$

Idée / méthode

La fonction est donnée par deux expressions différentes. Chacune est continue à l'intérieur de son intervalle de définition. Le seul point où une vérification spéciale est nécessaire est donc le point de raccordement $x = 2$.

Sur $] - \infty, 2[$. Pour $x < 2$, on a $2 - x > 0$, donc $\sqrt{2-x} > 0$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

est bien défini. Les fonctions $x \mapsto 2 - x$, $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $]0, +\infty[$, $v \mapsto 1/v$ et $t \mapsto \arctan t$ étant continues sur les ensembles concernés, la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$$

est continue sur $] - \infty, 2[$.

Sur $]2, +\infty[$. Pour $x > 2$,

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2) > 0.$$

La racine cubique est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$x \mapsto 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

est continue sur $]2, +\infty[$.

Il reste à étudier le point $x = 2$.

D'abord, comme $2 \geq 2$,

$$f(2) = 1 + \sqrt[3]{2^3 - 2 \cdot 2^2} = 1 + \sqrt[3]{8 - 8} = 1.$$

Calculons la limite à gauche. Lorsque $x \rightarrow 2^-$,

$$2 - x \rightarrow 0^+, \quad \sqrt{2 - x} \rightarrow 0^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2 - x}} \rightarrow +\infty.$$

Or

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

À droite, lorsque $x \rightarrow 2^+$,

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2) \rightarrow 0^+,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + \sqrt[3]{0} = 1.$$

Nous avons donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Conclusion

La fonction f est continue en 2. Comme elle est continue sur chacun des deux intervalles situés de part et d'autre de 2, elle est finalement continue sur tout $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

1.b) Dérivabilité à gauche et à droite en 2

Dérivée à gauche en 2

Par définition, le nombre dérivé à gauche serait

$$f'_g(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2},$$

si cette limite était réelle et finie.

Posons

$$h = 2 - x > 0.$$

Alors $x \rightarrow 2^-$ équivaut à $h \rightarrow 0^+$ et $x - 2 = -h$.

Pour $x < 2$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Pour tout $u > 0$, on sait que

$$\arctan u + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Avec $u = 1/\sqrt{h}$, on obtient

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{h}).$$

Donc

$$f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\sqrt{h}).$$

Comme $f(2) = 1$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{-\frac{2}{\pi} \arctan(\sqrt{h})}{-h} = \frac{2}{\pi} \frac{\arctan(\sqrt{h})}{h}.$$

Écrivons

$$\frac{\arctan(\sqrt{h})}{h} = \frac{\arctan(\sqrt{h})}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty.$$

La limite n'étant pas un nombre réel fini, f n'est pas dérivable à gauche en 2 au sens usuel.

Dérivée à droite en 2

Pour $x > 2$,

$$f(x) - f(2) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = \sqrt[3]{x^2(x - 2)}.$$

Ainsi

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt[3]{x^2(x - 2)}}{x - 2} = \frac{x^{2/3}(x - 2)^{1/3}}{x - 2} = \frac{x^{2/3}}{(x - 2)^{2/3}}.$$

Lorsque $x \rightarrow 2^+$,

$$x^{2/3} \rightarrow 2^{2/3} > 0, \quad (x - 2)^{2/3} \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty.$$

La fonction n'est donc pas dérivable à droite en 2 au sens usuel.

Point important

Les deux taux d'accroissement tendent vers $+\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 2 au sens usuel, mais la courbe (C_f) possède au point

$$A(2, 1)$$

une tangente verticale d'équation

$$x = 2.$$

2. Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Limite en $+\infty$

Pour $x \geq 2$,

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = 1 + \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}.$$

Pour $x > 0$,

$$\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = x \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}.$$

Or

$$\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} \rightarrow 1.$$

Ainsi le second terme est équivalent en grandeur à x et tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Limite en $-\infty$

Pour $x < 2$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$2-x \rightarrow +\infty, \quad \sqrt{2-x} \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{\sqrt{2-x}} \rightarrow 0^+.$$

Comme $\arctan t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Conclusion

En particulier, au voisinage de $-\infty$, la courbe (C_f) admet l'asymptote horizontale

$$y = 0.$$

3. Branche infinie au voisinage de $+\infty$

Pour $x \geq 2$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}.$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

La courbe possède donc au voisinage de $+\infty$ une branche infinie de direction la droite de pente 1.

Pour savoir s'il existe une asymptote oblique, calculons $f(x) - x$.

Posons

$$a_x = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}.$$

Alors $a_x \rightarrow 1$ et

$$f(x) - x = 1 + x(a_x - 1).$$

Utilisons l'identité

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Avec $a = a_x$ et $b = 1$,

$$a_x - 1 = \frac{a_x^3 - 1}{a_x^2 + a_x + 1} = \frac{-2/x}{a_x^2 + a_x + 1}.$$

Ainsi

$$x(a_x - 1) = -\frac{2}{a_x^2 + a_x + 1}.$$

Donc

$$f(x) - x = 1 - \frac{2}{a_x^2 + a_x + 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $a_x \rightarrow 1$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1 - \frac{2}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x - \frac{1}{3} \right) = 0.$$

La droite

$$\Delta : y = x + \frac{1}{3}$$

est donc une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Position de (C_f) par rapport à Δ

Pour $x > 2$, on a

$$0 < a_x = \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} < 1.$$

De plus,

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{a_x^2 + a_x + 1}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{3} \right) = \frac{2(a_x^2 + a_x + 1) - 6}{3(a_x^2 + a_x + 1)} = \frac{2(a_x^2 + a_x - 2)}{3(a_x^2 + a_x + 1)}.$$

Or

$$a_x^2 + a_x - 2 = (a_x - 1)(a_x + 2).$$

Comme $0 < a_x < 1$, on a $a_x - 1 < 0$ et $a_x + 2 > 0$. Le dénominateur est strictement positif. Donc

$$f(x) < x + \frac{1}{3} \quad (x > 2).$$

Conclusion

Au voisinage de $+\infty$, (C_f) admet l'asymptote oblique

$$y = x + \frac{1}{3},$$

et la courbe est située en dessous de cette asymptote pour tout $x > 2$.

4. Dérivée, signe de f' et variations de f

4.a) Calcul de $f'(x)$

Sur $] -\infty, 2[$

Pour $x < 2$, posons

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} = (2-x)^{-1/2}.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{2}(2-x)^{-3/2}.$$

Comme

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(u(x)),$$

on obtient

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}.$$

Or

$$u(x)^2 = \frac{1}{2-x},$$

donc

$$1 + u(x)^2 = 1 + \frac{1}{2-x} = \frac{3-x}{2-x}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{2}(2-x)^{-3/2}}{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{1}{\pi} (2-x)^{-3/2} \frac{2-x}{3-x}.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{\pi(3-x)\sqrt{2-x}} \quad (x < 2).$$

Pour $x < 2$,

$$3-x > 1 > 0, \quad \sqrt{2-x} > 0,$$

donc

$$f'(x) > 0 \quad (x < 2).$$

Sur $]2, +\infty[$

Pour $x > 2$,

$$f(x) = 1 + (x^3 - 2x^2)^{1/3}.$$

La quantité $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ est strictement positive, donc la dérivation est permise :

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 2x^2)^{-2/3} (3x^2 - 4x).$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{x(3x-4)}{3(x^3-2x^2)^{2/3}} \quad (x > 2).$$

Comme $x > 2$, on a

$$x > 0, \quad 3x-4 > 2 > 0, \quad (x^3-2x^2)^{2/3} > 0.$$

Donc

$$f'(x) > 0 \quad (x > 2).$$

Tableau de signe de f'

x	$] -\infty, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	non définie	$+$

Le signe est donc strictement positif de chaque côté de 2. La seule particularité est que f' n'existe pas comme nombre réel fini en 2.

4.b) Variations de f

Puisque $f'(x) > 0$ sur $] -\infty, 2[$, f est strictement croissante sur cet intervalle.

Puisque $f'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$, f est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, f est continue en 2 et

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Pour justifier rigoureusement la croissance sur tout $\mathbb{R}$, considérons deux réels $x_1 < x_2$. Si les deux sont du même côté de 2, la croissance déjà démontrée suffit. Si

$$x_1 < 2 < x_2,$$

alors, puisque f est strictement croissante sur $] -\infty, 2[$,

$$f(x_1) < \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1,$$

et puisque f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$,

$$1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) < f(x_2).$$

Ainsi

$$f(x_1) < 1 < f(x_2),$$

donc $f(x_1) < f(x_2)$. On peut donc conclure que f est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Les valeurs utiles sont

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad f(2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	non définie	+
$f(x)$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$

Pour rendre la lecture encore plus explicite :

$$0 \xrightarrow[\text{croissante}]{x: -\infty \rightarrow 2} 1 \xrightarrow[\text{croissante}]{x: 2 \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Conclusion

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le point $x = 2$ n'interrompt pas la croissance : il correspond seulement à une tangente verticale.

5. Étude de la restriction g sur $] -\infty, 2[$

On définit

$$g :] -\infty, 2[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right).$$

5.a) Montrer que g est bijective et déterminer J

Nous avons déjà démontré que, pour tout $x < 2$,

$$g'(x) = \frac{1}{\pi(3-x)\sqrt{2-x}} > 0.$$

Donc g est strictement croissante sur $] -\infty, 2[$.

Une fonction strictement croissante est injective. Ainsi g est injective.

Calculons les valeurs limites aux extrémités de l'intervalle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1.$$

Pour tout $x < 2$,

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} > 0,$$

donc

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) < \frac{\pi}{2},$$

et donc

$$0 < g(x) < 1.$$

Les deux bornes 0 et 1 ne sont pas atteintes puisque l'intervalle de départ est ouvert aux deux extrémités pertinentes $-\infty$ et 2.

Ainsi

$$J =]0, 1[.$$

Comme g est continue et strictement croissante de $] -\infty, 2[$ vers $]0, 1[$, elle prend une fois et une seule chaque valeur de $]0, 1[$.

Conclusion

$$g :] -\infty, 2[\longrightarrow]0, 1[\text{ est une bijection.}$$

5.b) Expression de g^{-1}

Soit $y \in J =]0, 1[$. Posons

$$y = g(x), \quad x < 2.$$

Alors

$$y = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right).$$

Multiplions par $\pi/2$:

$$\frac{\pi y}{2} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right).$$

Comme $0 < y < 1$,

$$0 < \frac{\pi y}{2} < \frac{\pi}{2},$$

donc la tangente est bien définie et strictement positive. En appliquant la tangente aux deux membres,

$$\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

On inverse les deux membres positifs :

$$\sqrt{2-x} = \frac{1}{\tan(\pi y/2)}.$$

En élevant au carré,

$$2 - x = \frac{1}{\tan^2(\pi y/2)}.$$

Ainsi

$$x = 2 - \frac{1}{\tan^2(\pi y/2)}.$$

Par définition de la fonction réciproque,

$$g^{-1}(y) = 2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \quad (y \in]0, 1[).$$

En utilisant la lettre x pour la variable de la fonction réciproque, on peut écrire

$$g^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}, \quad x \in]0, 1[.$$

Synthèse finale

Question	Résultat
Continuité	f est continue sur $\mathbb{R}$.
Dérivabilité en 2	Taux d'accroissement $\rightarrow +\infty$ à gauche et à droite ; tangente verticale $x = 2$.
Limites	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Branche en $+\infty$	Asymptote oblique $y = x + \frac{1}{3}$, courbe en dessous pour $x > 2$.
Signe de f'	$f'(x) > 0$ sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
Variations	f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Restriction g	$g :] -\infty, 2[\rightarrow]0, 1[$ est bijective.
Réciproque	$g^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{\tan^2(\pi x/2)}.$

ÉTUDE DE FONCTIONS – EXERCICE 4

Correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \sqrt{x+2}, & x \geq -2, \\ x+2 - \sqrt{x^2+2x}, & x < -2. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue au point -2 .
(b) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2 .
2. (a) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(b) Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
3. (a) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty, -2[$ et $] -2, +\infty[$.
(b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. (a) Montrer que

$$\forall x \in] -\infty, -2], \quad f(x) \geq 2x + 3.$$

- (b) Tracer la courbe (C_f) .
5. Soit g la restriction de la fonction f sur $] -\infty, -2[$.
(a) Montrer que g est une bijection de $] -\infty, -2[$ vers un intervalle J à déterminer.
(b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .
(c) Tracer, dans le repère précédent, la courbe de la fonction réciproque g^{-1} .
6. Soit $(U_n)_n$ la suite définie par

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1, 2]$.
- (b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \arctan x \leq x.$$

- (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < U_n \leq 2.$$

- (d) Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$, puis en déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Correction détaillée

1) Continuité et dérivabilité au point -2

1.a) Continuité de f au point -2

Comme $-2 \geq -2$, la valeur $f(-2)$ se calcule avec la première expression :

$$f(-2) = \arctan \sqrt{-2+2} = \arctan 0 = 0.$$

Nous devons maintenant comparer cette valeur avec les limites à gauche et à droite.

Limite à droite. Pour $x > -2$,

$$f(x) = \arctan \sqrt{x+2}.$$

Lorsque $x \rightarrow -2^+$, on a $x+2 \rightarrow 0^+$, donc $\sqrt{x+2} \rightarrow 0$ et, par continuité de $\arctan$,

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \arctan 0 = 0.$$

Limite à gauche. Pour $x < -2$,

$$f(x) = x+2 - \sqrt{x^2+2x}.$$

Lorsque $x \rightarrow -2^-$,

$$x+2 \rightarrow 0^-, \quad x^2+2x = x(x+2) \rightarrow 0^+,$$

donc

$$\sqrt{x^2+2x} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 - 0 = 0.$$

Nous avons donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0.$$

Conclusion. f est continue en -2 .

1.b) Dérivabilité à gauche et à droite de -2

Nous étudions séparément les deux taux d'accroissement.

À droite de -2 . Posons $h = x+2$, donc $h \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow -2^+$. Comme $f(-2) = 0$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \frac{\arctan \sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{\arctan \sqrt{h}}{h}.$$

Posons $t = \sqrt{h}$. Alors $t \rightarrow 0^+$ et $h = t^2$, d'où

$$\frac{\arctan \sqrt{h}}{h} = \frac{\arctan t}{t^2} = \frac{\arctan t}{t} \cdot \frac{1}{t}.$$

Or, puisque $\arctan$ est dérivable en 0 et $(\arctan)'(0) = 1$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = 1.$$

Ainsi

$$\frac{\arctan t}{t} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = +\infty.$$

Il n'existe donc pas de nombre dérivé à droite fini en -2 .

À gauche de -2 . Pour $x < -2$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}}{x + 2} = 1 - \frac{\sqrt{x(x + 2)}}{x + 2}.$$

Comme $x + 2 < 0$, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{x(x + 2)}}{x + 2} = -\sqrt{\frac{x}{x + 2}}.$$

Ainsi

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 1 + \sqrt{\frac{x}{x + 2}}.$$

Quand $x \rightarrow -2^-$, le quotient $\frac{x}{x + 2} \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty.$$

Il n'existe donc pas non plus de nombre dérivé à gauche fini en -2 .

Conclusion. f n'est pas dérivable en -2 . Les deux taux d'accroissement tendent vers $+\infty$: la courbe (C_f) admet en $A(-2, 0)$ une tangente verticale d'équation $x = -2$.

2) Limite en $-\infty$ puis branches infinies

2.a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Cette question est traitée seule, avant l'étude des branches infinies.

Pour $x < -2$,

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Comme $\sqrt{x^2 + 2x} \geq 0$, on a

$$f(x) \leq x + 2.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty.$$

Par comparaison,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.}$$

2.b) Étude des branches infinies de (C_f)

Au voisinage de $-\infty$. La limite précédente vaut $-\infty$. Nous cherchons maintenant une éventuelle asymptote oblique.

Considérons

$$f(x) - (2x + 3).$$

Pour $x < -2$,

$$\begin{aligned} f(x) - (2x + 3) &= x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} - 2x - 3 \\ &= -x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x}. \end{aligned}$$

Rationalisons :

$$\begin{aligned} -x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x} &= \frac{(-x - 1)^2 - (x^2 + 2x)}{-x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x}{-x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= \frac{1}{-x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}. \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 3)) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{y = 2x + 3}$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

De plus, pour $x < -2$,

$$-x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x} > 0,$$

donc

$$f(x) - (2x + 3) > 0.$$

La courbe est donc au-dessus de cette asymptote sur $] -\infty, -2[$.

Au voisinage de $+\infty$. Pour $x \geq -2$,

$$f(x) = \arctan \sqrt{x + 2}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x + 2} \rightarrow +\infty,$$

et l'on sait que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$y = \frac{\pi}{2}$$

est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Comme $\arctan t < \frac{\pi}{2}$ pour tout $t \geq 0$, la courbe reste au-dessous de cette asymptote pour $x \geq -2$.

3) Dérivée, signe de f' et variations

3.a) Calcul de $f'(x)$ sur les deux intervalles demandés

Sur $] -\infty, -2[$. On a

$$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Comme $x^2 + 2x > 0$ sur cet intervalle,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \\ &= 1 - \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(x) = 1 - \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \quad x < -2.$$

Sur $] -2, +\infty[$. On a

$$f(x) = \arctan \sqrt{x + 2}.$$

Posons $u(x) = \sqrt{x + 2}$. Alors

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 2}}$$

et

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (\sqrt{x + 2})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + 2}} \\ &= \frac{1}{(x + 3)2\sqrt{x + 2}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{2(x + 3)\sqrt{x + 2}}, \quad x > -2.$$

Signe de f'

Pour $x < -2$, on a $x + 1 < 0$ et $\sqrt{x^2 + 2x} > 0$. Donc

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} < 0,$$

et par conséquent

$$f'(x) = 1 - \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} > 1 > 0.$$

Pour $x > -2$, on a $x + 3 > 1 > 0$ et $\sqrt{x + 2} > 0$, donc

$$f'(x) = \frac{1}{2(x + 3)\sqrt{x + 2}} > 0.$$

En $x = -2$, f' n'est pas définie.

x	$] -\infty, -2[$	-2	$] -2, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	non définie	$+$

3.b) Variations de f

La fonction est strictement croissante sur $] - \infty, -2[$ et sur $] - 2, +\infty[$. De plus, elle est continue en -2 et

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0.$$

Il n’y a donc aucun changement de sens de variation au point -2 : f est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Nous disposons des valeurs limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(-2) = 0, \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	non définie	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$

Conclusion. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $-\infty$ vers $\frac{\pi}{2}$, en passant par $f(-2) = 0$.

4) Position par rapport à une droite et tracé de (C_f)

4.a) Montrer que $f(x) \geq 2x + 3$ sur $] -\infty, -2]$

Nous séparons le point $x = -2$ du cas $x < -2$.

Au point $x = -2$.

$$f(-2) = 0 \quad \text{et} \quad 2(-2) + 3 = -1.$$

Donc

$$f(-2) = 0 > -1 = 2(-2) + 3.$$

Pour $x < -2$. Nous avons déjà calculé

$$f(x) - (2x + 3) = \frac{1}{-x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Or, pour $x < -2$,

$$-x - 1 > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + 2x} > 0.$$

Le dénominateur est donc strictement positif. Par conséquent

$$f(x) - (2x + 3) > 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) > 2x + 3.$$

En réunissant les deux cas,

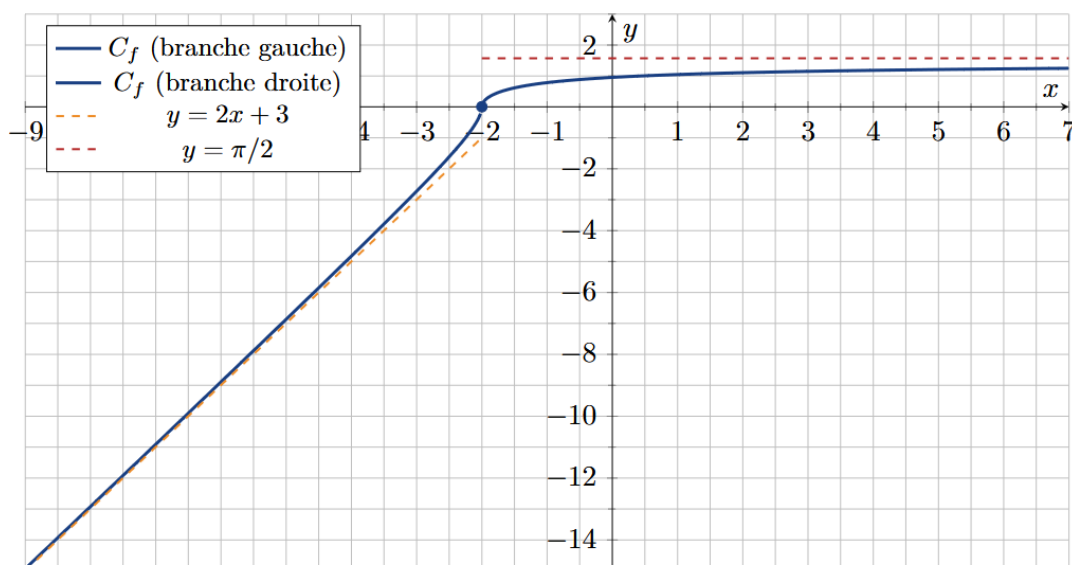
$$\boxed{\forall x \in] -\infty, -2], \quad f(x) \geq 2x + 3.}$$

En réalité, l'inégalité est stricte sur tout $] -\infty, -2]$.

4.b) Tracé de la courbe (C_f)

Pour construire la courbe, nous utilisons les informations déjà obtenues :

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $A(-2, 0)$ appartient à la courbe ;
- la tangente en A est verticale : $x = -2$;
- au voisinage de $-\infty$, l'asymptote est $y = 2x + 3$ et (C_f) est au-dessus ;
- au voisinage de $+\infty$, l'asymptote horizontale est $y = \frac{\pi}{2}$, et (C_f) est au-dessous.



5) Restriction g et fonction réciproque

On définit g comme la restriction de f à $] -\infty, -2[$:

$$g(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}, \quad x < -2.$$

5.a) Bijection et détermination de J

Sur $] -\infty, -2[$, nous avons montré que

$$g'(x) = f'(x) > 0.$$

Donc g est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est par ailleurs continue sur $] -\infty, -2[$.

Aux extrémités,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 0.$$

Comme -2 n'appartient pas au domaine de g , la valeur 0 n'est pas atteinte par g .

Ainsi

$$g(] -\infty, -2[) =] -\infty, 0[.$$

Donc

$$J =] -\infty, 0[.$$

Puisque g est continue et strictement croissante de $] -\infty, -2[$ sur J , elle est bijective.

Conclusion. $g :] -\infty, -2[\rightarrow] -\infty, 0[$ est une bijection.

5.b) Expression de g^{-1}

Soit $y \in J =] -\infty, 0[$. Cherchons l'unique $x < -2$ tel que

$$y = g(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

On isole la racine :

$$\sqrt{x^2 + 2x} = x + 2 - y.$$

Pour la solution recherchée, le membre de droite est positif. Nous pouvons donc élever au carré :

$$x^2 + 2x = (x + 2 - y)^2.$$

Développons :

$$x^2 + 2x = x^2 + 4x + 4 - 2y(x + 2) + y^2.$$

Après simplification,

$$2x = 4x + 4 - 2xy - 4y + y^2.$$

Donc

$$2x(1 - y) = -4 + 4y - y^2.$$

Comme $y < 0$, on a $1 - y > 0$, donc

$$x = \frac{-4 + 4y - y^2}{2(1 - y)}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par -1 ,

$$x = \frac{y^2 - 4y + 4}{2(y - 1)} = \frac{(y - 2)^2}{2(y - 1)}.$$

Ainsi

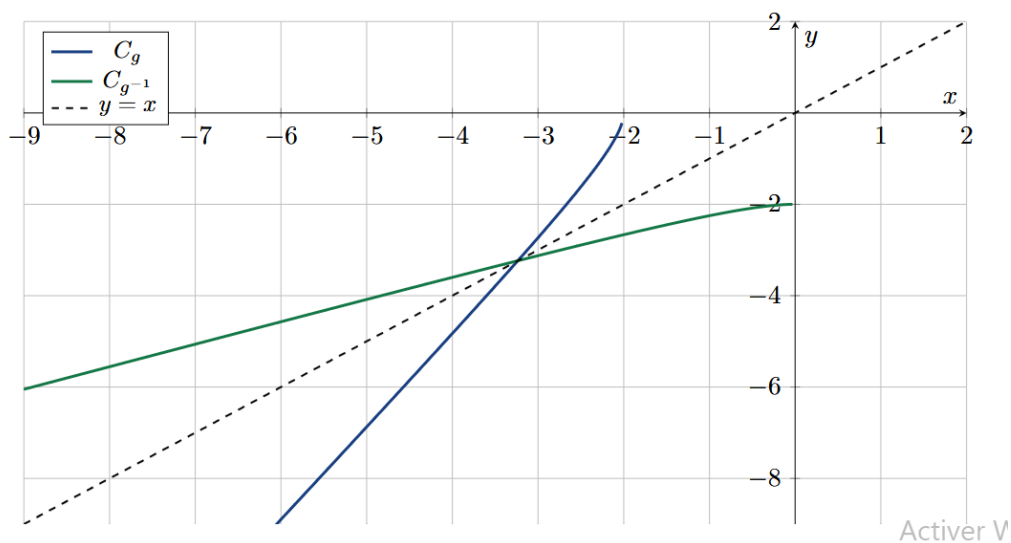
$$g^{-1}(y) = \frac{(y-2)^2}{2(y-1)}, \quad y < 0.$$

En remplaçant la lettre y par x ,

$$g^{-1}(x) = \frac{(x-2)^2}{2(x-1)}, \quad x \in]-\infty, 0[.$$

5.c) Tracé de la courbe de g^{-1}

La courbe de g^{-1} est l'image de la courbe de g par la symétrie d'axe $y = x$.



6) Étude de la suite (U_n)

Comme $U_0 = 2 > -2$, et comme nous montrerons que tous les termes restent dans $]1, 2]$, la formule utilisée dans toute cette partie est

$$f(x) = \arctan \sqrt{x+2} \quad (x \geq -2).$$

6.a) L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$

Sur $[1, 2]$, posons

$$H(x) = f(x) - x = \arctan \sqrt{x+2} - x.$$

La fonction H est continue sur $[1, 2]$.

Calculons ses valeurs aux extrémités. Pour $x = 1$,

$$H(1) = \arctan \sqrt{3} - 1 = \frac{\pi}{3} - 1.$$

Comme $\pi > 3$,

$$\frac{\pi}{3} > 1,$$

donc

$$H(1) > 0.$$

Pour $x = 2$,

$$H(2) = \arctan 2 - 2.$$

Or

$$\arctan 2 < \frac{\pi}{2} < 2,$$

car $\pi < 4$. Donc

$$H(2) < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un

$$\alpha \in]1, 2[$$

tel que

$$H(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Il reste à montrer l'unicité. Pour $x \in [1, 2]$,

$$H'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{2(x+3)\sqrt{x+2}} - 1.$$

Or

$$2(x+3)\sqrt{x+2} > 1,$$

donc

$$0 < f'(x) < 1.$$

Ainsi

$$H'(x) < 0 \quad \text{sur } [1, 2].$$

La fonction H est strictement décroissante et ne peut donc s'annuler qu'une seule fois.

Conclusion. L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$. Numériquement, $\alpha \approx 1,0508273$, mais cette approximation n'est pas nécessaire à la démonstration.

6.b) Montrer que $\arctan x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Définissons

$$\varphi(x) = x - \arctan x, \quad x \geq 0.$$

On a

$$\varphi(0) = 0.$$

De plus,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0.$$

Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(x) \geq 0 \quad (x \geq 0).$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \arctan x \leq x.}$$

6.c) Montrer que $1 < U_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous procédons par récurrence.

Initialisation. On a

$$U_0 = 2,$$

donc

$$1 < U_0 \leq 2.$$

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang n ,

$$1 < U_n \leq 2.$$

Alors

$$3 < U_n + 2 \leq 4,$$

donc

$$\sqrt{3} < \sqrt{U_n + 2} \leq 2.$$

Comme $\arctan$ est strictement croissante,

$$\arctan \sqrt{U_n + 2} > \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1.$$

Ainsi

$$U_{n+1} > 1.$$

Pour la majoration, la question 6.b donne, avec $t = \sqrt{U_n + 2} \geq 0$,

$$\arctan \sqrt{U_n + 2} \leq \sqrt{U_n + 2}.$$

Or $U_n \leq 2$, donc

$$\sqrt{U_n + 2} \leq 2.$$

Ainsi

$$U_{n+1} \leq 2.$$

Nous avons donc

$$1 < U_{n+1} \leq 2.$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < U_n \leq 2.}$$

6.d) Monotonie, convergence et limite de (U_n)

Nous savons que l'unique solution de $f(x) = x$ dans $[1, 2]$ est α , avec

$$1 < \alpha < 2.$$

Nous commençons par montrer que

$$U_n > \alpha \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Au rang 0,

$$U_0 = 2 > \alpha.$$

Supposons $U_n > \alpha$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$f(U_n) > f(\alpha).$$

Or

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Ainsi

$$U_{n+1} > \alpha.$$

Par récurrence,

$$\boxed{U_n > \alpha \quad \text{pour tout } n.}$$

Étudions maintenant le signe de $f(x) - x$ sur $[1, 2]$. La fonction

$$H(x) = f(x) - x$$

est strictement décroissante et s'annule uniquement en α . Donc

$$x > \alpha \implies H(x) < 0.$$

Comme $U_n > \alpha$,

$$H(U_n) < 0,$$

c'est-à-dire

$$f(U_n) - U_n < 0.$$

Or $f(U_n) = U_{n+1}$. Donc

$$U_{n+1} < U_n.$$

Ainsi, la suite (U_n) est strictement décroissante.

Elle est en outre minorée par α (et donc par 1). Par conséquent, (U_n) est convergente.

Notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Comme tous les U_n appartiennent à $[1, 2]$, on a $\ell \in [1, 2]$. La fonction f est continue sur $[1, 2]$. En passant à la limite dans

$$U_{n+1} = f(U_n),$$

on obtient

$$\ell = f(\ell).$$

Ainsi ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1, 2]$. Or cette solution est unique et vaut α . Donc

$$\boxed{\ell = \alpha.}$$

Conclusion. La suite (U_n) est strictement décroissante, minorée par α , donc convergente, et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.}$$

Synthèse finale

Élément	Résultat
Continuité en -2	f est continue et $f(-2) = 0$.
Dérivabilité en -2	Pas de dérivée finie ; tangente verticale $x = -2$.
Limite en $-\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$.
Asymptote à $-\infty$	$y = 2x + 3$, avec (C_f) au-dessus.
Asymptote à $+\infty$	$y = \frac{\pi}{2}$, avec (C_f) au-dessous.
Signe de f'	$f'(x) > 0$ pour $x \neq -2$.
Variations	f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Restriction g	$g :]-\infty, -2[\rightarrow]-\infty, 0[$ est bijective.
Fonction réciproque	$g^{-1}(x) = \frac{(x-2)^2}{2(x-1)}, x < 0$.
Point fixe	Il existe un unique $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
Suite (U_n)	Strictement décroissante et $U_n \rightarrow \alpha$.

EXERCICE 5 – ÉTUDE DE FONCTIONS

Correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

I) On considère la fonction h définie sur $] -\infty, 0[$ par

$$h(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

- 1) Calculer $h'(x)$ et montrer que h est strictement décroissante.
- 2) Dédire que

$$(\forall x < 0) \quad h(x) < 0.$$

- 3) Montrer que

$$(\forall x < 0) \quad x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}.$$

II) Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 0]$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer que f est continue à gauche de 0.
 - b) Étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0.
- 2)
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

- b) Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

- 3) Montrer que

$$(\forall x < 0) \quad f'(x) = (x-1)h(x),$$

puis dresser le tableau de variation de f .

- 4) Tracer la courbe (C_f) .

On donne : (C_f) coupe la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ en un point d'abscisse

$$\alpha \simeq -0,5,$$

et (C_f) est située au-dessous de (Δ) dans $] -\infty, \alpha[$.

I. Étude de la fonction h

1) Calcul de $h'(x)$ et sens de variation

Pour $x < 0$, on a $x \neq 0$ et

$$h(x) = 2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Calculons séparément les deux dérivées.

D'abord,

$$\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Donc

$$\left(2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{2}{x^2 + 1}.$$

Ensuite, par la formule de dérivation d'un quotient,

$$\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{2}{x^2+1} - \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+1) + x^2 - 2x - 1}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Or

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$$

et

$$(x^2+1)^2 > 0.$$

Donc, pour tout $x < 0$,

$$\boxed{h'(x) < 0}.$$

Conclusion

La fonction h est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.

2) Dédution du signe de h

Nous calculons d'abord la limite de h en $-\infty$:

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0^- \implies \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0,$$

et

$$\frac{x-1}{x^2+1} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0}.$$

Comme h est *strictement décroissante*, lorsqu'on part de $-\infty$ vers un réel $x < 0$, ses valeurs deviennent strictement inférieures à sa limite 0. Ainsi,

$$\boxed{(\forall x < 0) \quad h(x) < 0}.$$

3) Encadrement de $\arctan x$ pour $x < 0$

Nous allons démontrer séparément les deux inégalités.

Première inégalité : $x < \arctan x$

Posons

$$\varphi(x) = \arctan x - x \quad (x \leq 0).$$

Alors

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0.$$

La fonction φ est donc décroissante sur $] -\infty, 0]$ et

$$\varphi(0) = 0.$$

Pour $x < 0$, on a donc $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, d'où

$$\boxed{x < \arctan x}.$$

Deuxième inégalité : $\arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

Posons

$$\psi(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi ψ est croissante sur $] -\infty, 0]$. Comme $\psi(0) = 0$, pour $x < 0$ on obtient

$$\psi(x) < 0.$$

Donc

$$\boxed{\arctan x < \frac{x}{1+x^2}}.$$

Finalement,

$$\boxed{(\forall x < 0) \quad x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}}.$$

Point important

Cet encadrement va être utilisé plusieurs fois dans la partie II. En particulier, puisque $x < 0$, la division par x renverse les inégalités :

$$1 > \frac{\arctan x}{x} > \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan x}{x} = 1}.$$

II. Étude de la fonction f

1.a) Continuité à gauche en 0

Pour $x < 0$,

$$f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$,

$$(x-1)^2 \rightarrow 1$$

et

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \implies \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Or l'énoncé donne

$$f(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)}.$$

Conclusion

f est continue à gauche en 0.

1.b) Dérivabilité à gauche en 0

Nous devons étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Pour $x < 0$, on utilise l'identité

$$\boxed{\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan x}.$$

En effet, si $x < 0$, les deux angles $\arctan x$ et $\arctan(1/x)$ appartiennent à $] -\pi/2, 0[$ et leur somme vaut $-\pi/2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= (x-1)^2 \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2}(x-1)^2 - (x-1)^2 \arctan x + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2}x^2 + \pi x - (x-1)^2 \arctan x. \end{aligned}$$

En divisant par $x < 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{\pi}{2}x + \pi - (x-1)^2 \frac{\arctan x}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^-$,

$$-\frac{\pi}{2}x \rightarrow 0, \quad (x-1)^2 \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 + \pi - 1.$$

Donc

$$\boxed{f'_g(0) = \pi - 1}.$$

Conclusion

f est dérivable à gauche en 0 et son nombre dérivé à gauche vaut $\pi - 1$. La demi-tangente au point $A(0, -\frac{\pi}{2})$ a pour équation

$$y = (\pi - 1)x - \frac{\pi}{2}.$$

2.a) Limite de f en $-\infty$ puis limite de $f(x)/x$

Cette question est traitée avant l'étude de la branche infinie, conformément à l'ordre de l'énoncé.

Pour $x < 0$, appliquons l'encadrement de la partie I au nombre $1/x < 0$:

$$\frac{1}{x} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Comme $(x - 1)^2 > 0$, on peut multiplier sans changer le sens :

$$\frac{(x - 1)^2}{x} < f(x) < \frac{x(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

Or

$$\frac{(x - 1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x} \rightarrow -\infty,$$

et

$$\frac{x(x - 1)^2}{x^2 + 1} = x - 2 + \frac{2}{x^2 + 1} \rightarrow -\infty.$$

Par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}.$$

Passons maintenant à $f(x)/x$. Comme $x < 0$, la division par x renverse les inégalités :

$$\frac{(x - 1)^2}{x^2} > \frac{f(x)}{x} > \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

Mais

$$\frac{(x - 1)^2}{x^2} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \rightarrow 1.$$

Donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1}.$$

2.b) Branche infinie au voisinage de $-\infty$

La limite précédente montre déjà que la courbe possède une direction asymptotique de coefficient directeur

1. Pour déterminer une éventuelle asymptote oblique, calculons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x).$$

Écrivons

$$\begin{aligned} f(x) - x &= (x - 1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - x \\ &= x^2 \left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] - 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Nous étudions les trois termes.

D'après l'encadrement de la partie I, pour $t < 0$,

$$0 < \arctan t - t < \frac{t}{1+t^2} - t = -\frac{t^3}{1+t^2}.$$

Avec $t = 1/x$, on obtient

$$0 < x^2 \left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] < -\frac{x}{x^2+1}.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc

$$x^2 \left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] \rightarrow 0.$$

Ensuite, en posant encore $t = 1/x$,

$$x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan t}{t} \rightarrow 1.$$

Enfin,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -2}.$$

Conclusion

La courbe (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ l'asymptote oblique

$$\boxed{\Delta : y = x - 2}.$$

3) Calcul de $f'(x)$ et tableau de variation

Pour $x < 0$,

$$f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par la formule du produit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + (x-1)^2 \left(-\frac{1}{x^2+1}\right) \\ &= (x-1) \left[2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1} \right]. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets est précisément $h(x)$. Donc

$$\boxed{(\forall x < 0) \quad f'(x) = (x-1)h(x)}.$$

Pour $x < 0$,

$$x-1 < 0 \quad \text{et} \quad h(x) < 0.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x < 0}.$$

Tableau de signe de f'

x	$-\infty$	0
$x - 1$		$-$
$h(x)$		$-$
$f'(x)$		$+$

Ainsi, f est strictement croissante sur $] - \infty, 0]$. Nous avons déjà obtenu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -\frac{\pi}{2}$

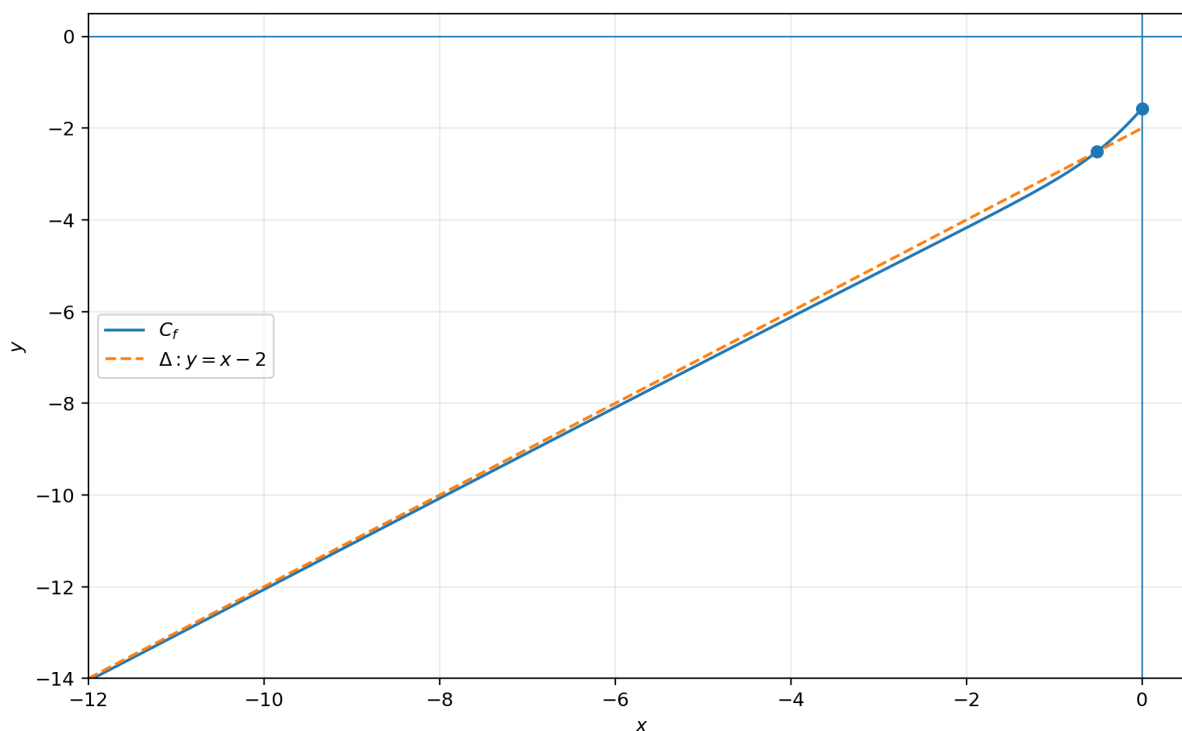
Conclusion

f est strictement croissante sur tout son domaine $] - \infty, 0]$.

4) Tracé de la courbe (C_f)

Pour construire la courbe, rassemblons toutes les informations obtenues :

- domaine : $] - \infty, 0]$;
- f est strictement croissante ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- asymptote oblique en $-\infty$: $\Delta : y = x - 2$;
- $f(0) = -\pi/2$;
- demi-tangente à gauche en 0 de pente $\pi - 1$;
- d'après la donnée de l'énoncé, (C_f) coupe Δ une seule fois en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0,5$;
- (C_f) est au-dessous de Δ sur $] - \infty, \alpha[$. Comme il n'y a qu'un point d'intersection et que $f(0) = -\pi/2 > -2$, la courbe est au-dessus de Δ sur $] \alpha, 0]$.



À titre de contrôle numérique du dessin, l'intersection est proche de

$$\alpha \approx -0,517,$$

ce qui est cohérent avec la donnée $\alpha \simeq -0,5$.

Synthèse finale

Résultat	Valeur / propriété
$h'(x)$	$-\frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)^2} < 0$
Signe de h	$h(x) < 0$ pour $x < 0$
Encadrement	$x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$ pour $x < 0$
Continuité en 0	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2}$
Dérivée à gauche en 0	$f'_g(0) = \pi - 1$
Limite en $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
Rapport	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
Asymptote	$y = x - 2$
Dérivée sur $] -\infty, 0[$	$f'(x) = (x - 1)h(x) > 0$
Variation	f strictement croissante sur $] -\infty, 0]$

EXERCICE 6 – ÉTUDE DE FONCTIONS

Correction intégralement détaillée

Énoncé intégralement réécrit

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} - \arctan(\sqrt{x}).$$

1) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

2) Étudier le sens de variation de la fonction f .

3) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1}.$$

a) Déterminer D_g .

b) Déterminer les limites de g aux bornes de D_g .

c) Étudier la dérivabilité de g à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

d) Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de la fonction g .

5) Soit h la restriction de g sur $[0, 1[$. Montrer que h est une bijection de $[0, 1[$ vers un intervalle à déterminer.

6) Tracer les courbes (C_g) et $(C_{h^{-1}})$.

Idée directrice

Le changement de variable naturel est $t = \sqrt{x}$, avec $t \geq 0$. Il simplifie les expressions sans modifier le problème. Pour l'étude de g' , le calcul fera apparaître exactement la fonction f étudiée auparavant : c'est le lien essentiel entre les questions 2 et 3.

1) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} - \arctan(\sqrt{x}).$$

Étudions séparément les deux termes.

Pour le premier terme, divisons numérateur et dénominateur par x :

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} = 0.$$

D'autre part,

$$\sqrt{x} \rightarrow +\infty$$

et l'on sait que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

Par différence,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

2) Sens de variation de f

Pour $x > 0$, posons

$$t = \sqrt{x} > 0.$$

Alors $x = t^2$ et

$$f(x) = \frac{t - 1}{t^2 + 1} - \arctan t.$$

Nous allons calculer $f'(x)$.

Calcul détaillé de la dérivée

Posons

$$u(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}.$$

Pour $x > 0$, la formule de dérivation d'un quotient donne

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + 1) - (\sqrt{x} - 1)}{(x + 1)^2}.$$

Mettons le numérateur au même dénominateur $2\sqrt{x}$:

$$\frac{x + 1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x} - 1) = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}}.$$

Or

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 2x - 2\sqrt{x},$$

donc

$$x + 1 - 2x + 2\sqrt{x} = 1 - x + 2\sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$u'(x) = \frac{1 - x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}.$$

Par ailleurs,

$$(\arctan(\sqrt{x}))' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \frac{1-x+2\sqrt{x}-(x+1)}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \\ &= \frac{-2x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, on peut simplifier par $\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{(x+1)^2} \quad (x > 0).$$

Le dénominateur $(x+1)^2$ est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc exactement celui de $1-\sqrt{x}$.

Ainsi :

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & 0 < x < 1, \\ f'(1) = 0, \\ f'(x) < 0, & x > 1. \end{cases}$$

Calculons les valeurs utiles :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{-1}{1} - \arctan 0 = -1, \\ f(1) &= \frac{1-1}{2} - \arctan 1 = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

et, d'après la question 1,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Tableau de signe de f'

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$1 - \sqrt{x}$	+	0	−
$(x+1)^2$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−

Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	−1	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, 1]$, puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Son maximum est

$$f(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Nous pouvons aussi en déduire une information très importante pour la suite :

$$f(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

En effet, sur $[0, 1]$, on a $f(x) \leq f(1) = -\pi/4 < 0$, et sur $[1, +\infty[$, la fonction décroît à partir de la valeur négative $-\pi/4$.

Conclusion

f croît sur $[0, 1]$,
 f décroît sur $[1, +\infty[$,
 $f(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.

3) Étude de la fonction g

On considère

$$g(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1}.$$

a) Détermination de D_g

Pour que $g(x)$ soit définie, il faut d'abord

$$x \geq 0$$

pour que $\sqrt{x}$ existe.

Il faut ensuite que le dénominateur ne soit pas nul :

$$\sqrt{x} - 1 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} \neq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 1.$$

Par conséquent,

$$D_g = [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

b) Limites de g aux bornes de D_g

Les bornes à étudier sont 0, 1 par la gauche, 1 par la droite et $+\infty$.

En 0

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\arctan(\sqrt{x}) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x} - 1 \rightarrow -1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

D'ailleurs $g(0) = 0$.

En 1^- Lorsque $x \rightarrow 1^-$,

$$\arctan(\sqrt{x}) \rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} > 0$$

et

$$\sqrt{x} - 1 \rightarrow 0^-.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty.$$

En 1^+ Lorsque $x \rightarrow 1^+$,

$$\arctan(\sqrt{x}) \rightarrow \frac{\pi}{4} > 0$$

et

$$\sqrt{x} - 1 \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty.$$

En $+\infty$ Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\arctan(\sqrt{x}) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

tandis que

$$\sqrt{x} - 1 \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur tend vers une valeur finie et le dénominateur vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Comme, pour $x > 1$, numérateur et dénominateur sont positifs, la limite est atteinte par valeurs positives :

$$g(x) \rightarrow 0^+.$$

Conclusion

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= 0^+. \end{aligned}$$

c) Dérivabilité de g à droite de 0 et interprétation géométrique

On a

$$g(0) = 0.$$

Le taux d'accroissement à droite de g en 0 est donc, pour $x > 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{x(\sqrt{x} - 1)}.$$

Posons

$$t = \sqrt{x} > 0.$$

Alors $x = t^2$ et $t \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ainsi,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\arctan t}{t^2(t-1)}.$$

Écrivons

$$\frac{\arctan t}{t^2(t-1)} = \frac{\arctan t}{t} \cdot \frac{1}{t(t-1)}.$$

Nous justifions d'abord la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan t}{t} = 1.$$

Pour $t > 0$, appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $u \mapsto \arctan u$ sur $[0, t]$. Il existe $c_t \in]0, t[$ tel que

$$\frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = \frac{1}{1 + c_t^2}.$$

Donc

$$\frac{\arctan t}{t} = \frac{1}{1 + c_t^2}.$$

Comme $0 < c_t < t$ et $t \rightarrow 0^+$, on a $c_t \rightarrow 0$, d'où

$$\frac{\arctan t}{t} \rightarrow 1.$$

D'autre part,

$$t(t-1) \rightarrow 0^-$$

car $t > 0$ et $t-1 < 0$ pour t suffisamment petit. Ainsi,

$$\frac{1}{t(t-1)} \rightarrow -\infty.$$

Par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty.$$

La limite du taux d'accroissement n'est donc pas un réel fini : g n'est pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

Géométriquement, la courbe (C_g) possède au point

$$O(0, 0)$$

une **demi-tangente verticale**, d'équation

$$x = 0.$$

Conclusion

g n'admet pas de nombre dérivé fini à droite en 0. La courbe (C_g) possède en $O(0, 0)$ une demi-tangente verticale d'équation $x = 0$.

d) Calcul de $g'(x)$ et variations de g

Soit $x > 0$, avec $x \neq 1$. Posons

$$N(x) = \arctan(\sqrt{x}), \quad D(x) = \sqrt{x} - 1.$$

Alors

$$g(x) = \frac{N(x)}{D(x)}.$$

Nous avons

$$N'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

et

$$D'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La formule du quotient donne

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{D(x)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x+1)} - \frac{\arctan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}. \end{aligned}$$

Factorisons $1/(2\sqrt{x})$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - \arctan(\sqrt{x}) \right).$$

Or l'expression entre parenthèses est précisément $f(x)$. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \quad (x > 0, x \neq 1).$$

C'est ici que la question 2 devient essentielle. Nous avons démontré que

$$f(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2 > 0.$$

Par conséquent,

$$g'(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Tableau de signe de g'

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f(x)$	—	—	—
$2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2$	+	0	+
$g'(x)$	—	non définie	—

Tableau de variations de g

La fonction g est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles de son domaine :

$$[0, 1[\quad \text{et} \quad]1, +\infty[.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	—	n.d.	—
$g(x)$	0	$+\infty$	0

Conclusion

g est strictement décroissante sur $[0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

5) Bijection de la restriction h

Soit

$$h = g|_{[0,1[}.$$

Sur $[0, 1[$, la fonction g est continue et strictement décroissante. Nous avons de plus

$$h(0) = g(0) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty.$$

Par continuité et stricte monotonie,

$$h([0, 1[) =]-\infty, 0].$$

Posons donc

$$J =]-\infty, 0].$$

La stricte décroissance assure l'injectivité de h . La continuité, jointe aux valeurs extrêmes précédentes, assure que toute valeur de J possède un antécédent dans $[0, 1[$: h est surjective sur J .

Ainsi,

$$h : [0, 1[\longrightarrow]-\infty, 0] \text{ est une bijection.}$$

Sa fonction réciproque est donc bien définie :

$$h^{-1} :]-\infty, 0] \longrightarrow [0, 1[.$$

Comme h est strictement décroissante, sa réciproque h^{-1} est elle aussi strictement décroissante.

6) Tracé de (C_g) et $(C_{h^{-1}})$

La courbe de h^{-1} est la symétrique de la portion de (C_g) correspondant à $x \in [0, 1[$ par rapport à la droite

$$y = x.$$

Les informations essentielles pour le tracé sont :

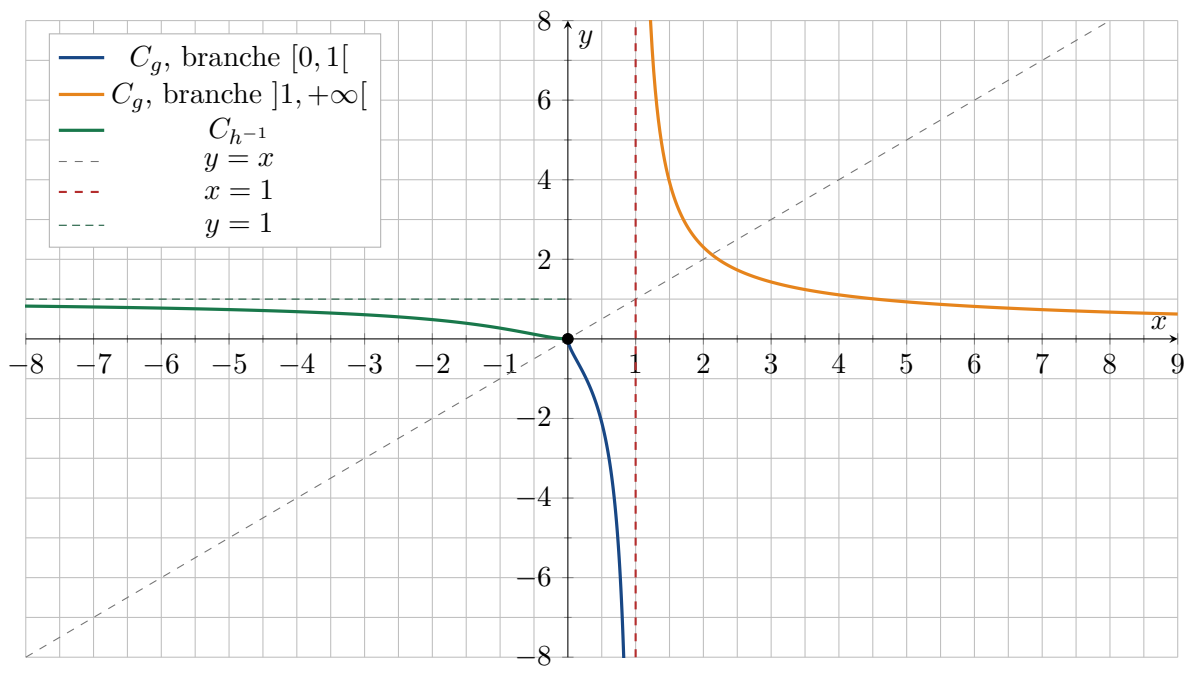
$$g(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+.$$

Ainsi, $x = 1$ est une asymptote verticale de (C_g) et $y = 0$ est une asymptote horizontale de sa branche sur $]1, +\infty[$.

Pour $(C_{h^{-1}})$, puisque

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} h^{-1}(y) = 1^-,$$

la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale de $(C_{h^{-1}})$ lorsque l'abscisse tend vers $-\infty$.



Conclusion

La courbe $(C_{h^{-1}})$ est obtenue par symétrie de la branche de (C_g) correspondant à $[0, 1[$ par rapport à la droite $y = x$.

Bilan général

Élément	Résultat
Limite de f	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\pi/2$
Variations de f	croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$
Signe de f	$f(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$
Domaine de g	$[0, 1[\cup]1, +\infty[$
Variation de g	strictement décroissante sur chaque composante de D_g
En 0 pour g	demi-tangente verticale $x = 0$
Restriction h	$h : [0, 1[\rightarrow]-\infty, 0]$ bijective
Courbe de h^{-1}	symétrique de la branche de C_g sur $[0, 1[$ par rapport à $y = x$