

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercices 1 à 21 – Énoncés

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x + 1)$.

2. $g : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$.

3. $h : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

4. $k : x \mapsto \ln x + \ln(x - 1)$.

5. $m : x \mapsto \ln\left(\frac{x - 4}{x + 1}\right)$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x - 2) = 0$.

2. $\ln(3x - 1) = \ln(5x - 10)$.

3. $\ln(2x - 1) - \ln(1 - x) = 0$.

4. $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$.

5. $\ln(2x - 6) \geq 0$.

6. $\ln(x - 1) - \ln(3x + 1) < 0$.

Exercice 3

On pose $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.

Calculer :

$$\ln(6); \quad \ln(4); \quad \ln(8); \quad \ln(72);$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right); \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right); \quad \ln(\sqrt{2}); \quad \ln(\sqrt{6}); \quad \ln(3\sqrt{2});$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3});$$

$$A = \ln \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \ln \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27}$$

et

$$C = \ln(\sqrt{2} + 1)^{2015} + \ln(\sqrt{2} - 1)^{2019}.$$

Exercice 4

On pose $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.

Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$$\ln(a^2 b^5) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}.$$

Exercice 5

Simplifier et calculer :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right),$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9).$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$1. \ln(2x - 1) = \frac{3}{2}.$$

$$2. 2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0.$$

$$3. 3(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1 = 0.$$

$$4. \frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1.$$

$$5. \ln x + \ln(x - 1) - \ln 2 = \ln 3.$$

$$6. \ln(2x + 5) + \ln(x + 1) \leq \ln 4.$$

$$7. \ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2).$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2, \\ 2 \ln x - \ln y = 3. \end{cases}$$

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \frac{\ln(x + 1)}{\ln(\ln x)}.$$

$$2. g : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(e - x)}.$$

$$3. h : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}.$$

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - \ln x).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + \ln x).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x^3 \ln x).$$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2,$ on pose : $X = \sqrt{x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x - 1}.$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(\ln x)^5.$

Exercice 10

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5).$$

Exercice 11

Calculer la dérivée des fonctions définies par :

1. $f(x) = x^2 - \ln x.$
2. $f(x) = x \ln x.$
3. $f(x) = \ln(1 + x^2).$

Exercice 12

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}.$$

Exercice 13

Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln|\ln|x||.$
2. $f(x) = \ln|\sin^2 x + 3 \sin x + 4|.$

Exercice 14

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1. $I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}.$
2. $I =]0, 1[; g(x) = \frac{1}{x \ln x}.$
3. $I =]-\infty, 1[; h(x) = \frac{1}{x - 1}.$
4. $I = \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$
5. $M(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ (Essayer d'écrire $g(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ où a et b sont des réels à déterminer).
6. $N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x - 3}.$
7. $I =]3, +\infty[; q(x) = \frac{1}{(x - 2) \ln(x - 2)}.$

Exercice 15

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x \in D); \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

2. En déduire la fonction primitive de f sur $] -\infty, -2[$ telle que $F(-3) = \ln 2$.

Exercice 16

Simplifier et calculer :

1. $\log_8 4$.

2. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$.

3. $\log_{\sqrt{3}} 9$.

4. $A = \log_2 \left(\frac{1}{5} \right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3})$.

Exercice 17

On pose

$$\alpha = \log_{40}(100) \quad \text{et} \quad \beta = \log_{16}(25).$$

Calculer β en fonction de α .

Exercice 18

Simplifier et calculer :

1. $\log_{10} 100$.

2. $\log_{10} 0,0001$.

3. $A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$.

Exercice 19

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$\left(\frac{3}{2} \right)^n \geq 10^{20}.$$

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$.

2. $2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$.

3. $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$.

4. $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$.

Où $\log$ est le logarithme décimal.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1. $\log_3((7x - 1)^2) = 0.$

2. $\log_3(5x + 1) = 2.$

3. $\frac{\log_3(5x + 1)}{\log_3((7x - 1)^2)} \leq 1.$

Exercice 1 – Domaines de définition

Fonctions comportant le logarithme népérien

Rappel indispensable

Pour que $\ln(u)$ existe, son argument doit être **strictement positif** :

$$\ln(u) \text{ est défini } \iff u > 0.$$

Attention : $\ln(0)$ n'existe pas et $\ln(u)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ lorsque $u < 0$.

1) $f(x) = \ln(x + 1)$

La seule condition vient du logarithme. Il faut que son argument $x + 1$ soit strictement positif :

$$x + 1 > 0.$$

On soustrait 1 aux deux membres :

$$x > -1.$$

Ainsi, tous les réels strictement supérieurs à -1 conviennent. Le nombre -1 est exclu car il donnerait $\ln(0)$.

$$\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$$

2) $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Il faut :

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

Factorisons le trinôme :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

La condition devient donc

$$(x - 1)(x - 2) > 0.$$

Étudions le signe du produit. Les valeurs qui annulent les facteurs sont 1 et 2.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x - 1$	−	0	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	0	+
$(x - 1)(x - 2)$	+	0	−	0	+

Le produit est strictement positif avant 1 et après 2. Les nombres 1 et 2 sont exclus, car l'argument du logarithme y vaut 0.

$$\mathcal{D}_g =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

3) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$

Ici, il y a **deux conditions**.

Première condition : $\ln x$ doit exister. Il faut donc

$$x > 0.$$

Deuxième condition : $\ln x$ est au dénominateur, donc il ne doit pas être nul :

$$\ln x \neq 0.$$

Or

$$\ln x = 0 \iff x = 1.$$

Il faut donc avoir simultanément

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

Ainsi :

$$\mathcal{D}_h =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Le nombre 0 n'appartient pas au domaine car $\ln 0$ n'existe pas ; le nombre 1 est exclu car il donnerait une division par zéro.

4) $k(x) = \ln x + \ln(x - 1)$

Les **deux logarithmes** doivent être définis. On impose donc simultanément :

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

La deuxième inégalité donne

$$x > 1.$$

Si $x > 1$, alors automatiquement $x > 0$. L'intersection des deux conditions est donc simplement

$$x > 1.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{D}_k =]1, +\infty[$$

5) $m(x) = \ln \left(\frac{x - 4}{x + 1} \right)$

C'est la question la plus délicate. L'argument du logarithme doit être strictement positif :

$$\frac{x - 4}{x + 1} > 0.$$

Il faut aussi remarquer que $x = -1$ est interdit puisque le dénominateur $x + 1$ s'annule.

Les deux valeurs importantes sont donc :

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = 4.$$

Étudions le signe du quotient.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x - 4}{x + 1}$	$+$	ND	0	$+$

Le quotient est strictement positif lorsque

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 4.$$

Le nombre -1 est exclu parce que le quotient n'est pas défini. Le nombre 4 est également exclu parce que le quotient vaut 0, et $\ln(0)$ n'existe pas.

$$\mathcal{D}_m =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$$

Bilan final

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &=]-1, +\infty[, \\ \mathcal{D}_g &=]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[, \\ \mathcal{D}_h &=]0, 1[\cup]1, +\infty[, \\ \mathcal{D}_k &=]1, +\infty[, \\ \mathcal{D}_m &=]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[.\end{aligned}$$

Méthode à retenir

Devant une fonction contenant $\ln$, on procède toujours dans cet ordre :

1. repérer chaque logarithme ;
2. imposer que chaque argument de $\ln$ soit strictement positif ;
3. s'il existe une fraction, interdire également les valeurs qui annulent son dénominateur ;
4. résoudre les inégalités obtenues ;
5. prendre l'intersection de toutes les conditions et écrire le domaine sous forme d'intervalles.

Exercice 2 - Équations et inéquations avec le logarithme népérien

Rappels indispensables. Pour que $\ln(u)$ existe, il faut toujours $u > 0$. De plus :

$$\ln(u) = \ln(v) \iff u = v \quad (u > 0, v > 0), \quad \ln(u) = 0 \iff u = 1,$$

et, puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

$$\ln(u) \geq 0 \iff u \geq 1, \quad \ln(u) < 0 \iff 0 < u < 1.$$

1) $\ln(x - 2) = 0$

Étape 1 : condition d'existence. Il faut $x - 2 > 0$, donc $x > 2$.

Étape 2 : résolution. Comme $\ln(1) = 0$,

$$\ln(x - 2) = 0 \iff x - 2 = 1 \iff x = 3.$$

Vérification : $3 > 2$, donc la valeur trouvée appartient bien au domaine.

Solution : $S = \{3\}$.

2) $\ln(3x - 1) = \ln(5x - 10)$

Étape 1 : conditions d'existence.

$$3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}, \quad 5x - 10 > 0 \iff x > 2.$$

Les deux logarithmes doivent exister simultanément, donc $x > 2$.

Étape 2 : égalité des arguments. Sur le domaine précédent, $\ln$ est injective :

$$\ln(3x - 1) = \ln(5x - 10) \iff 3x - 1 = 5x - 10.$$

Ainsi

$$9 = 2x \iff x = \frac{9}{2}.$$

Vérification : $\frac{9}{2} > 2$.

Solution : $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$.

3) $\ln(2x - 1) - \ln(1 - x) = 0$

Étape 1 : conditions d'existence.

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}, \quad 1 - x > 0 \iff x < 1.$$

Donc

$$x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$$

Étape 2 : résolution.

$$\ln(2x - 1) - \ln(1 - x) = 0 \iff \ln(2x - 1) = \ln(1 - x).$$

Les deux arguments étant positifs,

$$2x - 1 = 1 - x \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}.$$

Vérification : $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$.

Solution : $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}.$

4) $\ln(2x) = \ln(x^2 + 1)$

Étape 1 : conditions d'existence. Pour $\ln(2x)$, il faut $2x > 0$, donc $x > 0$. Par ailleurs, $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x . Le domaine est donc $]0, +\infty[$.

Étape 2 : égalité des arguments.

$$\ln(2x) = \ln(x^2 + 1) \iff 2x = x^2 + 1.$$

On ramène tout dans un même membre :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

Vérification : $1 > 0$.

Solution : $S = \{1\}.$

5) $\ln(2x - 6) \geq 0$

Étape 1 : condition d'existence.

$$2x - 6 > 0 \iff x > 3.$$

Étape 2 : utilisation de la croissance de $\ln$. Comme $\ln(1) = 0$ et $\ln$ est strictement croissante,

$$\ln(2x - 6) \geq 0 \iff 2x - 6 \geq 1.$$

Donc

$$2x \geq 7 \iff x \geq \frac{7}{2}.$$

Cette condition implique déjà $x > 3$.

Solution : $S = \left[\frac{7}{2}, +\infty \right[.$

6) $\ln(x - 1) - \ln(3x + 1) < 0$

Étape 1 : conditions d'existence.

$$x - 1 > 0 \iff x > 1, \quad 3x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{3}.$$

Il faut les deux conditions à la fois, donc le domaine est $]1, +\infty[$.

Étape 2 : comparaison des logarithmes.

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \iff \ln(x-1) < \ln(3x+1).$$

Comme $\ln$ est strictement croissante et que les deux arguments sont positifs sur le domaine,

$$x-1 < 3x+1.$$

Réolvons :

$$x-1 < 3x+1 \iff -2 < 2x \iff x > -1.$$

Mais il ne faut pas oublier la condition d'existence $x > 1$. On doit donc prendre l'intersection :

$$]1, +\infty[\cap]-1, +\infty[=]1, +\infty[.$$

Solution : $S =]1, +\infty[$.

Bilan

$$\begin{array}{lll} S_1 = \{3\}, & S_2 = \left\{\frac{9}{2}\right\}, & S_3 = \left\{\frac{2}{3}\right\}, \\ S_4 = \{1\}, & S_5 = \left[\frac{7}{2}, +\infty\right], & S_6 =]1, +\infty[. \end{array}$$

Exercice 3 – Calculs avec le logarithme népérien

Correction détaillée

Données :

$$\ln(2) \simeq 0,7 \quad \text{et} \quad \ln(3) \simeq 1,1.$$

1. Propriétés utilisées

Pour tous réels strictement positifs a et b , et pour tout réel r :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,$$

$$\ln(a^r) = r \ln a, \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a, \quad \ln(1) = 0.$$

Nous allons transformer chaque nombre afin de n'utiliser que $\ln 2$ et $\ln 3$ lorsque cela est possible.

2. Calcul de $\ln(6)$

Comme $6 = 2 \times 3$,

$$\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3.$$

Donc

$$\ln 6 \simeq 0,7 + 1,1 = 1,8.$$

$$\boxed{\ln 6 \simeq 1,8}$$

3. Calcul de $\ln(4)$

On a $4 = 2^2$. Ainsi,

$$\ln 4 = \ln(2^2) = 2 \ln 2 \simeq 2 \times 0,7 = 1,4.$$

$$\boxed{\ln 4 \simeq 1,4}$$

4. Calcul de $\ln(8)$

Puisque $8 = 2^3$,

$$\ln 8 = \ln(2^3) = 3 \ln 2 \simeq 3 \times 0,7 = 2,1.$$

$$\boxed{\ln 8 \simeq 2,1}$$

5. Calcul de $\ln(72)$

Décomposons 72 en puissances de 2 et de 3 :

$$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2.$$

Donc

$$\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 3.$$

Numériquement,

$$\ln 72 \simeq 3 \times 0,7 + 2 \times 1,1 = 2,1 + 2,2 = 4,3.$$

$$\boxed{\ln 72 \simeq 4,3}$$

6. Calcul de $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0,7$$

7. Calcul de $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 \simeq 1,1 - 0,7 = 0,4.$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 0,4$$

8. Calcul de $\ln(\sqrt{2})$

Comme $\sqrt{2} = 2^{1/2}$,

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2 \simeq \frac{1}{2} \times 0,7 = 0,35.$$

$$\ln(\sqrt{2}) \simeq 0,35$$

9. Calcul de $\ln(\sqrt{6})$

On peut écrire

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln 6.$$

Or $\ln 6 \simeq 1,8$, donc

$$\ln(\sqrt{6}) \simeq \frac{1}{2} \times 1,8 = 0,9.$$

$$\ln(\sqrt{6}) \simeq 0,9$$

10. Calcul de $\ln(3\sqrt{2})$

Le produit $3\sqrt{2}$ est strictement positif, donc

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln 3 + \ln(\sqrt{2}).$$

Ainsi,

$$\ln(3\sqrt{2}) \simeq 1,1 + 0,35 = 1,45.$$

$$\ln(3\sqrt{2}) \simeq 1,45$$

11. Calcul de $\ln(12\sqrt[3]{3})$

Commençons par décomposer 12 :

$$12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2.$$

De plus,

$$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}.$$

Alors

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln 12 + \ln(3^{1/3}).$$

Or

$$\ln 12 = \ln 3 + 2 \ln 2$$

et

$$\ln(3^{1/3}) = \frac{1}{3} \ln 3.$$

Donc

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = 2 \ln 2 + \frac{4}{3} \ln 3.$$

Avec les valeurs données :

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) \simeq 2(0,7) + \frac{4}{3}(1,1) = 1,4 + \frac{4,4}{3}.$$

Ainsi

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) \simeq 1,4 + 1,466 \dots = 2,866 \dots$$

$$\boxed{\ln(12\sqrt[3]{3}) \simeq 2,87}$$

12. Calcul de A

On a

$$A = \ln \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \ln \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Les deux quantités $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$ sont strictement positives. On peut donc utiliser $\ln a + \ln b = \ln(ab)$:

$$A = \ln \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \right).$$

Comme les deux radicandes sont positifs,

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}.$$

Utilisons l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2.$$

Donc

$$A = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Finalement,

$$A \simeq \frac{1}{2} \times 0,7 = 0,35.$$

$$\boxed{A \simeq 0,35}$$

13. Calcul de B

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \left(\frac{1}{27} \right).$$

Traitons chaque terme séparément.

Comme $81 = 3^4$,

$$\frac{1}{4} \ln 81 = \frac{1}{4} \ln(3^4) = \frac{1}{4} \times 4 \ln 3 = \ln 3.$$

Ensuite,

$$\ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Enfin, puisque $27 = 3^3$,

$$\frac{1}{27} = 3^{-3},$$

d'où

$$\ln \left(\frac{1}{27} \right) = \ln(3^{-3}) = -3 \ln 3.$$

Attention au signe $-$ placé devant ce logarithme :

$$-\ln \left(\frac{1}{27} \right) = -(-3 \ln 3) = 3 \ln 3.$$

Ainsi,

$$B = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3 = \left(1 + \frac{1}{2} + 3 \right) \ln 3 = \frac{9}{2} \ln 3.$$

Avec $\ln 3 \simeq 1,1$,

$$B \simeq \frac{9}{2} \times 1,1 = 4,95.$$

$$\boxed{B \simeq 4,95}$$

14. Calcul de C

$$C = \ln(\sqrt{2} + 1)^{2015} + \ln(\sqrt{2} - 1)^{2019}.$$

Les nombres $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$ sont strictement positifs. On peut donc écrire :

$$C = 2015 \ln(\sqrt{2} + 1) + 2019 \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Observons maintenant le produit remarquable :

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Ainsi,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Par conséquent,

$$\ln(\sqrt{2} - 1) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) = -\ln(\sqrt{2} + 1).$$

En remplaçant dans C :

$$C = 2015 \ln(\sqrt{2} + 1) - 2019 \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Donc

$$C = (2015 - 2019) \ln(\sqrt{2} + 1) = -4 \ln(\sqrt{2} + 1).$$

On peut encore écrire :

$$C = \ln \left((\sqrt{2} + 1)^{-4} \right) = \ln \left((\sqrt{2} - 1)^4 \right).$$

Calculons $(\sqrt{2} - 1)^4$:

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2},$$

puis

$$(\sqrt{2} - 1)^4 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 - 12\sqrt{2} = 17 - 12\sqrt{2}.$$

Ainsi, une forme exacte est

$$C = -4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \ln(17 - 12\sqrt{2})$$

Les seules approximations $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$ ne permettent pas, à elles seules, d'obtenir une approximation numérique simple de $\ln(\sqrt{2} + 1)$. La forme exacte ci-dessus est donc la conclusion naturelle.

15. Résultats à retenir

Expression	Résultat
$\ln 6$	$\simeq 1,8$
$\ln 4$	$\simeq 1,4$
$\ln 8$	$\simeq 2,1$
$\ln 72$	$\simeq 4,3$
$\ln(1/2)$	$\simeq -0,7$
$\ln(3/2)$	$\simeq 0,4$
$\ln \sqrt{2}$	$\simeq 0,35$
$\ln \sqrt{6}$	$\simeq 0,9$
$\ln(3\sqrt{2})$	$\simeq 1,45$
$\ln(12\sqrt[3]{3})$	$\simeq 2,87$
A	$\simeq 0,35$
B	$\simeq 4,95$
C	$-4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \ln(17 - 12\sqrt{2})$

Exercice 4 – Calculs avec le logarithme népérien

On pose

$$\alpha = \ln(a) \quad \text{et} \quad \beta = \ln(b).$$

Comme $\ln(a)$ et $\ln(b)$ existent, on doit avoir

$$a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

Nous allons exprimer chacun des nombres demandés uniquement en fonction de α et de β .

Propriétés utilisées

Pour $x > 0$, $y > 0$ et $r \in \mathbb{R}$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x^r) = r \ln x, \quad x^r = e^{r \ln x}.$$

1. Calcul de $\ln(a^2 b^5)$

On part de

$$\ln(a^2 b^5).$$

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes :

$$\ln(a^2 b^5) = \ln(a^2) + \ln(b^5).$$

On utilise ensuite la propriété $\ln(x^r) = r \ln(x)$:

$$\ln(a^2) = 2 \ln(a) \quad \text{et} \quad \ln(b^5) = 5 \ln(b).$$

Donc

$$\ln(a^2 b^5) = 2 \ln(a) + 5 \ln(b).$$

Or, par définition,

$$\ln(a) = \alpha \quad \text{et} \quad \ln(b) = \beta.$$

Ainsi,

$$\ln(a^2 b^5) = 2\alpha + 5\beta.$$

2. Calcul de $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}$

Cette deuxième expression ne contient pas directement de logarithme. Il faut donc transformer les racines et les puissances.

On commence par écrire la racine sixième sous forme de puissance :

$$\sqrt[6]{a^7 b} = (a^7 b)^{1/6}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}} = \frac{1}{(a^7 b)^{1/6}} = (a^7 b)^{-1/6}.$$

On peut aussi séparer les puissances :

$$(a^7b)^{-1/6} = a^{-7/6}b^{-1/6}.$$

Nous devons maintenant faire apparaître $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.

Puisque, pour tout $x > 0$,

$$x^r = e^{r \ln(x)},$$

on obtient

$$a^{-7/6} = e^{-\frac{7}{6} \ln(a)}$$

et

$$b^{-1/6} = e^{-\frac{1}{6} \ln(b)}.$$

Ainsi,

$$a^{-7/6}b^{-1/6} = e^{-\frac{7}{6} \ln(a)} e^{-\frac{1}{6} \ln(b)}.$$

En utilisant $e^u e^v = e^{u+v}$:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}} = e^{-\frac{7}{6} \ln(a) - \frac{1}{6} \ln(b)}.$$

Comme $\ln(a) = \alpha$ et $\ln(b) = \beta$:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}} = e^{-\frac{7\alpha + \beta}{6}}.$$

On peut vérifier le calcul autrement. Posons

$$X = \frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}.$$

Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $X > 0$, donc $\ln(X)$ existe. Alors

$$\ln(X) = \ln((a^7b)^{-1/6}) = -\frac{1}{6} \ln(a^7b).$$

Or

$$\ln(a^7b) = 7 \ln(a) + \ln(b) = 7\alpha + \beta.$$

Donc

$$\ln(X) = -\frac{7\alpha + \beta}{6},$$

et finalement

$$X = e^{-\frac{7\alpha + \beta}{6}}.$$

Résultats

et

$$\ln(a^2b^5) = 2\alpha + 5\beta$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}} = e^{-\frac{7\alpha + \beta}{6}}.$$

Point important à retenir

Lorsque l'on connaît $\ln(a) = \alpha$ et $\ln(b) = \beta$:

$$\ln(a^p b^q) = p\alpha + q\beta.$$

Et lorsqu'une expression ne contient pas de logarithme mais seulement des puissances de a et de b , on peut utiliser

$$a^p b^q = e^{p \ln(a) + q \ln(b)} = e^{p\alpha + q\beta}.$$

Exercice 5 – Simplifier et calculer

Énoncé

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9).$$

Rappels indispensables

Le logarithme népérien $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. En particulier, pour tout réel x ,

$$\boxed{\ln(e^x) = x}.$$

Nous utiliserons également les écritures

$$\frac{1}{e} = e^{-1}, \quad \sqrt{e} = e^{1/2},$$

et la règle sur les puissances de même base

$$e^a e^b = e^{a+b}.$$

1. Calcul de A

On part de

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Étape 1 : calcul de $\ln(e^2)$.

Comme $\ln(e^x) = x$, en prenant $x = 2$, on obtient

$$\ln(e^2) = 2.$$

Étape 2 : calcul de $\ln(e^4)$.

De la même manière, avec $x = 4$,

$$\ln(e^4) = 4.$$

Étape 3 : calcul de $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

On commence par transformer $\frac{1}{e}$ en une puissance de e :

$$\frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Donc

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1.$$

Étape 4 : remplacement dans l'expression de A .

On remplace chaque logarithme par la valeur trouvée :

$$\begin{aligned} A &= 2 + 4 - (-1) \\ &= 2 + 4 + 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Le dernier passage est important : soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé,

$$-(-1) = +1.$$

Ainsi,

$$A = 7$$

2. Calcul de B

On part de

$$B = 2 \ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9).$$

Nous allons calculer séparément chacun des trois termes.

Étape 1 : calcul de $2 \ln(\sqrt{e})$.

La racine carrée correspond à la puissance $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{e} = e^{1/2}.$$

Par conséquent,

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

En multipliant par 2,

$$2 \ln(\sqrt{e}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Étape 2 : calcul de $\ln(e\sqrt{e})$.

On écrit d'abord chaque facteur comme une puissance de e :

$$e = e^1 \quad \text{et} \quad \sqrt{e} = e^{1/2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e\sqrt{e} &= e^1 e^{1/2} \\ &= e^{1+1/2} \\ &= e^{3/2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\ln(e\sqrt{e}) = \ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2}.$$

Étape 3 : calcul de $\frac{1}{3} \ln(e^9)$.

Puisque $\ln(e^9) = 9$, on a

$$\frac{1}{3} \ln(e^9) = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$

Étape 4 : remplacement dans l'expression de B .

On obtient

$$B = 1 + \frac{3}{2} - 3.$$

Pour effectuer facilement l'addition et la soustraction, on met tous les nombres au même dénominateur :

$$1 = \frac{2}{2} \quad \text{et} \quad 3 = \frac{6}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} \\ &= \frac{2+3-6}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$B = -\frac{1}{2}$$

Résultats finaux

$$A = 7$$

et

$$B = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 6 - Équations et inéquations avec le logarithme népérien

Rappels. Pour écrire $\ln u$, il faut toujours avoir $u > 0$. De plus, $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$: pour $a, b > 0$, $\ln a < \ln b \iff a < b$. Enfin $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ lorsque $a, b > 0$.

1) $\ln(2x - 1) = \frac{3}{2}$

Condition d'existence :

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}.$$

L'équation $\ln(2x - 1) = \frac{3}{2}$ signifie, par définition du logarithme,

$$2x - 1 = e^{3/2}.$$

Donc

$$2x = 1 + e^{3/2} \implies x = \frac{1 + e^{3/2}}{2}.$$

Cette valeur est bien supérieure à $\frac{1}{2}$, donc elle est admissible.

$$S_1 = \left\{ \frac{1 + e^{3/2}}{2} \right\}.$$

2) $2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

Condition d'existence : $x > 0$.

Posons $X = \ln x$. L'équation devient

$$2X^2 + X - 6 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2.$$

Ainsi

$$X_1 = \frac{-1 - 7}{4} = -2, \quad X_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2}.$$

Comme $X = \ln x$:

$$\ln x = -2 \iff x = e^{-2}, \quad \ln x = \frac{3}{2} \iff x = e^{3/2}.$$

Les deux nombres sont strictement positifs.

$$S_2 = \{e^{-2}, e^{3/2}\}.$$

3) $3(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1 = 0$

Condition d'existence : $x > 0$.

Posons encore $X = \ln x$. Nous obtenons

$$3X^2 + 2X - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2.$$

Donc

$$X_1 = \frac{-2-4}{6} = -1, \quad X_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}.$$

D'où

$$\ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad \ln x = \frac{1}{3} \iff x = e^{1/3}.$$

$$S_3 = \left\{ \frac{1}{e}, e^{1/3} \right\}.$$

4) $\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} \geq -1$

Il faut avoir $x > 0$ et le dénominateur non nul :

$$\ln x - 1 \neq 0 \iff \ln x \neq 1 \iff x \neq e.$$

Ainsi le domaine est $]0, +\infty[\setminus \{e\}$.

On ramène tout dans le membre de gauche :

$$\frac{\ln x + 3}{\ln x - 1} + 1 \geq 0.$$

Mettons au même dénominateur :

$$\frac{\ln x + 3 + \ln x - 1}{\ln x - 1} \geq 0 \iff \frac{2 \ln x + 2}{\ln x - 1} \geq 0.$$

Comme $2 > 0$, cela équivaut à

$$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \geq 0.$$

Posons $X = \ln x$. On étudie

$$\frac{X + 1}{X - 1} \geq 0.$$

Les valeurs importantes sont $X = -1$ (numérateur nul) et $X = 1$ (dénominateur nul). Le quotient est positif ou nul pour

$$X \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[.$$

Revenons à x :

$$\ln x \leq -1 \iff 0 < x \leq e^{-1} = \frac{1}{e},$$

et

$$\ln x > 1 \iff x > e.$$

$$S_4 = \left] 0, \frac{1}{e} \right] \cup]e, +\infty[.$$

5) $\ln x + \ln(x - 1) - \ln 2 = \ln 3$

Les logarithmes imposent

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x - 1 > 0,$$

donc $x > 1$.

Sur ce domaine,

$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln(x(x - 1)).$$

Ainsi

$$\ln(x(x-1)) - \ln 2 = \ln 3$$

soit

$$\ln\left(\frac{x(x-1)}{2}\right) = \ln 3.$$

Puisque $\ln$ est injective sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{x(x-1)}{2} = 3.$$

Donc

$$x(x-1) = 6 \iff x^2 - x - 6 = 0.$$

Factorisons :

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2).$$

Donc $x = 3$ ou $x = -2$. Mais le domaine exige $x > 1$, donc seule la valeur 3 convient.

$$S_5 = \{3\}.$$

$$\mathbf{6)} \ln(2x+5) + \ln(x+1) < \ln 4$$

Conditions d'existence :

$$2x+5 > 0 \iff x > -\frac{5}{2}, \quad x+1 > 0 \iff x > -1.$$

Les deux doivent être vérifiées simultanément, donc

$$x > -1.$$

Sur ce domaine,

$$\ln(2x+5) + \ln(x+1) = \ln((2x+5)(x+1)).$$

L'inéquation devient

$$\ln((2x+5)(x+1)) < \ln 4.$$

Comme $\ln$ est strictement croissante,

$$(2x+5)(x+1) < 4.$$

Développons :

$$2x^2 + 7x + 5 < 4 \iff 2x^2 + 7x + 1 < 0.$$

Cherchons les racines de $2x^2 + 7x + 1$:

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 1 = 49 - 8 = 41.$$

Donc

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{4}, \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{4}.$$

Comme le coefficient de x^2 est positif, le trinôme est strictement négatif entre ses deux racines :

$$\frac{-7 - \sqrt{41}}{4} < x < \frac{-7 + \sqrt{41}}{4}.$$

Il reste à tenir compte de $x > -1$. Or $\frac{-7 - \sqrt{41}}{4} < -1$ et $\frac{-7 + \sqrt{41}}{4} > -1$. L'intersection donne donc

$$S_6 = \left] -1, \frac{-7 + \sqrt{41}}{4} \right[.$$

Exercice 6 - Question 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2)$$

1. Domaine de définition

Les arguments des deux logarithmes doivent être strictement positifs.

Pour le premier logarithme :

$$14 - x > 0 \iff x < 14$$

Pour le second logarithme :

$$10 + 7x - 3x^2 > 0$$

Factorisons soigneusement :

$$\begin{aligned} 10 + 7x - 3x^2 &= -3x^2 + 7x + 10 \\ &= -3x^2 + 10x - 3x + 10 \\ &= -3x(x + 1) + 10(x + 1) \\ &= (x + 1)(10 - 3x) \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre :

$$(x + 1)(10 - 3x) > 0$$

Les facteurs s'annulent pour $x = -1$ et $x = 10/3$. Le produit est positif entre ces deux valeurs.

$$-1 < x < \frac{10}{3}$$

Cette condition implique déjà $x < 14$. Ainsi :

$$D =] - 1 ; \frac{10}{3} [$$

2. Comparaison des logarithmes

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur son domaine. Sur D , les deux arguments sont positifs ; on peut donc les comparer directement.

$$\ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2)$$

$$\Leftrightarrow 14 - x > 10 + 7x - 3x^2$$

On regroupe tous les termes dans le membre de gauche :

$$14 - x - 10 - 7x + 3x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 > 0$$

3. Résolution de l'inéquation du second degré

Calculons le discriminant du trinôme $3x^2 - 8x + 4$:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{16}}{6} = \frac{8 - 4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{8 + \sqrt{16}}{6} = \frac{8 + 4}{6} = 2$$

Le coefficient de x^2 vaut $3 > 0$. Le trinôme est positif à l'extérieur de l'intervalle formé par ses racines :

$$3x^2 - 8x + 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x > 2$$

4. Intersection avec le domaine de définition

Nous conservons seulement les solutions qui appartiennent à $D =]-1 ; 10/3[$.

$$]-1 ; \frac{10}{3}[\cap (]-\infty ; \frac{2}{3}[\cup]2 ; +\infty[)$$

On obtient :

$$]-1 ; \frac{2}{3}[\cup]2 ; \frac{10}{3}[$$

Les bornes -1 et 10/3 sont exclues car elles annulent l'argument du deuxième logarithme. Les bornes 2/3 et 2 sont exclues parce que l'inégalité est stricte.

5. Solution finale

$$S =]-1 ; \frac{2}{3}[\cup]2 ; \frac{10}{3}[$$

Exercice 7 – Correction détaillée

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2, \\ 2 \ln x - \ln y = 3. \end{cases}$$

1. Conditions d'existence

Avant de résoudre le système, il faut vérifier que les logarithmes qui apparaissent sont définis.

On sait que $\ln t$ est défini seulement lorsque $t > 0$. Ainsi,

$$\ln x \text{ existe} \iff x > 0, \quad \ln y \text{ existe} \iff y > 0.$$

Toute solution (x, y) doit donc vérifier

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0.$$

2. Élimination de $\ln y$

Le système est

$$\begin{cases} 3 \ln x + \ln y = 2, \\ 2 \ln x - \ln y = 3. \end{cases}$$

Dans la première équation, on a $+\ln y$, tandis que dans la seconde on a $-\ln y$. Il est donc naturel d'additionner les deux équations membre à membre :

$$(3 \ln x + \ln y) + (2 \ln x - \ln y) = 2 + 3.$$

Développons le membre de gauche :

$$3 \ln x + \ln y + 2 \ln x - \ln y = 5.$$

Regroupons les termes semblables :

$$(3 \ln x + 2 \ln x) + (\ln y - \ln y) = 5.$$

Or

$$3 \ln x + 2 \ln x = 5 \ln x \quad \text{et} \quad \ln y - \ln y = 0.$$

Donc

$$5 \ln x = 5.$$

En divisant les deux membres par 5, on obtient

$$\ln x = 1.$$

3. Calcul de x

La relation

$$\ln x = 1$$

signifie que x est le nombre dont le logarithme népérien vaut 1.

Comme

$$\ln(e) = 1,$$

on obtient immédiatement

$$x = e.$$

On remarque bien que $e > 0$, donc cette valeur respecte la condition d'existence.

4. Calcul de y

Remplaçons maintenant x par e dans la première équation :

$$3 \ln x + \ln y = 2.$$

Ainsi,

$$3 \ln e + \ln y = 2.$$

Puisque $\ln e = 1$,

$$3 \times 1 + \ln y = 2,$$

donc

$$3 + \ln y = 2.$$

Soustrayons 3 aux deux membres :

$$\ln y = 2 - 3 = -1.$$

Ainsi,

$$\ln y = -1.$$

Or

$$\ln y = -1 \iff y = e^{-1}.$$

Et, puisque

$$e^{-1} = \frac{1}{e},$$

on obtient

$$\boxed{y = \frac{1}{e}}.$$

Cette valeur est strictement positive, donc la condition $y > 0$ est également satisfaite.

5. Vérification dans le système initial

Vérifions le couple

$$\left(e, \frac{1}{e}\right).$$

Première équation :

$$\begin{aligned} 3 \ln e + \ln \left(\frac{1}{e}\right) &= 3 \times 1 + \ln(e^{-1}) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

La première équation est vérifiée.

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} 2 \ln e - \ln \left(\frac{1}{e}\right) &= 2 \times 1 - (-1) \\ &= 2 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

La deuxième équation est également vérifiée.

6. Conclusion

Le système possède donc une unique solution :

$$S = \left\{ \left(e, \frac{1}{e} \right) \right\}.$$

Exercice 8 - Domaines de définition

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \ln(e-x)}, \quad h(x) = \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}.$$

1) Fonction f

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}.$$

Pour que cette expression ait un sens, nous devons examiner **séparément** chaque logarithme, puis le dénominateur.

Première condition : $\ln(x+1)$ doit exister. L'argument d'un logarithme doit être strictement positif :

$$x+1 > 0 \iff x > -1.$$

Deuxième condition : $\ln(\ln x)$ doit exister. Son argument est $\ln x$, donc il faut :

$$\ln x > 0.$$

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln 1 = 0$, nous avons :

$$\ln x > 0 \iff x > 1.$$

Cette condition assure en particulier que $x > 0$, donc $\ln x$ est bien défini.

Troisième condition : le dénominateur ne doit pas être nul :

$$\ln(\ln x) \neq 0.$$

Or

$$\ln(\ln x) = 0 \iff \ln x = e^0 \iff \ln x = 1 \iff x = e.$$

Il faut donc exclure $x = e$.

Réunissons les conditions. La condition $x > 1$ est plus restrictive que $x > -1$. Ainsi :

$$x > 1 \quad \text{et} \quad x \neq e.$$

Donc

$$D_f =]1, e[\cup]e, +\infty[$$

2) Fonction g

$$g(x) = \sqrt{1 - \ln(e-x)}.$$

Deux conditions sont nécessaires : le logarithme doit exister et l'expression sous la racine carrée doit être positive ou nulle.

Première condition : $\ln(e-x)$ doit exister :

$$e-x > 0 \iff x < e.$$

Deuxième condition : le radicand doit vérifier

$$1 - \ln(e - x) \geq 0.$$

Donc

$$-\ln(e - x) \geq -1.$$

En multipliant par -1 , le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\ln(e - x) \leq 1.$$

Comme $\ln$ est strictement croissante :

$$\ln(e - x) \leq 1 \iff e - x \leq e^1 = e.$$

Ainsi

$$e - x \leq e \iff -x \leq 0 \iff x \geq 0.$$

Nous devons avoir simultanément

$$x < e \quad \text{et} \quad x \geq 0.$$

Par conséquent :

$$D_g = [0, e[$$

Remarque sur les bornes. Pour $x = 0$, on obtient $1 - \ln e = 0$, donc la racine existe : 0 est inclus. En revanche, pour $x = e$, l'argument $e - x$ du logarithme vaut 0, donc $\ln(e - x)$ n'existe pas : e est exclu.

3) Fonction h

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}.$$

Ici, la racine carrée se trouve au **dénominateur**. Il faut donc que le logarithme existe et que l'expression sous la racine soit **strictement positive**. Si elle était nulle, le dénominateur serait nul, ce qui est interdit.

Première condition : $\ln(2x)$ doit exister :

$$2x > 0 \iff x > 0.$$

Deuxième condition :

$$(\ln(2x))^2 - 1 > 0.$$

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$(\ln(2x))^2 - 1 = (\ln(2x) - 1)(\ln(2x) + 1).$$

On peut aussi écrire directement :

$$(\ln(2x))^2 > 1.$$

Pour un réel u , la condition $u^2 > 1$ équivaut à

$$u < -1 \quad \text{ou} \quad u > 1.$$

En prenant $u = \ln(2x)$, nous obtenons :

$$\ln(2x) < -1 \quad \text{ou} \quad \ln(2x) > 1.$$

Premier cas :

$$\ln(2x) < -1.$$

Comme $\ln$ est strictement croissante :

$$2x < e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Donc

$$x < \frac{1}{2e}.$$

En tenant compte de $x > 0$, cela donne

$$0 < x < \frac{1}{2e}.$$

Deuxième cas :

$$\ln(2x) > 1.$$

Alors

$$2x > e \iff x > \frac{e}{2}.$$

En réunissant les deux cas :

$$D_h =]0, \frac{1}{2e}[\cup]\frac{e}{2}, +\infty[$$

Les valeurs $x = \frac{1}{2e}$ et $x = \frac{e}{2}$ sont exclues, car elles rendent $(\ln(2x))^2 - 1 = 0$, donc le dénominateur serait nul.

Résultats finaux

$$D_f =]1, e[\cup]e, +\infty[$$

$$D_g = [0, e[$$

$$D_h =]0, \frac{1}{2e}[\cup]\frac{e}{2}, +\infty[$$

Exercice 9 – Calcul de limites

Rappels utiles. Nous utiliserons notamment

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Pour la question 6, si $\log$ désigne le logarithme décimal, alors $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x}$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\ln x \rightarrow +\infty$. Séparons les deux termes :

$$\frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \frac{2 \ln x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} = 2 + \frac{1}{\ln x}.$$

Or $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = 2$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - \ln x)$

Factorisons par $\ln x$:

$$(\ln x)^2 - \ln x = \ln x (\ln x - 1).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\ln x - 1 \rightarrow +\infty$. Le produit tend donc vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x)^2 - \ln x) = +\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

Écrivons x en facteur :

$$x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right).$$

On sait que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc

$$1 - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1 > 0.$$

Comme $x \rightarrow +\infty$, le produit tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + \ln x)$

Factorisons :

$$(\ln x)^2 + \ln x = \ln x (\ln x + 1).$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$. Le produit de deux quantités négatives dont les valeurs absolues deviennent arbitrairement grandes tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + \ln x) = +\infty$$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$

La forme $+\infty - \infty$ est indéterminée : il faut transformer l'expression. Posons

$$X = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $X \rightarrow +\infty$, et

$$\ln x = \ln \left(\frac{1}{X} \right) = -\ln X.$$

Ainsi

$$\frac{1}{x} + \ln x = X - \ln X = X \left(1 - \frac{\ln X}{X} \right).$$

Or $\frac{\ln X}{X} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers 1, tandis que $X \rightarrow +\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x$

Si $\log$ est le logarithme décimal,

$$x^4 \log x = x^4 \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} x^4 \ln x.$$

Comme $4 > 0$, la limite usuelle donne $x^4 \ln x \rightarrow 0$. Le facteur $\frac{1}{\ln 10}$ est constant. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0$$

(Remarque : près de 0, $\log x < 0$; l'expression tend donc vers 0 par valeurs négatives.)

7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x^3 \ln x)$

On traite séparément les deux termes :

$$2x \rightarrow 0$$

et, puisque $3 > 0$,

$$x^3 \ln x \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$2x - x^3 \ln x \rightarrow 0 - 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x^3 \ln x) = 0$$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Posons

$$u = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$. De plus $x = \frac{1}{u}$, donc

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{u} \ln(1 + u) = \frac{\ln(1 + u)}{u}.$$

La limite usuelle $\frac{\ln(1 + u)}{u} \rightarrow 1$ donne alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$ avec $X = \sqrt{x}$

Suivons l'indication. Posons

$$X = \sqrt{x}.$$

Alors $x = X^2$, et lorsque $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow 0^+$. De plus

$$\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X.$$

Donc

$$x(\ln x)^2 = X^2(2 \ln X)^2 = 4X^2(\ln X)^2 = 4(X \ln X)^2.$$

Or $X \ln X \rightarrow 0$ lorsque $X \rightarrow 0^+$. Par conséquent

$$4(X \ln X)^2 \rightarrow 4 \times 0^2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x - 1}$

Pour $x > 0$,

$$x^2 + 3x = x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Donc

$$\ln(x^2 + 3x) = \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Ainsi

$$\frac{\ln(x^2 + 3x)}{x - 1} = \frac{2 \ln x + \ln(1 + 3/x)}{x - 1}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\frac{\frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln(1 + 3/x)}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{2 \ln x}{x} \rightarrow 0, \quad \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \rightarrow 0,$$

donc $\frac{1}{x} \ln(1 + 3/x) \rightarrow 0$, tandis que $1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x)}{x - 1} = 0$$

11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5$

Pour faire apparaître une limite usuelle, écrivons

$$x^2 (\ln x)^5 = \left(x^{2/5} \ln x\right)^5,$$

car

$$\left(x^{2/5}\right)^5 = x^2.$$

Or $\frac{2}{5} > 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2/5} \ln x = 0.$$

En élevant à la puissance 5 :

$$\left(x^{2/5} \ln x\right)^5 \rightarrow 0^5 = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^5 = 0$$

(Remarque : $\ln x < 0$ près de 0 et la puissance 5 est impaire ; l'expression tend vers 0 par valeurs négatives.)

Bilan

$$\begin{array}{cccc} L_1 = 2 & L_2 = +\infty & L_3 = +\infty & L_4 = +\infty \\ L_5 = +\infty & L_6 = 0 & L_7 = 0 & L_8 = 1 \\ L_9 = 0 & L_{10} = 0 & L_{11} = 0. \end{array}$$

Exercice 10 - Domaine de dérivation et dérivée

Énoncé. Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln(3x^2 + 5).$$

1. Domaine de définition de la fonction

La fonction logarithme népérien $\ln(u)$ n'est définie que lorsque son argument est strictement positif. Nous devons donc commencer par étudier

$$3x^2 + 5 > 0.$$

Pour tout réel x , on a

$$x^2 \geq 0.$$

En multipliant par $3 > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas :

$$3x^2 \geq 0.$$

Puis, en ajoutant 5 aux deux membres,

$$3x^2 + 5 \geq 5.$$

Or

$$5 > 0.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$3x^2 + 5 > 0.$$

L'argument du logarithme est ainsi strictement positif pour tout réel x . Par conséquent,

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2. Domaine de dérivation

Posons

$$u(x) = 3x^2 + 5.$$

La fonction u est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, nous venons de montrer que

$$u(x) = 3x^2 + 5 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$. La composée

$$f = \ln \circ u$$

est donc dérivable pour tout réel x .

Ainsi, le domaine de dérivation de f est

$$D_{f'} = \mathbb{R}.$$

3. Calcul de la dérivée

Rappelons la formule de dérivation : si u est dérivable et si $u(x) > 0$, alors

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ici,

$$u(x) = 3x^2 + 5.$$

Calculons d'abord $u'(x)$:

$$u'(x) = (3x^2 + 5)'.$$

On dérive terme par terme :

$$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \times 2x = 6x$$

et

$$5' = 0.$$

Donc

$$u'(x) = 6x.$$

Appliquons maintenant la formule :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

En remplaçant $u'(x)$ et $u(x)$ par leurs expressions,

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 5}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 5}.$$

4. Résultat final

La fonction $f(x) = \ln(3x^2 + 5)$ est définie et dérivable sur tout $\mathbb{R}$, car $3x^2 + 5$ est toujours strictement positif.

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$$

et

$$f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 11 - Calcul de dérivées

Énoncé. Calculer la dérivée des fonctions définies par

$$1) f(x) = x^2 - \ln x, \quad 2) f(x) = x \ln x, \quad 3) f(x) = \ln(1 + x^2).$$

1) $f(x) = x^2 - \ln x$

a) Domaine de définition et de dérivation

Le terme x^2 est défini pour tout réel x . En revanche, $\ln x$ n'est défini que lorsque son argument est strictement positif :

$$x > 0.$$

Donc

$$D_f =]0, +\infty[.$$

Sur cet intervalle, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables. Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Calcul de la dérivée

Nous utilisons les deux formules :

$$(x^2)' = 2x \quad \text{et} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

La dérivée d'une différence est la différence des dérivées. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - \ln x)' \\ &= (x^2)' - (\ln x)' \\ &= 2x - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire cette expression sous un seul quotient. Comme

$$2x = \frac{2x^2}{x},$$

on obtient

$$f'(x) = \frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}, \quad x > 0.$$

2) $f(x) = x \ln x$

a) Domaine de définition et de dérivation

Le facteur x est défini pour tout réel, mais $\ln x$ exige

$$x > 0.$$

Ainsi,

$$D_f =]0, +\infty[.$$

et la fonction est dérivable sur cet intervalle.

b) Calcul de la dérivée

La fonction est un produit de deux fonctions :

$$f(x) = u(x)v(x)$$

avec

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x.$$

Leurs dérivées sont

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Nous utilisons la formule de dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \ln x)' \\ &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1, \end{aligned}$$

car, pour $x > 0$,

$$x \times \frac{1}{x} = 1.$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad x > 0.$$

3) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

a) Domaine de définition et de dérivation

Pour que le logarithme soit défini, son argument doit être strictement positif :

$$1 + x^2 > 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 \geq 0.$$

En ajoutant 1 aux deux membres,

$$1 + x^2 \geq 1 > 0.$$

La condition est donc satisfaite pour tout réel x . Ainsi,

$$D_f = \mathbb{R},$$

et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calcul de la dérivée

Cette fois, nous avons le logarithme d'une fonction. Posons

$$u(x) = 1 + x^2.$$

Alors

$$f(x) = \ln(u(x)).$$

La formule à utiliser est

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},$$

lorsque $u(x) > 0$.

Calculons d'abord $u'(x)$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1 + x^2)' \\ &= 0 + 2x \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{2x}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Résumé

$$\begin{aligned} 1) \quad f'(x) &= 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}, \quad x > 0, \\ 2) \quad f'(x) &= \ln x + 1, \quad x > 0, \\ 3) \quad f'(x) &= \frac{2x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 12 Calcul d'une dérivée

Énoncé. Calculer la dérivée de la fonction définie sur

$$I =] - 2, +\infty[$$

par

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 8}}{(x^2 + 1)^3}.$$

1. Vérification des expressions intervenant dans la fonction

La fonction contient une racine quatrième. Pour que $\sqrt[4]{x^3 + 8}$ soit définie, il faut avoir

$$x^3 + 8 \geq 0.$$

Or

$$x^3 + 8 \geq 0 \iff x^3 \geq -8 \iff x \geq -2.$$

De plus,

$$x^2 + 1 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

donc le dénominateur $(x^2 + 1)^3$ n'est jamais nul.

L'énoncé considère l'intervalle ouvert

$$I =] - 2, +\infty[.$$

Pour tout $x \in I$, on a donc

$$x^3 + 8 > 0,$$

ce qui permet de dériver la racine quatrième sans difficulté.

2. Réécriture sous forme de puissances

Pour faciliter la dérivation, écrivons

$$\sqrt[4]{x^3 + 8} = (x^3 + 8)^{\frac{1}{4}}.$$

Ainsi,

$$f(x) = (x^3 + 8)^{\frac{1}{4}}(x^2 + 1)^{-3}.$$

Nous allons dériver ce produit en utilisant

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Posons

$$u(x) = (x^3 + 8)^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad v(x) = (x^2 + 1)^{-3}.$$

3. Dérivée de $u(x) = (x^3 + 8)^{1/4}$

On utilise la formule

$$(w(x)^\alpha)' = \alpha w'(x) w(x)^{\alpha-1}.$$

Ici,

$$w(x) = x^3 + 8, \quad w'(x) = 3x^2, \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{4} \times 3x^2 (x^3 + 8)^{\frac{1}{4}-1} \\ &= \frac{3x^2}{4} (x^3 + 8)^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$u'(x) = \frac{3x^2}{4(x^3 + 8)^{3/4}}.$$

4. Dérivée de $v(x) = (x^2 + 1)^{-3}$

On applique la même formule. Posons

$$z(x) = x^2 + 1.$$

Alors

$$z'(x) = 2x.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} v'(x) &= -3 \times 2x (x^2 + 1)^{-4} \\ &= -6x(x^2 + 1)^{-4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$v'(x) = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}.$$

5. Calcul de $f'(x)$

Comme

$$f = uv,$$

on a

$$f' = u'v + uv'.$$

En remplaçant u, u', v, v' par leurs expressions :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2}{4} (x^3 + 8)^{-\frac{3}{4}} (x^2 + 1)^{-3} \\ &\quad + (x^3 + 8)^{\frac{1}{4}} [-6x(x^2 + 1)^{-4}]. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^3} - \frac{6x(x^3 + 8)^{1/4}}{(x^2 + 1)^4}.$$

Cette expression est déjà correcte. Nous pouvons toutefois la mettre sous un seul quotient.

6. Mise au même dénominateur

Prenons comme dénominateur commun

$$4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4.$$

Pour le premier terme, il manque un facteur $x^2 + 1$:

$$\frac{3x^2}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^3} = \frac{3x^2(x^2 + 1)}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4}.$$

Pour le deuxième terme, on utilise

$$(x^3 + 8)^{1/4}(x^3 + 8)^{3/4} = x^3 + 8.$$

Ainsi,

$$\frac{6x(x^3 + 8)^{1/4}}{(x^2 + 1)^4} = \frac{24x(x^3 + 8)}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4}.$$

On obtient alors

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 24x(x^3 + 8)}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4}.$$

Factorisons le numérateur par $3x$:

$$\begin{aligned} 3x^2(x^2 + 1) - 24x(x^3 + 8) &= 3x[x(x^2 + 1) - 8(x^3 + 8)] \\ &= 3x[x^3 + x - 8x^3 - 64] \\ &= 3x(-7x^3 + x - 64). \end{aligned}$$

7. Résultat final

Pour tout $x \in]-2, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3x(-7x^3 + x - 64)}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4}.$$

On peut aussi conserver la forme non factorisée :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 24x(x^3 + 8)}{4(x^3 + 8)^{3/4}(x^2 + 1)^4}.$$

Les deux écritures sont exactement équivalentes.

Exercice 13 - Domaine de dérivation et dérivée

Énoncé. Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln|\ln|x||, \quad 2) f(x) = \ln|\sin^2 x + 3 \sin x + 4|.$$

1) $f(x) = \ln|\ln|x||$

Étape 1 - Chercher où l'expression est définie

La fonction contient d'abord $\ln|x|$. Pour que ce logarithme existe, il faut que son argument soit strictement positif :

$$|x| > 0.$$

Or $|x| = 0$ uniquement lorsque $x = 0$. Ainsi,

$$x \neq 0.$$

Mais il y a ensuite un deuxième logarithme :

$$\ln|\ln|x||.$$

Son argument doit lui aussi être strictement positif :

$$|\ln|x|| > 0.$$

Une valeur absolue est strictement positive exactement lorsque ce qu'elle contient est non nul. Donc

$$\ln|x| \neq 0.$$

Or

$$\ln|x| = 0 \iff |x| = e^0 \iff |x| = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Il faut donc exclure -1 , 0 et 1 .

Ainsi, le domaine de définition est

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Étape 2 - Dériver

Nous utilisons la propriété suivante : si u est dérivable et $u(x) \neq 0$, alors

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ici, nous posons

$$u(x) = \ln|x|.$$

Pour $x \neq 0$, on a la formule

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Donc

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln|x|}.$$

Diviser par $\ln|x|$ revient à multiplier par son inverse :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln|x|}.$$

Finalement,

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln|x|}.$$

Cette formule est valable lorsque $x \neq -1, 0, 1$. La fonction est donc dérivable sur chacun des intervalles de son domaine.

$$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

et

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln|x|}.$$

$$2) f(x) = \ln |\sin^2 x + 3 \sin x + 4|$$

Étape 1 - Étudier l'expression placée dans la valeur absolue

Posons

$$A(x) = \sin^2 x + 3 \sin x + 4.$$

Pour comprendre si $A(x)$ peut s'annuler, posons temporairement

$$t = \sin x.$$

Alors

$$A(x) = t^2 + 3t + 4.$$

Étudions le trinôme

$$P(t) = t^2 + 3t + 4.$$

Son discriminant est

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7.$$

Nous avons donc

$$\Delta < 0.$$

De plus, le coefficient de t^2 est $1 > 0$. Un trinôme du second degré dont le discriminant est négatif et dont le coefficient dominant est positif est strictement positif pour tout réel t . Ainsi,

$$t^2 + 3t + 4 > 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $t = \sin x$,

$$\sin^2 x + 3 \sin x + 4 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$|\sin^2 x + 3 \sin x + 4| = \sin^2 x + 3 \sin x + 4.$$

La fonction peut donc s'écrire simplement

$$f(x) = \ln(\sin^2 x + 3 \sin x + 4).$$

L'argument du logarithme étant toujours strictement positif, la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$.

Étape 2 - Dériver l'expression intérieure

Posons

$$u(x) = \sin^2 x + 3 \sin x + 4.$$

Calculons $u'(x)$ terme par terme.

Pour $\sin^2 x = (\sin x)^2$, on utilise la dérivée d'un carré :

$$((\sin x)^2)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

Ensuite,

$$(3 \sin x)' = 3 \cos x$$

et

$$4' = 0.$$

Donc

$$u'(x) = 2 \sin x \cos x + 3 \cos x.$$

On peut mettre $\cos x$ en facteur :

$$u'(x) = \cos x (2 \sin x + 3).$$

Étape 3 - Utiliser la dérivée du logarithme

Puisque

$$f(x) = \ln(u(x))$$

et que $u(x) > 0$ pour tout réel x , on utilise

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x + 3 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 4}.$$

En factorisant le numérateur :

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 \sin x + 3)}{\sin^2 x + 3 \sin x + 4}.$$

Le dénominateur est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc cette dérivée existe pour tout réel.

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

et

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 \sin x + 3)}{\sin^2 x + 3 \sin x + 4}.$$

Résumé final

$$\begin{aligned} 1) D_{f'} &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, & f'(x) &= \frac{1}{x \ln |x|}, \\ 2) D_{f'} &= \mathbb{R}, & f'(x) &= \frac{\cos x (2 \sin x + 3)}{\sin^2 x + 3 \sin x + 4}. \end{aligned}$$

Exercice 14 – Fonctions primitives

Énoncé. Déterminer les fonctions primitives des fonctions données, sur les intervalles indiqués lorsqu'ils sont précisés.

1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$

On reconnaît une expression de la forme u'/u . Posons

$$u(x) = x^4 + 2.$$

Alors

$$u'(x) = 4x^3.$$

Le numérateur contient seulement x^3 . On écrit donc

$$x^3 = \frac{1}{4} (4x^3),$$

d'où

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{4x^3}{x^4 + 2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 2 > 0$. Nous pouvons utiliser

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{lorsque } u(x) > 0.$$

Ainsi

$$\int \frac{x^3}{x^4 + 2} dx = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + C.$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2) $I =]0, 1[$, $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Sur $]0, 1[$, on a $x > 0$, donc $\ln x$ existe. De plus, $\ln x < 0$, donc $\ln x \neq 0$.

Posons

$$u(x) = \ln x.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent

$$g(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Une primitive de u'/u est $\ln |u|$. Donc

$$G(x) = \ln |\ln x| + C.$$

Comme $\ln x < 0$ sur $]0, 1[$, on pourrait également écrire $\ln(-\ln x) + C$.

$$G(x) = \ln |\ln x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3) $I =] - \infty, 1[, h(x) = \frac{1}{x-1}$

On utilise la formule

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C.$$

Ici

$$u(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 1.$$

Donc

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln |x-1| + C.$$

Sur $] - \infty, 1[, x - 1 < 0$, donc $|x - 1| = 1 - x$. On peut ainsi écrire

$$H(x) = \ln(1 - x) + C.$$

Vérification :

$$H'(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}.$$

$$H(x) = \ln(1 - x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

4) $I =]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[, k(x) = \frac{\cos X}{\sin X}$

Posons

$$u(x) = \sin x.$$

Alors

$$u'(x) = \cos x.$$

Ainsi

$$k(x) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

et une primitive est

$$K(x) = \ln |\sin x| + C.$$

Sur l'intervalle $] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on a $\sin x < 0$, donc $|\sin x| = -\sin x$. On peut donc aussi écrire $K(x) = \ln(-\sin x) + C$.

$$K(x) = \ln |\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

5) $M(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

L'indication demande une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Comme

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

on met le membre de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Il faut donc que

$$1 = a(x+1) + b(x-1).$$

Développons :

$$1 = ax + a + bx - b = (a + b)x + (a - b).$$

Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients. On obtient donc

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a - b = 1. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$2a = 1 \implies a = \frac{1}{2}.$$

Puis

$$b = -a = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1}.$$

On intègre terme à terme :

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C.$$

Cette formule est valable sur tout intervalle ne contenant ni -1 ni 1 .

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$$

On peut aussi regrouper les logarithmes :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C.$$

6)
$$N(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x - 3}$$

Le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur. Nous effectuons donc la division euclidienne.

Cherchons $Q(x)$ et un reste constant r tels que

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = (x - 3)Q(x) + r.$$

La division donne successivement :

$$\frac{x^3}{x} = x^2.$$

On soustrait $(x - 3)x^2 = x^3 - 3x^2$, ce qui laisse

$$5x^2 - 3x + 2.$$

Puis

$$\frac{5x^2}{x} = 5x.$$

On soustrait $(x - 3)5x = 5x^2 - 15x$, ce qui laisse

$$12x + 2.$$

Enfin

$$\frac{12x}{x} = 12.$$

On soustrait $(x - 3)12 = 12x - 36$, et il reste

$$38.$$

Donc

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = (x - 3)(x^2 + 5x + 12) + 38.$$

Par conséquent

$$N(x) = x^2 + 5x + 12 + \frac{38}{x - 3}.$$

On intègre terme à terme :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad \int 5x dx = \frac{5}{2}x^2, \quad \int 12 dx = 12x,$$

et

$$\int \frac{38}{x - 3} dx = 38 \ln |x - 3|.$$

Ainsi, sur tout intervalle ne contenant pas 3,

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 12x + 38 \ln |x - 3| + C$$

$$7) I =]3, +\infty[, \quad q(x) = \frac{1}{(x - 2) \ln(x - 2)}$$

Sur $]3, +\infty[$, on a $x - 2 > 1$, donc

$$\ln(x - 2) > 0.$$

Le dénominateur est donc bien non nul.

Posons

$$u(x) = \ln(x - 2).$$

Alors, puisque $(x - 2)' = 1$,

$$u'(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

Nous obtenons

$$q(x) = \frac{1}{(x - 2) \ln(x - 2)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Donc

$$Q(x) = \ln |u(x)| + C = \ln |\ln(x - 2)| + C.$$

Mais sur $]3, +\infty[$, $\ln(x - 2) > 0$. La valeur absolue est donc inutile :

$$Q(x) = \ln(\ln(x - 2)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Résumé des primitives

$$1) \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + C,$$

$$2) \ln |\ln x| + C,$$

$$3) \ln(1 - x) + C,$$

$$4) \ln |\sin x| + C,$$

$$5) \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C,$$

$$6) \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 12x + 38 \ln |x - 3| + C,$$

$$7) \ln(\ln(x - 2)) + C.$$

Exercice 15 - Correction détaillée

Énoncé. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{5x + 1}{x^2 + x - 2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f , puis déterminer les réels a et b tels que, pour tout x du domaine,

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

2) En déduire la primitive F de f sur $] -\infty, -2[$ telle que

$$F(-3) = \ln 2.$$

1. Ensemble de définition et décomposition en éléments simples

La fonction f est une fonction rationnelle. Elle est définie lorsque son dénominateur est différent de zéro.

Commençons par factoriser le dénominateur :

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

En effet,

$$(x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Ainsi,

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x - 1)(x + 2) = 0.$$

Donc

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Ces deux valeurs sont interdites. Par conséquent,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Nous cherchons maintenant $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{5x + 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

Mettons le membre de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2} = \frac{a(x + 2) + b(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Développons le numérateur :

$$a(x + 2) + b(x - 1) = ax + 2a + bx - b.$$

Donc

$$a(x + 2) + b(x - 1) = (a + b)x + (2a - b).$$

Pour avoir l'égalité avec $5x + 1$, il faut donc que

$$(a + b)x + (2a - b) = 5x + 1.$$

Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ 2a - b = 1. \end{cases}$$

Additionnons les deux équations :

$$(a + b) + (2a - b) = 5 + 1,$$

d'où

$$3a = 6,$$

puis

$$\boxed{a = 2.}$$

En remplaçant a par 2 dans $a + b = 5$:

$$2 + b = 5,$$

donc

$$\boxed{b = 3.}$$

Ainsi, pour tout $x \in D_f$,

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}.}$$

Vérification. On a bien

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2) + 3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+4+3x-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{5x+1}{x^2+x-2}.$$

2. Primitive sur $] -\infty, -2[$ vérifiant $F(-3) = \ln 2$

Sur l'intervalle $] -\infty, -2[$, nous avons

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

Rappelons que, sur tout intervalle ne contenant pas α ,

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln |x-\alpha| + C.$$

Ainsi, une primitive générale de f est

$$F(x) = 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+2| + C.$$

Mais ici $x < -2$. Étudions donc les signes afin d'enlever correctement les valeurs absolues.

Comme $x < -2$, on a en particulier $x < 1$, donc

$$x-1 < 0 \implies |x-1| = -(x-1) = 1-x.$$

De même,

$$x+2 < 0 \implies |x+2| = -(x+2) = -x-2.$$

Par conséquent, sur $] -\infty, -2[$,

$$F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) + C.$$

Il reste à déterminer la constante C à l'aide de la condition

$$F(-3) = \ln 2.$$

Remplaçons x par -3 :

$$F(-3) = 2 \ln(1 - (-3)) + 3 \ln(-(-3) - 2) + C.$$

Calculons chaque terme :

$$1 - (-3) = 4 \quad \text{et} \quad -(-3) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Donc

$$F(-3) = 2 \ln 4 + 3 \ln 1 + C.$$

Or

$$\ln 1 = 0,$$

d'où

$$F(-3) = 2 \ln 4 + C.$$

Comme $F(-3) = \ln 2$, nous obtenons

$$2 \ln 4 + C = \ln 2.$$

Donc

$$C = \ln 2 - 2 \ln 4.$$

Or

$$\ln 4 = \ln(2^2) = 2 \ln 2,$$

alors

$$2 \ln 4 = 4 \ln 2.$$

Ainsi

$$C = \ln 2 - 4 \ln 2 = -3 \ln 2.$$

Comme $3 \ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8$, on peut également écrire

$$C = -\ln 8.$$

Finalement, la primitive cherchée est

$$F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) - \ln 8, \quad x \in]-\infty, -2[.$$

Vérification finale

Dérivons l'expression obtenue. Pour $x < -2$,

$$\frac{d}{dx} [2 \ln(1-x)] = 2 \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{x-1},$$

et

$$\frac{d}{dx} [3 \ln(-x-2)] = 3 \frac{-1}{-x-2} = \frac{3}{x+2}.$$

La constante $-\ln 8$ a pour dérivée 0. Donc

$$F'(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} = f(x).$$

De plus,

$$F(-3) = 2 \ln 4 + 3 \ln 1 - \ln 8 = \ln 16 - \ln 8 = \ln \left(\frac{16}{8} \right) = \ln 2.$$

Les deux conditions sont donc bien vérifiées.

Exercice 16 – Simplifier et calculer

Rappel. Pour une base $a > 0$ avec $a \neq 1$, le nombre $\log_a(b)$ est l'unique réel r tel que

$$\log_a(b) = r \iff a^r = b,$$

avec $b > 0$. L'idée essentielle consiste donc à écrire le nombre situé dans le logarithme comme une puissance de la base.

1) Calcul de $\log_8 4$

Nous cherchons un réel r tel que

$$8^r = 4.$$

Écrivons 8 et 4 comme des puissances de 2 :

$$8 = 2^3 \quad \text{et} \quad 4 = 2^2.$$

Ainsi,

$$(2^3)^r = 2^2.$$

En utilisant $(a^m)^n = a^{mn}$, on obtient

$$2^{3r} = 2^2.$$

Les bases étant identiques et strictement positives, les exposants sont égaux :

$$3r = 2.$$

Donc

$$r = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\log_8 4 = \frac{2}{3}}$$

2) Calcul de $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$

Nous cherchons r tel que

$$(\sqrt{2})^r = \frac{1}{2}.$$

Écrivons les deux membres comme des puissances de 2 :

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} = 2^{-1}.$$

L'équation devient

$$\left(2^{1/2}\right)^r = 2^{-1}.$$

Donc

$$2^{r/2} = 2^{-1}.$$

On égalise les exposants :

$$\frac{r}{2} = -1.$$

En multipliant par 2 :

$$r = -2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -2}$$

3) Calcul de $\log_{\sqrt{3}} 9$

Nous cherchons r tel que

$$(\sqrt{3})^r = 9.$$

Or

$$\sqrt{3} = 3^{1/2} \quad \text{et} \quad 9 = 3^2.$$

Donc

$$(3^{1/2})^r = 3^2,$$

d'où

$$3^{r/2} = 3^2.$$

Les exposants sont donc égaux :

$$\frac{r}{2} = 2.$$

Ainsi,

$$r = 4.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\log_{\sqrt{3}} 9 = 4}$$

4) Calcul de A

On considère

$$A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{1/3}\left(\sqrt[5]{3}\right).$$

Nous allons simplifier les trois termes progressivement.

Étape 1 : regrouper les deux logarithmes de base 2

Les deux premiers logarithmes ont la même base. On utilise

$$\log_a u + \log_a v = \log_a(uv).$$

Ainsi,

$$\log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) = \log_2\left(\frac{1}{5} \times 10\right).$$

Or

$$\frac{1}{5} \times 10 = \frac{10}{5} = 2.$$

Donc

$$\log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) = \log_2 2 = 1.$$

Étape 2 : calculer $\log_{1/3}(\sqrt[5]{3})$

Posons

$$r = \log_{1/3}(\sqrt[5]{3}).$$

Par définition du logarithme,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^r = \sqrt[5]{3}.$$

Écrivons chaque membre comme une puissance de 3 :

$$\frac{1}{3} = 3^{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{3} = 3^{1/5}.$$

Nous obtenons alors

$$(3^{-1})^r = 3^{1/5},$$

soit

$$3^{-r} = 3^{1/5}.$$

Les exposants sont égaux :

$$-r = \frac{1}{5}.$$

Donc

$$r = -\frac{1}{5}.$$

Ainsi,

$$\log_{1/3}(\sqrt[5]{3}) = -\frac{1}{5}.$$

Étape 3 : terminer le calcul de A

En remplaçant les résultats obtenus :

$$A = 1 - \frac{1}{5}.$$

On écrit $1 = \frac{5}{5}$:

$$A = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Finalement,

$$A = \frac{4}{5}$$

Résultats finaux

$$\log_8 4 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$$

$$A = \frac{4}{5}.$$

Exercices 17, 18 et 19 - Correction détaillée

Exercice 17

On pose

$$\alpha = \log_{40}(100) \quad \text{et} \quad \beta = \log_{16}(25).$$

On cherche à exprimer β uniquement en fonction de α .

1. Écriture de α avec les logarithmes de 2 et de 5

Par changement de base,

$$\alpha = \frac{\ln 100}{\ln 40}.$$

Or

$$100 = 2^2 \times 5^2, \quad 40 = 2^3 \times 5.$$

Donc

$$\ln 100 = 2 \ln 2 + 2 \ln 5, \quad \ln 40 = 3 \ln 2 + \ln 5.$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{2 \ln 2 + 2 \ln 5}{3 \ln 2 + \ln 5}.$$

Posons, uniquement pour simplifier les calculs,

$$r = \frac{\ln 5}{\ln 2}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $\ln 2$, on obtient

$$\alpha = \frac{2 + 2r}{3 + r} = \frac{2(1 + r)}{3 + r}.$$

Réolvons cette égalité par rapport à r :

$$\alpha(3 + r) = 2(1 + r),$$

$$3\alpha + \alpha r = 2 + 2r,$$

$$\alpha r - 2r = 2 - 3\alpha,$$

$$r(\alpha - 2) = 2 - 3\alpha.$$

Donc

$$r = \frac{2 - 3\alpha}{\alpha - 2} = \frac{3\alpha - 2}{2 - \alpha}.$$

2. Expression de β

Toujours par changement de base,

$$\beta = \frac{\ln 25}{\ln 16}.$$

Comme $25 = 5^2$ et $16 = 2^4$,

$$\beta = \frac{2 \ln 5}{4 \ln 2} = \frac{1 \ln 5}{2 \ln 2} = \frac{r}{2}.$$

En remplaçant r ,

$$\boxed{\beta = \frac{3\alpha - 2}{2(2 - \alpha)}}.$$

Exercice 18

1. Calcul de $\log_{10} 100$

Par définition, $\log_{10} 100$ est l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir 100. Or

$$100 = 10^2.$$

Donc

$$\boxed{\log_{10} 100 = 2}.$$

2. Calcul de $\log_{10}(0,0001)$

Écrivons le nombre sous la forme d'une puissance de 10 :

$$0,0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}.$$

Ainsi

$$\boxed{\log_{10}(0,0001) = -4}.$$

3. Calcul de A

On a

$$A = \log(250000) + \log(\sqrt{250}) - \log(125),$$

où $\log$ désigne le logarithme décimal.

Utilisons

$$\log a + \log b = \log(ab), \quad \log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right).$$

Alors

$$A = \log\left(\frac{250000\sqrt{250}}{125}\right).$$

Comme

$$\frac{250000}{125} = 2000,$$

on obtient

$$A = \log(2000\sqrt{250}).$$

Or

$$\sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10} = 5\sqrt{10}.$$

Donc

$$2000\sqrt{250} = 2000 \times 5\sqrt{10} = 10000\sqrt{10}.$$

Puis

$$10000\sqrt{10} = 10^4 \times 10^{1/2} = 10^{9/2}.$$

Par conséquent,

$$A = \log(10^{9/2}) = \frac{9}{2}.$$

Ainsi

$$\boxed{A = \frac{9}{2}}.$$

Exercice 19

On cherche le plus petit entier naturel n tel que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}.$$

Comme les deux membres sont strictement positifs, on peut prendre le logarithme népérien. La fonction $\ln$ étant strictement croissante,

$$\ln \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \right] \geq \ln(10^{20}).$$

En utilisant $\ln(a^n) = n \ln a$,

$$n \ln \left(\frac{3}{2}\right) \geq 20 \ln 10.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, on a

$$\ln \left(\frac{3}{2}\right) > 0.$$

On peut donc diviser sans changer le sens de l'inégalité :

$$n \geq \frac{20 \ln 10}{\ln(3/2)}.$$

Numériquement,

$$\frac{20 \ln 10}{\ln(3/2)} \approx 113,577.$$

Ainsi

$$n \geq 113,577 \dots$$

Comme n doit être un entier naturel, le plus petit entier possible est le premier entier supérieur à ce nombre :

$$\boxed{n = 114}.$$

Pour bien comprendre : 113 est encore trop petit, tandis que 114 satisfait l'inégalité.

Exercice 20 – Équations et inéquation logarithmiques

Rappel. Pour un logarithme $\log_a(u)$, il faut toujours vérifier

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad u > 0.$$

Dans les questions où la base n'est pas indiquée, $\log$ désigne le logarithme décimal.

$$1) \log_3(2x)(\log_5(x) - 1) = 0$$

Étape 1 : domaine de définition.

Pour $\log_3(2x)$, il faut $2x > 0$, donc $x > 0$. Pour $\log_5(x)$, il faut également $x > 0$. Ainsi,

$$D =]0, +\infty[.$$

Étape 2 : utiliser la règle du produit nul.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\log_3(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \log_5(x) - 1 = 0.$$

Premier cas :

$$\log_3(2x) = 0.$$

Par définition du logarithme,

$$\log_a(u) = b \iff u = a^b.$$

Donc

$$2x = 3^0 = 1,$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}.$$

Deuxième cas :

$$\log_5(x) - 1 = 0 \iff \log_5(x) = 1.$$

Donc

$$x = 5^1 = 5.$$

Les deux valeurs sont strictement positives et appartiennent au domaine.

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 5 \right\}$$

$$2) 2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$$

Étape 1 : domaine.

Le logarithme décimal $\log x$ existe si et seulement si

$$x > 0.$$

Étape 2 : changement d'inconnue.

Posons

$$X = \log x.$$

L'équation devient

$$2X^2 - 19X - 10 = 0.$$

Étape 3 : résoudre l'équation du second degré.

Ici

$$a = 2, \quad b = -19, \quad c = -10.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4 \times 2 \times (-10).$$

Ainsi

$$\Delta = 361 + 80 = 441 = 21^2.$$

Il y a donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{19 - 21}{4} = -\frac{1}{2}, \quad X_2 = \frac{19 + 21}{4} = 10.$$

Étape 4 : revenir à x .

Comme $X = \log x$,

$$\log x = -\frac{1}{2} \iff x = 10^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

et

$$\log x = 10 \iff x = 10^{10}.$$

Ces deux nombres sont positifs.

$$S_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}, 10^{10} \right\}$$

$$\mathbf{3)} \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

Étape 1 : domaine de définition.

L'argument du logarithme doit être strictement positif :

$$x - \frac{1}{2} > 0 \iff x > \frac{1}{2}.$$

Étape 2 : tenir compte de la base.

La base est

$$0 < \frac{1}{2} < 1.$$

La fonction

$$u \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(u)$$

est donc **strictement décroissante**. Par conséquent, lorsque l'on passe du logarithme à son argument, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \geq 1 \iff 0 < x - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^1.$$

Donc

$$0 < x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

En ajoutant $\frac{1}{2}$ aux trois membres :

$$\frac{1}{2} < x \leq 1.$$

$$S_3 = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

4) $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

Cette question demande une attention particulière car les **bases dépendent de x**.

Étape 1 : conditions d'existence.

Pour $\log_{2x}(4x)$, il faut

$$2x > 0, \quad 2x \neq 1, \quad 4x > 0.$$

Cela donne

$$x > 0, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Pour $\log_{4x}(16x)$, il faut

$$4x > 0, \quad 4x \neq 1, \quad 16x > 0.$$

Cela donne

$$x > 0, \quad x \neq \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$D =]0, +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Étape 2 : écrire x comme une puissance de 2.

Puisque $x > 0$, posons

$$X = \log_2 x.$$

Alors

$$x = 2^X.$$

On obtient

$$2x = 2^{X+1}, \quad 4x = 2^{X+2}, \quad 16x = 2^{X+4}.$$

Par conséquent,

$$\log_{2x}(4x) = \log_{2^{X+1}}(2^{X+2}) = \frac{X+2}{X+1},$$

et

$$\log_{4x}(16x) = \log_{2^{X+2}}(2^{X+4}) = \frac{X+4}{X+2}.$$

Les valeurs $X = -1$ et $X = -2$ sont interdites : elles correspondent respectivement à $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{4}$.

L'équation devient donc

$$\frac{X+2}{X+1} + \frac{X+4}{X+2} = 4.$$

Étape 3 : mettre au même dénominateur.

Comme $X \neq -1$ et $X \neq -2$, on peut multiplier par $(X+1)(X+2)$:

$$(X+2)^2 + (X+4)(X+1) = 4(X+1)(X+2).$$

Développons chaque membre :

$$(X + 2)^2 = X^2 + 4X + 4,$$

$$(X + 4)(X + 1) = X^2 + 5X + 4,$$

et

$$4(X + 1)(X + 2) = 4(X^2 + 3X + 2) = 4X^2 + 12X + 8.$$

Donc

$$X^2 + 4X + 4 + X^2 + 5X + 4 = 4X^2 + 12X + 8.$$

Ainsi

$$2X^2 + 9X + 8 = 4X^2 + 12X + 8.$$

En ramenant tout dans le même membre :

$$2X^2 + 3X = 0.$$

On factorise :

$$X(2X + 3) = 0.$$

Donc

$$X = 0 \quad \text{ou} \quad X = -\frac{3}{2}.$$

Étape 4 : revenir à x .

Puisque $X = \log_2 x$:

Si $X = 0$,

$$x = 2^0 = 1.$$

Si $X = -\frac{3}{2}$,

$$x = 2^{-3/2} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ces deux valeurs sont positives et différentes de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Elles sont donc admissibles.

$$S_4 = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

Résultats finaux

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 5 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}, 10^{10} \right\}$$

$$S_3 = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$S_4 = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}.$$

Exercice 21 – Correction détaillée

Rappel. Pour que $\log_a(u)$ existe, il faut $a > 0$, $a \neq 1$ et $u > 0$. Ici la base est 3, donc les conditions sur la base sont déjà satisfaites.

1) Résoudre $\log_3((7x - 1)^2) = 0$

Étape 1 : condition d'existence.

Il faut que l'argument du logarithme soit strictement positif :

$$(7x - 1)^2 > 0.$$

Un carré est nul seulement lorsque ce qui est à l'intérieur est nul. Ainsi

$$7x - 1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{7}.$$

Donc

$$D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{7} \right\}.$$

Étape 2 : utiliser la définition du logarithme.

$$\log_3((7x - 1)^2) = 0 \iff (7x - 1)^2 = 3^0 = 1.$$

Donc

$$(7x - 1)^2 = 1 \iff 7x - 1 = 1 \text{ ou } 7x - 1 = -1.$$

Premier cas :

$$7x - 1 = 1 \iff 7x = 2 \iff x = \frac{2}{7}.$$

Deuxième cas :

$$7x - 1 = -1 \iff 7x = 0 \iff x = 0.$$

Ces deux valeurs appartiennent au domaine.

$$S_1 = \left\{ 0, \frac{2}{7} \right\}$$

2) Résoudre $\log_3(5x + 1) = 2$

Étape 1 : condition d'existence.

$$5x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{5}.$$

Donc $D_2 =]-\frac{1}{5}, +\infty[$.

Étape 2 : passer à la forme exponentielle.

$$\log_3(5x + 1) = 2 \iff 5x + 1 = 3^2.$$

Or $3^2 = 9$, donc

$$5x + 1 = 9 \iff 5x = 8 \iff x = \frac{8}{5}.$$

Comme $\frac{8}{5} > -\frac{1}{5}$, cette valeur est admissible.

$$S_2 = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$$

3) Résoudre $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3((7x-1)^2)} \leq 1$

Étape 1 : déterminer soigneusement le domaine.

Pour le numérateur :

$$5x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{5}.$$

Pour le logarithme du dénominateur, il faut

$$(7x-1)^2 > 0 \iff x \neq \frac{1}{7}.$$

De plus, le *dénominateur de la fraction* doit être non nul :

$$\log_3((7x-1)^2) \neq 0.$$

D'après la question 1,

$$\log_3((7x-1)^2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{7}.$$

Ainsi

$$D_3 = \left] -\frac{1}{5}, +\infty \right[\setminus \left\{ 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right\}.$$

Étape 2 : ramener l'inéquation à une comparaison avec zéro.

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3((7x-1)^2)} \leq 1$$

équivalent, sur D_3 , à

$$\frac{\log_3(5x+1) - \log_3((7x-1)^2)}{\log_3((7x-1)^2)} \leq 0.$$

Grâce à $\log_3 A - \log_3 B = \log_3(A/B)$, le numérateur devient

$$\log_3\left(\frac{5x+1}{(7x-1)^2}\right).$$

Nous allons étudier séparément le signe du numérateur et celui du dénominateur.

Étape 3 : signe du numérateur.

Comme la base 3 est supérieure à 1, $\log_3 u$ a le même signe que $u - 1$. Ainsi le signe de

$$\log_3\left(\frac{5x+1}{(7x-1)^2}\right)$$

est celui de

$$\frac{5x+1}{(7x-1)^2} - 1.$$

Or

$$\frac{5x+1}{(7x-1)^2} - 1 = \frac{5x+1 - (7x-1)^2}{(7x-1)^2}.$$

Développons :

$$(7x-1)^2 = 49x^2 - 14x + 1,$$

donc

$$5x+1 - (7x-1)^2 = 5x+1 - 49x^2 + 14x - 1 = 19x - 49x^2.$$

On factorise :

$$19x - 49x^2 = x(19 - 49x).$$

Comme $(7x - 1)^2 > 0$ sur le domaine, le signe du numérateur logarithmique est donc celui de

$$x(19 - 49x).$$

Ses zéros sont

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{19}{49}.$$

Le point $x = 0$ est déjà exclu du domaine, tandis que $x = \frac{19}{49}$ est admissible.

Étape 4 : signe du dénominateur.

Nous étudions

$$\log_3((7x - 1)^2).$$

Puisque $3 > 1$:

$$\log_3((7x - 1)^2) > 0 \iff (7x - 1)^2 > 1,$$

et

$$\log_3((7x - 1)^2) < 0 \iff 0 < (7x - 1)^2 < 1.$$

Réolvons $(7x - 1)^2 > 1$:

$$|7x - 1| > 1 \iff 7x - 1 < -1 \text{ ou } 7x - 1 > 1,$$

d'où

$$x < 0 \text{ ou } x > \frac{2}{7}.$$

Ainsi le dénominateur est positif pour $x < 0$ ou $x > \frac{2}{7}$, et négatif pour

$$0 < x < \frac{2}{7},$$

en tenant compte de l'exclusion de $x = \frac{1}{7}$.

Étape 5 : tableau de signes et conclusion.

Pour que la fraction soit inférieure ou égale à zéro, son numérateur et son dénominateur doivent être de signes opposés, ou bien le numérateur doit être nul avec un dénominateur non nul.

Sur le domaine D_3 , on obtient successivement :

x	$] -\frac{1}{5}, 0[$	0	$]0, \frac{1}{7}[$	$\frac{1}{7}$	$] \frac{1}{7}, \frac{2}{7}[$	$] \frac{2}{7}, \frac{19}{49}[$	$] \frac{19}{49}, +\infty[$
numérateur	-	0	+		+	+	- à 0
dénominateur	+	0	-	n.d.	-	+	+
quotient	-	n.d.	-	n.d.	-	+	- ou 0

Donc

$$S_3 = \left] -\frac{1}{5}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{7} \right[\cup \left] \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right[\cup \left[\frac{19}{49}, +\infty \right[$$

Résultats finaux

$$S_1 = \left\{ 0, \frac{2}{7} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \frac{8}{5} \right\}$$

$$S_3 = \left] -\frac{1}{5}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{1}{7} \right[\cup \left] \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right[\cup \left[\frac{19}{49}, +\infty \right[.$$