

MATHÉMATIQUES – 2<sup>E</sup> ANNÉE DU BACCALAURÉAT

Sciences Mathématiques A & B – Système marocain

# FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Cours complet, méthodes, exemples et activités corrigées

Définition et construction de  $\ln$  – propriétés algébriques – domaines – équations et inéquations – limites – croissance comparée – dérivée logarithmique – primitives – étude de fonctions – logarithmes de base  $a$  – logarithme décimal.

Document de synthèse et d'entraînement

Typographie mathématique LaTeX – version 2026

## Table des matières

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Objectifs et prérequis</b>                                   | <b>2</b>  |
| <b>2 Pourquoi introduire le logarithme népérien ?</b>             | <b>2</b>  |
| 2.1 Une propriété qui transforme les produits en sommes . . . . . | 2         |
| <b>3 Domaine, variations et signe de <math>\ln</math></b>         | <b>3</b>  |
| 3.1 Domaine de définition . . . . .                               | 3         |
| 3.2 Monotonie . . . . .                                           | 3         |
| 3.3 Signe . . . . .                                               | 3         |
| <b>4 Propriétés algébriques</b>                                   | <b>3</b>  |
| <b>5 Équations et inéquations logarithmiques</b>                  | <b>4</b>  |
| 5.1 Équations du type $\ln u = \ln v$ . . . . .                   | 4         |
| 5.2 Équations contenant plusieurs logarithmes . . . . .           | 5         |
| 5.3 Inéquations . . . . .                                         | 5         |
| <b>6 Étude de la fonction logarithme népérien</b>                 | <b>5</b>  |
| 6.1 Limites aux bornes du domaine . . . . .                       | 5         |
| 6.2 Le nombre $e$ . . . . .                                       | 5         |
| 6.3 Tableau de variations . . . . .                               | 6         |
| 6.4 Tangente au point d'abscisse 1 . . . . .                      | 6         |
| 6.5 Concavité et inégalité fondamentale . . . . .                 | 6         |
| <b>7 Limites fondamentales et croissances comparées</b>           | <b>6</b>  |
| <b>8 Dérivée logarithmique</b>                                    | <b>7</b>  |
| <b>9 Primitives de type <math>u'/u</math></b>                     | <b>8</b>  |
| <b>10 Étude de fonctions comportant un logarithme</b>             | <b>8</b>  |
| 10.1 Exemple : $f(x) = x - 1 - \ln x$ . . . . .                   | 8         |
| 10.2 Exemple : $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ . . . . .                 | 9         |
| <b>11 Logarithme de base <math>a</math></b>                       | <b>9</b>  |
| 11.1 Logarithme décimal . . . . .                                 | 9         |
| <b>12 Fiche méthode : erreurs à éviter</b>                        | <b>10</b> |
| <b>Activités et problèmes corrigés</b>                            | <b>11</b> |
| <b>Synthèse finale à mémoriser</b>                                | <b>18</b> |

## 1 Objectifs et prérequis

À la fin de ce chapitre, on doit savoir :

- définir et étudier la fonction logarithme népérien  $\ln$  ;
- utiliser ses propriétés algébriques sans oublier les conditions de positivité ;
- résoudre des équations et inéquations logarithmiques ;
- calculer des limites comportant des logarithmes et utiliser les croissances comparées ;
- dériver une fonction de la forme  $\ln(u)$  et reconnaître une primitive de type  $u'/u$  ;
- conduire l'étude complète d'une fonction contenant un logarithme ;
- utiliser les logarithmes de base  $a$  et le logarithme décimal.

Les prérequis essentiels sont : dérivation, continuité, primitives, limites, tableaux de signes et de variations.

## 2 Pourquoi introduire le logarithme népérien ?

### 2.1 Une propriété qui transforme les produits en sommes

On cherche une fonction non nulle  $f$ , dérivable sur  $]0, +\infty[$ , vérifiant

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x > 0, y > 0).$$

En prenant  $x = y = 1$  :

$$f(1) = f(1) + f(1) \implies f(1) = 0.$$

Fixons  $x > 0$  et considérons, comme fonctions de  $y$ ,

$$g(y) = f(xy), \quad h(y) = f(x) + f(y).$$

Puisque  $g(y) = h(y)$ , leurs dérivées sont égales :

$$xf'(xy) = f'(y).$$

En prenant  $y = 1$  :

$$xf'(x) = f'(1),$$

donc, en posant  $k = f'(1)$ ,

$$f'(x) = \frac{k}{x}.$$

Ainsi, les fonctions dérivables transformant un produit en somme sont liées aux primitives de  $x \mapsto 1/x$ .

#### Définition

La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , est l'unique primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1. Ainsi

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

### 3 Domaine, variations et signe de $\ln$

#### 3.1 Domaine de définition

$$D_{\ln} = ]0, +\infty[.$$

Par conséquent, une expression  $\ln(u(x))$  existe exactement lorsque

$$u(x) > 0.$$

#### Méthode pour déterminer un domaine

Pour une fonction contenant un ou plusieurs logarithmes :

1. écrire une condition  $u(x) > 0$  pour *chaque* argument de logarithme ;
2. ajouter les autres contraintes éventuelles (dénominateur non nul, racine carrée, etc.) ;
3. résoudre le système de conditions et prendre leur intersection.

**Exemple.** Pour

$$f(x) = \ln(x - 1) + \ln(3 - x),$$

il faut simultanément  $x - 1 > 0$  et  $3 - x > 0$ , donc

$$D_f = ]1, 3[.$$

#### 3.2 Monotonie

Pour tout  $x > 0$ ,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0.$$

Donc :

$$\ln \text{ est strictement croissante sur } ]0, +\infty[.$$

Il en résulte, pour  $a, b > 0$  :

$$\ln a = \ln b \iff a = b$$

et

$$\ln a < \ln b \iff a < b.$$

#### 3.3 Signe

Comme  $\ln$  est strictement croissante et  $\ln 1 = 0$  :

|         |          |     |                |
|---------|----------|-----|----------------|
| $x$     | $]0, 1[$ | $1$ | $]1, +\infty[$ |
| $\ln x$ | $-$      | $0$ | $+$            |

### 4 Propriétés algébriques

#### Propriété fondamentale

Pour tous  $x > 0$  et  $y > 0$ ,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

**Démonstration.** Fixons  $y > 0$  et posons

$$\varphi(x) = \ln(xy) - \ln x.$$

Alors

$$\varphi'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

La fonction  $\varphi$  est donc constante. En  $x = 1$  :

$$\varphi(1) = \ln y - \ln 1 = \ln y.$$

D'où  $\ln(xy) - \ln x = \ln y$ .

On en déduit :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

et, pour les puissances admissibles,

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

En particulier :

$$\ln(x^n) = n \ln x, \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x.$$

### Attention : piège classique

Il n'existe aucune règle analogue pour une somme ou une différence :

$$\ln(x + y) \neq \ln x + \ln y$$

et

$$\ln(x - y) \neq \ln x - \ln y.$$

**Exemple.** Si  $\alpha = \ln 2$  et  $\beta = \ln 3$ , alors

$$\ln 72 = \ln(2^3 \cdot 3^2) = 3\alpha + 2\beta.$$

## 5 Équations et inéquations logarithmiques

### 5.1 Équations du type $\ln u = \ln v$

#### Méthode

Pour résoudre  $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$  :

$$\text{domaine} \longrightarrow u(x) = v(x) \longrightarrow \text{vérification.}$$

Les conditions  $u(x) > 0$  et  $v(x) > 0$  doivent être imposées *avant* d'utiliser l'injectivité de  $\ln$ .

**Exemple.** Résoudre

$$\ln(3x - 1) = \ln(5x - 10).$$

Conditions :

$$3x - 1 > 0, \quad 5x - 10 > 0 \implies x > 2.$$

Sur  $]2, +\infty[$  :

$$3x - 1 = 5x - 10 \implies 2x = 9 \implies x = \frac{9}{2}.$$

Comme  $\frac{9}{2} > 2$  :

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}.$$

## 5.2 Équations contenant plusieurs logarithmes

On utilise d'abord les propriétés algébriques, sans jamais oublier le domaine.

**Exemple.**

$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6.$$

Le domaine impose  $x > 1$ . Puis

$$\ln(x(x - 1)) = \ln 6$$

donc

$$x^2 - x = 6 \iff (x - 3)(x + 2) = 0.$$

Seule la solution  $x = 3$  appartient au domaine :

$$S = \{3\}.$$

## 5.3 Inéquations

La fonction  $\ln$  étant strictement croissante :

$$\ln u \leq \ln v \iff u \leq v$$

à condition que  $u > 0$  et  $v > 0$ .

**Exemple.**

$$\ln(2x - 1) \leq \ln(x + 2).$$

Le domaine est  $x > \frac{1}{2}$ . Sur ce domaine :

$$2x - 1 \leq x + 2 \iff x \leq 3.$$

Donc

$$S = \left[ \frac{1}{2}, 3 \right].$$

## 6 Étude de la fonction logarithme népérien

### 6.1 Limites aux bornes du domaine

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

La première limite montre que la droite

$$x = 0$$

est une asymptote verticale à la courbe de  $\ln$ .

### 6.2 Le nombre $e$

Puisque  $\ln$  est continue, strictement croissante, et prend toutes les valeurs réelles, il existe un unique réel positif  $e$  tel que

$$\ln e = 1.$$

Numériquement :

$$e \simeq 2,71828.$$

### 6.3 Tableau de variations

|            |           |                    |
|------------|-----------|--------------------|
| $x$        | $0^+$     | $+\infty$          |
| $(\ln x)'$ |           | +                  |
| $\ln x$    | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ |

### 6.4 Tangente au point d'abscisse 1

La formule de la tangente à  $y = \ln x$  en  $x = 1$  est

$$y = \ln 1 + \ln'(1)(x - 1).$$

Or  $\ln 1 = 0$  et  $\ln'(1) = 1$ , donc

$$T : y = x - 1.$$

### 6.5 Concavité et inégalité fondamentale

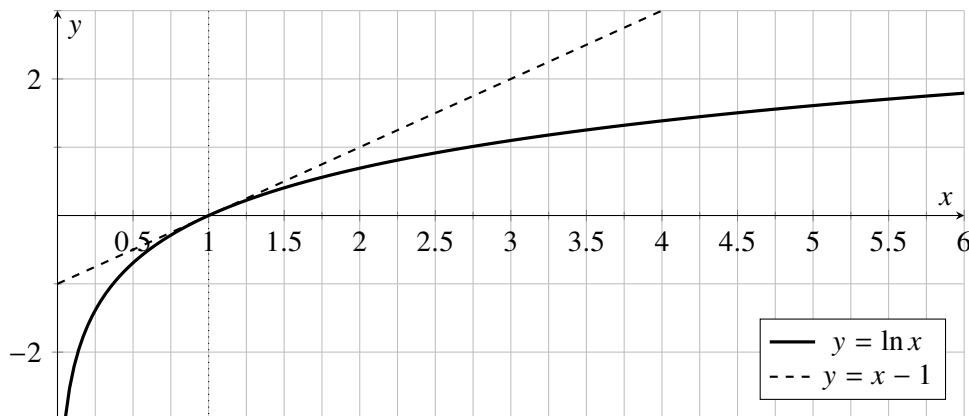
Comme

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

la fonction  $\ln$  est concave sur  $]0, +\infty[$ . Sa courbe est donc située sous chacune de ses tangentes, notamment sous la tangente en 1 :

$$\ln x \leq x - 1 \quad (x > 0).$$

L'égalité a lieu uniquement pour  $x = 1$ .



## 7 Limites fondamentales et croissances comparées

Les limites suivantes doivent être parfaitement maîtrisées :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

car il s'agit du nombre dérivé de  $\ln$  en 1, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

par le changement de variable  $t = 1 + x$ .

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

**Méthode reconnaître une limite fondamentale**

Pour une expression

$$\frac{\ln(u(x))}{v(x)}$$

où  $u(x) \rightarrow 1$ , chercher à faire apparaître

$$\frac{\ln(u(x))}{u(x) - 1}.$$

Écrire alors

$$\frac{\ln(u(x))}{v(x)} = \frac{\ln(u(x))}{u(x) - 1} \cdot \frac{u(x) - 1}{v(x)}.$$

Le premier facteur tend vers 1.

**Exemple.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{3x} \cdot 3 = 3.$$

**Exemple.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}.$$

Pour  $x > 0$  :

$$\ln(x^2 + 1) = \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi

$$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0.$$

**8 Dérivée logarithmique****Propriété**Si  $u$  est dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors

$$f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur  $I$  et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

**Exemples.**

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \implies f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Pour

$$g(x) = \ln(3x - 2),$$

le domaine est  $x > \frac{2}{3}$  et

$$g'(x) = \frac{3}{3x - 2}.$$

Plus généralement, si  $u$  ne s'annule pas :

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

## 9 Primitives de type $u'/u$

### Propriété

Sur tout intervalle où  $u$  est dérivable et ne s'annule pas,

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C.$$

#### Exemple 1.

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \ln(x^2 + 5) + C.$$

#### Exemple 2.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx.$$

On décompose :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1}.$$

Donc, sur tout intervalle ne contenant ni  $-1$  ni  $1$ ,

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C.$$

## 10 Étude de fonctions comportant un logarithme

### Méthode plan d'étude

Pour étudier une fonction logarithmique :

1. déterminer le domaine ;
2. calculer les limites aux bornes du domaine ;
3. chercher les asymptotes éventuelles ;
4. calculer et factoriser la dérivée ;
5. étudier son signe ;
6. dresser le tableau de variations ;
7. calculer les points remarquables et, si demandé, les tangentes ;
8. étudier éventuellement la position relative à une droite ou une courbe ;
9. construire la représentation graphique.

### 10.1 Exemple : $f(x) = x - 1 - \ln x$

Le domaine est  $]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Comme  $x > 0$ , le signe de  $f'$  est celui de  $x - 1$  :

|         |           |                       |           |
|---------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$     | $0^+$     | $1$                   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$                   | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow 0 \nearrow$ | $+\infty$ |

Ainsi  $f$  admet un minimum égal à  $0$  en  $x = 1$ , ce qui redonne

$$\ln x \leq x - 1.$$

**10.2 Exemple :**  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 

Le domaine est  $]0, +\infty[$  et

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Puisque  $x^2 > 0$ ,

$$g'(x) > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e.$$

Ainsi  $g$  croît sur  $]0, e]$  puis décroît sur  $[e, +\infty[$  et

$$g(e) = \frac{1}{e}.$$

**11 Logarithme de base  $a$** **Définition**

Soit  $a > 0$  avec  $a \neq 1$ . On appelle logarithme de base  $a$  la fonction

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0).$$

Les propriétés algébriques sont les mêmes :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a(x^r) = r \log_a x.$$

De plus :

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.$$

La dérivée vaut

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Donc :

$$a > 1 \Rightarrow \log_a \text{ strictement croissante}$$

tandis que

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a \text{ strictement décroissante.}$$

**11.1 Logarithme décimal**

Pour  $a = 10$  :

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Ainsi

$$\log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \quad \log(10^r) = r.$$

## 12 Fiche méthode : erreurs à éviter

### Attention : piège classique

- Écrire  $\ln(u(x))$  sans vérifier  $u(x) > 0$ .
- Transformer  $\ln u = \ln v$  en  $u = v$  avant d'avoir établi  $u > 0$  et  $v > 0$ .
- Utiliser à tort  $\ln(u + v) = \ln u + \ln v$ .
- Oublier que  $\ln x \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$  et non lorsque  $x \rightarrow 0^-$ , car  $\ln$  n'est pas défini à gauche de 0.
- Dans  $\ln |u|$ , oublier que  $u$  doit seulement être non nul, alors que dans  $\ln u$ , il doit être strictement positif.
- Pour  $\log_a$ , oublier que le sens des inégalités s'inverse lorsque  $0 < a < 1$ .

# ACTIVITÉS ET PROBLÈMES CORRIGÉS

## Activité 1 – Construire le logarithme

Soit  $f$  une fonction non nulle, dérivable sur  $]0, +\infty[$ , telle que

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x > 0, y > 0).$$

1. Montrer que  $f(1) = 0$ .
2. Montrer qu'il existe une constante  $k$  telle que  $f'(x) = k/x$ .
3. Expliquer pourquoi le choix  $k = 1$  conduit naturellement à la fonction  $\ln$ .

### Solution détaillée

1. Avec  $x = y = 1$  :

$$f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1),$$

donc  $f(1) = 0$ .

2. Fixons  $x > 0$ . L'identité  $f(xy) = f(x) + f(y)$  est vraie pour tout  $y > 0$ . On dérive par rapport à  $y$  :

$$xf'(xy) = f'(y).$$

En prenant  $y = 1$  :

$$xf'(x) = f'(1).$$

Posons  $k = f'(1)$ . Alors

$$f'(x) = \frac{k}{x}.$$

3. Pour  $k = 1$ , on cherche la primitive de  $1/x$  qui s'annule en 1. Par définition, cette fonction est le logarithme népérien :

$$f(x) = \ln x.$$

## Activité 2 – Domaines de définition

Déterminer les domaines des fonctions :

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2), \quad g(x) = \frac{\ln x}{x - 1},$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right).$$

### Solution détaillée

1. Pour  $f$ , il faut

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

Or

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Le produit est positif à l'extérieur des racines :

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[.$$

2. Pour  $g$ , il faut à la fois

$$x > 0$$

et

$$x - 1 \neq 0.$$

Donc

$$D_g = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[.$$

3. Pour  $h$ , il faut

$$\frac{x-4}{x+1} > 0.$$

Les valeurs critiques sont  $-1$  et  $4$ . Le quotient est positif lorsque le numérateur et le dénominateur ont le même signe :

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 4.$$

Donc

$$D_h = ]-\infty, -1[ \cup ]4, +\infty[.$$

### Activité 3 – Calcul algébrique

On pose  $\alpha = \ln 2$  et  $\beta = \ln 3$ . Exprimer en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$A = \ln 72, \quad B = \ln\left(\frac{9}{8}\right), \quad C = \ln \sqrt{24}.$$

### Solution détaillée

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

donc

$$A = 3 \ln 2 + 2 \ln 3 = 3\alpha + 2\beta.$$

Ensuite

$$\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3},$$

donc

$$B = 2 \ln 3 - 3 \ln 2 = 2\beta - 3\alpha.$$

Enfin

$$\sqrt{24} = 24^{1/2} = (2^3 \cdot 3)^{1/2},$$

donc

$$C = \frac{1}{2}(3 \ln 2 + \ln 3) = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta.$$

### Activité 4 – Équations logarithmiques

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$(E1) \quad \ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 12,$$

$$(E2) \quad \ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x).$$

### Solution détaillée

**(E1) Domaine.** Il faut  $x - 1 > 0$  et  $x + 2 > 0$ , donc  $x > 1$ . Sur ce domaine :

$$\ln((x-1)(x+2)) = \ln 12.$$

Par injectivité :

$$(x-1)(x+2) = 12.$$

Ainsi

$$x^2 + x - 2 = 12 \iff x^2 + x - 14 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1 + 56 = 57.$$

Les racines sont

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}.$$

Seule la racine positive supérieure à 1 convient :

$$S_1 = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{57}}{2} \right\}.$$

**(E2) Domaine.** Il faut

$$x^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2 - x > 0.$$

La première condition donne  $x < -1$  ou  $x > 1$ , et la seconde  $x < 2$ . Donc

$$D = ]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[.$$

Sur  $D$  :

$$x^2 - 1 = 2 - x \iff x^2 + x - 3 = 0.$$

Donc

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

On vérifie :

$$\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < -1, \quad 1 < \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} < 2.$$

Les deux conviennent :

$$S_2 = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

### Activité 5 – Inéquation logarithmique

Résoudre

$$\ln(x^2 - 1) \leq \ln(3x + 1).$$

### Solution détaillée

On commence par le domaine :

$$x^2 - 1 > 0 \iff x < -1 \text{ ou } x > 1,$$

et

$$3x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{3}.$$

L'intersection donne

$$D = ]1, +\infty[.$$

Sur ce domaine,  $\ln$  est strictement croissante, donc

$$x^2 - 1 \leq 3x + 1 \iff x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Comme le coefficient de  $x^2$  est positif, le trinôme est négatif entre les racines :

$$x \in \left[ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right].$$

On intersecte avec  $D = ]1, +\infty[$  :

$$S = \left] 1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right].$$

### Activité 6 – Limites fondamentales

Calculer :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x},$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1},$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 1)}{x^2}.$$

### Solution détaillée

1.

$$\frac{\ln(1 + 5x)}{x} = 5 \frac{\ln(1 + 5x)}{5x}.$$

Lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $5x \rightarrow 0$  et

$$\frac{\ln(1 + 5x)}{5x} \rightarrow 1.$$

Donc

$$L_1 = 5.$$

2. Factorisons :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Alors

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1}.$$

Quand  $x \rightarrow 1$  :

$$\frac{\ln x}{x - 1} \rightarrow 1, \quad \frac{1}{x + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Donc

$$L_2 = \frac{1}{2}.$$

3. Pour  $x > 0$  :

$$x^3 + 1 = x^3 \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right).$$

Donc

$$\ln(x^3 + 1) = 3 \ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right).$$

Ainsi

$$\frac{\ln(x^3 + 1)}{x^2} = 3 \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right).$$

Le premier terme tend vers 0 par croissance comparée. Le second tend également vers 0. Donc

$$L_3 = 0.$$

**Activité 7 – Dérivée et variations**

Soit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations.
4. Déterminer la valeur maximale de  $f$ .

**Solution détaillée**

Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \ln x}{x^2}}.$$

Comme  $x^2 > 0$ , le signe de  $f'$  est celui de  $1 - \ln x$ . Or

$$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e.$$

Donc  $f$  est croissante sur  $]0, e]$  et décroissante sur  $[e, +\infty[$ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Et

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Ainsi

$$\boxed{\max_{x>0} f(x) = \frac{1}{e}}$$

atteint uniquement en  $x = e$ .**Activité 8 – Primitives**

Déterminer une primitive sur chaque intervalle où cela a un sens :

$$f(x) = \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 5}, \quad g(x) = \frac{1}{x(x + 1)}.$$

**Solution détaillée****1. Posons**

$$u(x) = 3x^2 - 2x + 5.$$

Alors

$$u'(x) = 6x - 2.$$

Donc

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Le trinôme  $3x^2 - 2x + 5$  est toujours positif car

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 - 60 = -56 < 0$$

et son coefficient dominant est positif. Ainsi

$$F(x) = \ln(3x^2 - 2x + 5) + C.$$

2. Décomposons :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Donc

$$1 = A(x+1) + Bx = (A+B)x + A.$$

On obtient  $A = 1$  et  $B = -1$ . Ainsi

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$G(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

sur tout intervalle ne contenant ni  $-1$  ni  $0$ .

### Activité 9 – Problème de synthèse

On considère

$$f(x) = x - 1 - \ln x, \quad x > 0.$$

1. Calculer les limites en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
2. Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations.
3. Montrer que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ .
4. En déduire  $\ln x \leq x - 1$ .
5. Déterminer le cas d'égalité.

### Solution détaillée

1. Lorsque  $x \rightarrow 0^+$  :

$$x - 1 \rightarrow -1, \quad -\ln x \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , la croissance de  $x$  domine celle de  $\ln x$ . Plus précisément :

$$f(x) = x \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers 1, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme  $x > 0$ ,  $f'(x) < 0$  pour  $0 < x < 1$ ,  $f'(1) = 0$ , et  $f'(x) > 0$  pour  $x > 1$ . Ainsi  $f$  décroît jusqu'à 1, puis croît.

3. Le minimum est atteint en  $x = 1$  :

$$f(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0.$$

Donc

$$f(x) \geq 0 \quad (x > 0).$$

4.

$$x - 1 - \ln x \geq 0 \iff \boxed{\ln x \leq x - 1}.$$

5. L'égalité correspond à  $f(x) = 0$ . Comme le minimum 0 est atteint uniquement en  $x = 1$  :

$$\boxed{\ln x = x - 1 \iff x = 1.}$$

### Activité 10 – Logarithmes de base

Soit  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

1. Montrer que  $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$ .
2. Étudier les variations selon la valeur de  $a$ .
3. Résoudre  $\log_2 x > 3$ .
4. Résoudre  $\log_{1/2} x > 3$ .

### Solution détaillée

Par définition :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Le nombre  $\ln a$  est une constante non nulle, donc

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}.$$

Si  $a > 1$ , alors  $\ln a > 0$  et la dérivée est positive :  $\log_a$  est strictement croissante. Si  $0 < a < 1$ , alors  $\ln a < 0$  et la dérivée est négative :  $\log_a$  est strictement décroissante.

Pour  $\log_2 x > 3$ , comme  $2 > 1$  :

$$x > 2^3 = 8.$$

Donc

$$\boxed{S = ]8, +\infty[}.$$

Pour  $\log_{1/2} x > 3$ , la fonction est décroissante : le sens s'inverse. Comme

$$3 = \log_{1/2} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right) = \log_{1/2} \left( \frac{1}{8} \right),$$

on obtient

$$x < \frac{1}{8}.$$

En tenant compte de  $x > 0$  :

$$\boxed{S = \left] 0, \frac{1}{8} \right[}.$$

### Activité 11 – Étude complète d'une fonction

On considère

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}, \quad x > 0.$$

1. Calculer  $f(1)$ .
2. Calculer  $f'(x)$ .
3. Étudier les variations de  $f$ .

4. En déduire une comparaison entre  $\ln x$  et  $(x - 1)/x$ .

### Solution détaillée

On a

$$f(1) = 0 - \frac{0}{1} = 0.$$

Écrivons

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Donc

$$f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$$

et

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

Comme  $x^2 > 0$ ,  $f'$  est négative sur  $]0, 1[$ , nulle en 1, positive sur  $]1, +\infty[$ . Ainsi  $f$  admet un minimum en 1, égal à 0. Donc

$$f(x) \geq 0$$

pour tout  $x > 0$ , soit

$$\ln x \geq \frac{x-1}{x}.$$

Avec l'inégalité précédente  $\ln x \leq x - 1$ , on obtient l'encadrement très utile

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1 \quad (x > 0).$$

### Synthèse finale à mémoriser

$$D_{\ln} = ]0, +\infty[, \quad \ln 1 = 0, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^r) = r \ln x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n \geq 1).$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0), \quad (\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \quad (u \neq 0).$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C.$$

$$\ln x \leq x-1, \quad \frac{x-1}{x} \leq \ln x \quad (x > 0).$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$$