

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Exercices 22 à 27 - Énoncés uniquement

Exercice 22

A) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = x - \ln x.$$

1. Déterminer D_g , l'ensemble de définition de la fonction g , et déterminer les limites aux bornes de D_g .
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g , puis dresser le tableau de variation de g .
3. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad x > \ln x.$$

B) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}, & \text{si } x > 0, \\ f(0) = -1. \end{cases}$$

1. Montrer que

$$D_f = [0, +\infty[.$$

2. Montrer que f est continue à droite de 0.

3. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

5. Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}.$$

6. Dresser le tableau de variation de f .

7. Déterminer les points d'intersection de C_f et de la droite

$$(\Delta) : y = 1.$$

8. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans

$$\left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$$

9. Construire la courbe C_f dans un repère

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \quad (\ln 2 \simeq 0,7, \quad e \simeq 2,7).$$

Exercice 23

Considérons les fonctions f et g définies sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

et

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

1. a) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x).$$

- b) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right),$$

et en déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

- c) Étudier les variations des fonctions f et g , puis dresser les tableaux de variations de f et g .

2. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

4. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 24

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Montrer que le domaine d'étude de f est :

$$D_E =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

- Déterminer les limites aux bornes de D_E .
- Étudier les variations de f sur D_E .
- Étudier les branches infinies de (C_f) , la courbe de f .
- Construire la courbe (C_f) dans D_E .

Exercice 25

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\log_2(x) > \log_x(2).$$

Exercice 26

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Résoudre l'équation

$$f(x) = 1.$$

3. Résoudre l'inéquation

$$f(x) \leq 1.$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de e .

5. Étudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de D_f vers un intervalle J .

6. Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 27

Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

2. a) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0, noté $\bar{g}$.

b) Étudier la dérivabilité de $\bar{g}$ en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en -1 à gauche.

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g , puis dresser le tableau de variation de g .

5. Étudier les branches infinies de la courbe C_g .

6. Construire la courbe C_g .

EXERCICE 22 - FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Correction détaillée

A. Étude de la fonction $g(x) = x - \ln x$

1. Ensemble de définition et limites aux bornes

La fonction est

$$g(x) = x - \ln x.$$

Le terme x est défini pour tout réel. En revanche, $\ln x$ n'est défini que lorsque $x > 0$. Ainsi,

$$D_g =]0, +\infty[.$$

Limite en 0^+ . Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a

$$x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \ln x \rightarrow -\infty.$$

Donc

$$-\ln x \rightarrow +\infty,$$

et par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty.$$

Limite en $+\infty$. On écrit

$$g(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Ainsi

$$1 - \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad x \rightarrow +\infty,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. Dérivée et tableau de variation de g

Pour $x > 0$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$:

$$\begin{cases} g'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ g'(1) = 0, \\ g'(x) > 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

De plus,

$$g(1) = 1 - \ln 1 = 1.$$

Donc g décroît sur $]0, 1]$, puis croît sur $[1, +\infty[$. Elle atteint son minimum en $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$	1	$+\infty$

3. En déduire que, pour tout $x > 0$, $x > \ln x$

Le tableau précédent montre que la valeur minimale de g est

$$g(1) = 1.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$g(x) \geq 1 > 0.$$

Or $g(x) = x - \ln x$. Donc

$$x - \ln x > 0,$$

ce qui équivaut à

$$\forall x > 0, \quad x > \ln x.$$

B. Étude de la fonction f

On considère

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \quad \text{si } x > 0, \quad f(0) = -1.$$

1. Montrer que $D_f = [0, +\infty[$

Pour $x > 0$, $\ln x$ existe. Il faut aussi vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. D'après la partie A,

$$\forall x > 0, \quad x > \ln x,$$

donc

$$x - \ln x > 0.$$

Le dénominateur est donc toujours non nul pour $x > 0$. Enfin, l'énoncé définit explicitement $f(0) = -1$. Ainsi,

$$D_f = [0, +\infty[.$$

2. Continuité à droite en 0

Nous devons vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1.$$

Pour $x > 0$, divisons le numérateur et le dénominateur par $\ln x$:

$$f(x) = \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $\ln x \rightarrow -\infty$ et

$$\frac{x}{\ln x} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1.$$

Comme $f(0) = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1.$$

La fonction f est donc continue à droite en 0.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Pour $x > 0$, divisons cette fois le numérateur et le dénominateur par x :

$$f(x) = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}}.$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.

4. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0

Le nombre dérivé à droite en 0, s'il existe, est

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Comme $f(0) = -1$,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 1}{x}.$$

Calculons $f(x) + 1$:

$$f(x) + 1 = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1 = \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x - \ln x} = \frac{2x}{x - \ln x}.$$

Ainsi,

$$\frac{f(x) + 1}{x} = \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \frac{2}{x - \ln x}.$$

Or, lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$x - \ln x \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0.$$

$$f'_d(0) = 0.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0. La courbe C_f possède au point $A_0(0, -1)$ une demi-tangente horizontale d'équation $y = -1$.

5. Montrer que $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$ pour $x > 0$

Posons

$$u(x) = x + \ln x, \quad v(x) = x - \ln x.$$

Alors

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Pour $x > 0$,

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

et

$$v'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

La formule de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{(1 + \frac{1}{x})(x - \ln x) - (x + \ln x)(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln x)^2}.$$

Mettons le numérateur sur le dénominateur commun x :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x - \ln x) - (x-1)(x + \ln x)}{x(x - \ln x)^2}.$$

Développons seulement le numérateur :

$$(x+1)(x - \ln x) = x^2 + x - x \ln x - \ln x,$$

$$(x-1)(x + \ln x) = x^2 - x + x \ln x - \ln x.$$

La différence vaut donc

$$\begin{aligned} & (x^2 + x - x \ln x - \ln x) \\ & - (x^2 - x + x \ln x - \ln x) \\ & = 2x - 2x \ln x \\ & = 2x(1 - \ln x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{2x(1 - \ln x)}{x(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}.$$

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}.$$

6. Dresser le tableau de variation de f

Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}.$$

Le dénominateur est un carré strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - \ln x$.

Réolvons

$$1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < e, \\ f'(e) = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > e. \end{cases}$$

Calculons la valeur au maximum :

$$f(e) = \frac{e + \ln e}{e - \ln e} = \frac{e + 1}{e - 1}.$$

Nous savons aussi que

$$f(0) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

D'où le tableau :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	-1	$\frac{e+1}{e-1}$	1

f est strictement croissante sur $[0, e]$, puis strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Son maximum est

$$f(e) = \frac{e+1}{e-1}.$$

7. Points d'intersection de C_f avec $\Delta : y = 1$

On cherche les x tels que

$$f(x) = 1.$$

Pour $x = 0$, $f(0) = -1 \neq 1$. On cherche donc $x > 0$:

$$\frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1.$$

Comme $x - \ln x > 0$, on peut multiplier par le dénominateur :

$$x + \ln x = x - \ln x.$$

Donc

$$2 \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1.$$

Alors $y = 1$.

$$C_f \cap \Delta = \{(1, 1)\}.$$

8. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $]\frac{1}{2}, 1[$

Couper l'axe des abscisses signifie avoir

$$f(x) = 0.$$

Pour $x > 0$, le dénominateur $x - \ln x$ est strictement positif. Donc

$$f(x) = 0 \iff x + \ln x = 0.$$

Posons

$$h(x) = x + \ln x \quad (x > 0).$$

La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$. Calculons aux bornes de l'intervalle demandé.

En $x = 1$,

$$h(1) = 1 + \ln 1 = 1 > 0.$$

En $x = \frac{1}{2}$,

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Avec $\ln 2 \simeq 0,7$,

$$h\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,5 - 0,7 = -0,2 < 0.$$

Ainsi,

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < h(1).$$

Par continuité de h , il existe donc au moins un réel $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que

$$h(\alpha) = 0.$$

De plus,

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0).$$

Donc h est strictement croissante : cette solution est unique.

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point

$$A(\alpha, 0) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Numériquement, pour faciliter la construction, $\alpha \approx 0,567$.

9. Construction de la courbe C_f

Rassemblons les informations obtenues :

- C_f passe par $(0, -1)$ et possède en ce point une demi-tangente horizontale $y = -1$;
- elle coupe l'axe des abscisses en $(\alpha, 0)$, avec $\alpha \approx 0,567$;
- elle coupe la droite $y = 1$ au point $(1, 1)$;
- elle est croissante jusqu'à $x = e \approx 2,7$;
- elle atteint en $x = e$ son maximum

$$f(e) = \frac{e+1}{e-1} \approx \frac{3,7}{1,7} \approx 2,18;$$

- elle est ensuite décroissante ;
- lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 1$, donc $y = 1$ est une asymptote horizontale.

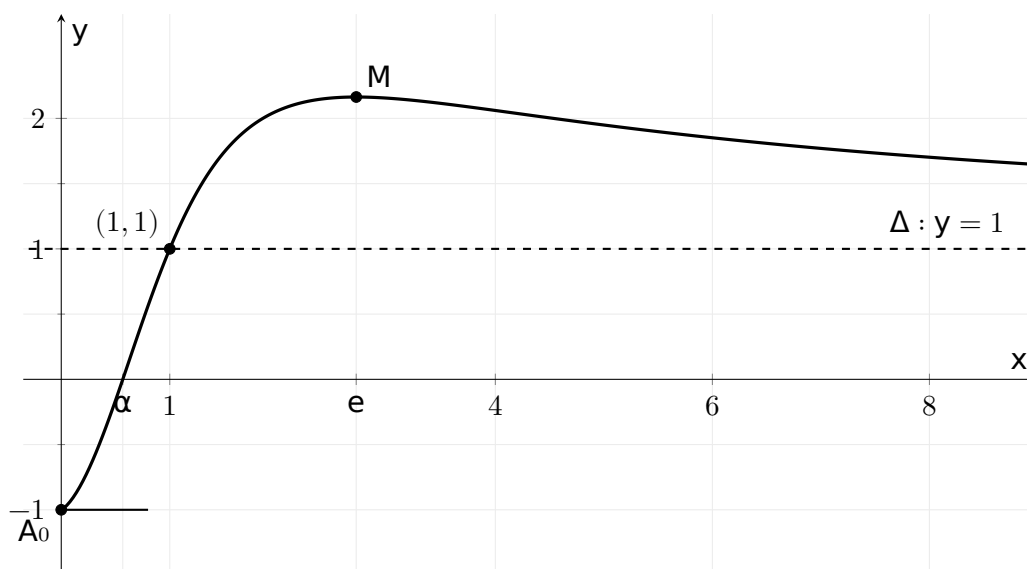
Pour préciser de quel côté de l'asymptote se trouve la courbe, calculons :

$$f(x) - 1 = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} - 1 = \frac{2 \ln x}{x - \ln x}.$$

Le dénominateur est positif. Donc le signe de $f(x) - 1$ est celui de $\ln x$. Ainsi :

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < 1, \quad x > 1 \Rightarrow f(x) > 1.$$

La courbe s'approche donc de l'asymptote $y = 1$ **par au-dessus** lorsque $x \rightarrow +\infty$.



Le tracé respecte toutes les informations précédentes : départ en $(0, -1)$ avec demi-tangente horizontale, passage par l'axe des abscisses entre $1/2$ et 1 , passage par $(1, 1)$, maximum en $x = e$, puis décroissance vers l'asymptote $y = 1$.

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Correction détaillée - Exercice 23

Deuxième année du baccalauréat - Sciences Mathématiques

On considère, sur $] -1, +\infty[$,

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

et

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Le logarithme $\ln(1+x)$ est défini exactement lorsque $1+x > 0$, c'est-à-dire lorsque $x > -1$.

1) Étude des fonctions f et g

a) Calcul des limites demandées

1. Limite de f lorsque $x \rightarrow -1^+$

Lorsque $x \rightarrow -1^+$, on a

$$1+x \rightarrow 0^+,$$

donc

$$\ln(1+x) \rightarrow -\infty.$$

En même temps,

$$-x \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Les deux derniers termes ont donc des limites finies. Ainsi, c'est le terme logarithmique qui impose la limite :

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

2. Limite de f lorsque $x \rightarrow +\infty$

On écrit

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x).$$

Regroupons d'abord les deux termes polynomiaux :

$$\frac{x^2}{2} - x = x \left(\frac{x}{2} - 1 \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{x}{2} - 1 \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{x^2}{2} - x \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$\ln(1+x) \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$f(x) \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Limite de g lorsque $x \rightarrow -1^+$

Lorsque $x \rightarrow -1^+$,

$$\ln(1+x) \rightarrow -\infty,$$

tandis que

$$-x \rightarrow 1, \quad \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad -\frac{x^3}{3} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Tous les termes sauf le logarithme ont une limite finie. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

b) Mise sous forme factorisée de $g(x)$, puis limite en $+\infty$

Partons de

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

On veut faire apparaître un facteur $1+x$. Pour le logarithme,

$$\ln(1+x) = (1+x) \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Pour la partie polynomiale,

$$-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = -\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Mettons l'expression entre parenthèses au même dénominateur :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{6x - 3x^2 + 2x^3}{6} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6}.$$

Puis

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6} = (1+x) \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)}.$$

Ainsi,

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} \right).$$

Passons à la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. On sait que

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \rightarrow 0.$$

D'autre part, effectuons la division du polynôme :

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{1+x} = 2x^2 - 5x + 11 - \frac{11}{1+x}.$$

Donc

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(1+x)} = \frac{1}{6} \left(2x^2 - 5x + 11 - \frac{11}{1+x} \right) \rightarrow +\infty.$$

Le contenu des parenthèses tend alors vers $-\infty$, tandis que $1+x \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

c) Variations de f et de g

Étude de f

Pour $x > -1$,

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

On dérive terme à terme :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x.$$

Mettons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x}.$$

Développons le numérateur :

$$1 - 1 - x + x + x^2 = x^2.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

Sur $] -1, +\infty[$, on a $1+x > 0$, et $x^2 \geq 0$. Donc

$$f'(x) \geq 0,$$

avec

$$f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

La fonction f est donc croissante sur tout $] -1, +\infty[$. De plus,

$$f(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0.$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Étude de g

On a

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Donc

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2.$$

Or les trois premiers termes sont précisément $f'(x)$, donc

$$g'(x) = \frac{x^2}{1+x} - x^2.$$

Factorisons x^2 :

$$g'(x) = x^2 \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right).$$

Puis

$$\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x}.$$

Ainsi,

$$g'(x) = -\frac{x^3}{1+x}.$$

Comme $1 + x > 0$ sur le domaine, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x^3$:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ g'(0) = 0, \\ g'(x) < 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Donc g est croissante sur $] -1, 0]$, puis décroissante sur $[0, +\infty[$. Enfin,

$$g(0) = 0.$$

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

2) Encadrement de $\ln(1 + x)$

Pour $x \geq 0$, la croissance de f et $f(0) = 0$ donnent

$$f(x) \geq 0.$$

Ainsi,

$$\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0,$$

d'où

$$\boxed{\ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}}.$$

Pour $x > 0$, on a même $f(x) > f(0) = 0$, donc

$$\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

De même, pour $x \leq 0$, la fonction g est décroissante à partir de 0 et $g(0) = 0$. Donc

$$g(x) \leq 0.$$

Ainsi,

$$\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq 0,$$

d'où

$$\boxed{\ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}.$$

Pour $x > 0$, l'inégalité est stricte.

Pour tout $x > 0$,

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

À $x = 0$, les trois expressions sont égales à 0. Ainsi, si l'intervalle contient 0, les signes corrects sont $\leq$ en ce point.

3) Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

Nous allons utiliser l'encadrement précédent, sans approximation de la fonction logarithme.

Pour $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Partons de l'inégalité de gauche :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

En soustrayant $\ln(1+x)$, puis en réorganisant,

$$x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}.$$

Partons maintenant de l'inégalité de droite :

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On obtient

$$x - \ln(1+x) > \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi,

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}.$$

Pour $x > 0$, on peut diviser par $x^2 > 0$:

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour compléter la limite bilatérale demandée, on peut traiter $x < 0$ directement par une intégrale. Pour $-1 < x < 0$,

$$x - \ln(1+x) = \int_0^x \frac{t}{1+t} dt.$$

En posant $t = xu$, on obtient

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \int_0^1 \frac{u}{1+xu} du.$$

Lorsque $x \rightarrow 0$, l'intégrande tend vers u , et sur un petit voisinage de 0 elle reste encadrée par une fonction constante fois u . On obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

4) Encadrement plus précis de $\ln(1+x)$

On veut montrer, pour $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

L'inégalité de droite a déjà été démontrée à la question 2. Il reste donc à prouver l'inégalité de gauche.

Définissons, pour $x > -1$,

$$h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

Nous cherchons à montrer que $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

Calculons sa dérivée :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3.$$

Mettons tout au même dénominateur $1+x$:

$$h'(x) = \frac{1 - (1+x)(1-x+x^2-x^3)}{1+x}.$$

Calculons le produit :

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3) = 1 - x + x^2 - x^3 + x - x^2 + x^3 - x^4 = 1 - x^4.$$

Donc

$$h'(x) = \frac{1 - (1-x^4)}{1+x} = \frac{x^4}{1+x}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{x^4}{1+x}.$$

Pour $x > 0$, on a

$$x^4 > 0 \quad \text{et} \quad 1+x > 0,$$

donc

$$h'(x) > 0.$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Or

$$h(0) = \ln 1 = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$h(x) > h(0) = 0.$$

Cela donne

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

En combinant cette inégalité avec celle obtenue à la question 2, on trouve finalement :

Pour tout $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Bilan

Question	Résultat principal
1.a	$\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} g = -\infty$
1.b	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
1.c	$f'(x) = \frac{x^2}{1+x}, g'(x) = -\frac{x^3}{1+x}$
2	$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x > 0$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
4	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x > 0$

EXERCICE 24 - FONCTION LOGARITHMIQUE

Correction détaillée - 2^e année Bac Sciences Mathématiques

On considère

$$f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

1. Ensemble de définition de f

Pour que $f(x)$ existe, il faut examiner séparément les deux expressions qui peuvent poser problème.

Première condition : le terme $\frac{3}{2x}$ impose

$$x \neq 0.$$

Deuxième condition : le logarithme $\ln u$ n'est défini que lorsque $u > 0$. Ici,

$$u = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

Une valeur absolue est strictement positive dès que son contenu est défini et non nul. Il faut donc :

$$x - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x + 1 \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$x \neq 1 \quad \text{et} \quad x \neq -1.$$

En réunissant toutes les exclusions :

$$x \neq -1, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1.$$

ou encore

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2. Montrer que le domaine d'étude est $D_E =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

L'idée est de chercher une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$.

Pour $x \in D_f$,

$$f(-x) = -x - 3 + \frac{3}{-2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right|.$$

Donc

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{-(x+1)} \right|.$$

Or

$$\left| \frac{1-x}{-(x+1)} \right| = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{1}{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}.$$

Ainsi,

$$\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

Par conséquent,

$$f(-x) = -x - 3 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

D'autre part,

$$-f(x) - 6 = -\left(x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) - 6,$$

d'où

$$-f(x) - 6 = -x - 3 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|.$$

Donc

$$f(-x) = -f(x) - 6.$$

Cette relation peut s'écrire

$$f(-x) + f(x) = -6 = 2(-3).$$

La courbe C_f admet donc le point

$$I(0, -3)$$

comme centre de symétrie.

Il suffit alors d'étudier la partie de la courbe correspondant à $x > 0$, puis d'obtenir la partie $x < 0$ par symétrie centrale de centre $I(0, -3)$.

$$D_E =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

3. Limites aux bornes de D_E

Les bornes du domaine d'étude sont 0^+ , 1^- , 1^+ et $+\infty$.

a) Limite lorsque $x \rightarrow 0^+$

On a

$$x - 3 \rightarrow -3, \quad \frac{3}{2x} \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow 1,$$

donc

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 = 0.$$

Le terme $\frac{3}{2x}$ entraîne donc la somme vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

b) Limite lorsque $x \rightarrow 1^-$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$,

$$x - 3 \rightarrow -2, \quad \frac{3}{2x} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

Sur $]0, 1[$,

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \frac{x+1}{1-x}.$$

Or

$$x + 1 \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad 1 - x \rightarrow 0^+,$$

donc

$$\frac{x+1}{1-x} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right) \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

c) Limite lorsque $x \rightarrow 1^+$

Sur $]1, +\infty[$,

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \frac{x+1}{x-1}.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^+$,

$$x+1 \rightarrow 2, \quad x-1 \rightarrow 0^+,$$

donc

$$\frac{x+1}{x-1} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty}.$$

d) Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$

On a

$$\frac{3}{2x} \rightarrow 0.$$

De plus,

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 1,$$

donc

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = x - 3 + \underbrace{\frac{3}{2x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}_{\rightarrow 0}.$$

Comme $x - 3 \rightarrow +\infty$,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

4. Variations de f sur D_E

Pour $x \in D_E$, on peut dériver

$$f(x) = x - 3 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} (\ln |x+1| - \ln |x-1|).$$

On obtient

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Calculons la parenthèse :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1 - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}.$$

Donc

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x^2-1}.$$

Réduisons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-1) - 3(x^2-1) - 2x^2}{2x^2(x^2-1)}.$$

Le numérateur vaut

$$2x^4 - 2x^2 - 3x^2 + 3 - 2x^2 = 2x^4 - 7x^2 + 3.$$

Or

$$2x^4 - 7x^2 + 3 = (x^2 - 3)(2x^2 - 1).$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)(2x^2 - 1)}{2x^2(x^2 - 1)}.$$

Les valeurs qui annulent le numérateur dans D_f sont

$$2x^2 - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$x^2 - 3 = 0 \iff x = \sqrt{3}.$$

a) Sur $]0, 1[$

Dans cet intervalle, $2x^2 > 0$ et $x^2 - 1 < 0$. De plus, $x^2 - 3 < 0$.

- Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $2x^2 - 1 < 0$. Le numérateur est donc positif, tandis que le dénominateur est négatif : $f'(x) < 0$.

- Si $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$, alors $2x^2 - 1 > 0$. Le numérateur est négatif et le dénominateur négatif : $f'(x) > 0$.

Ainsi, f décroît puis croît. Elle possède un minimum pour

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calculons sa valeur :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\right).$$

Les deux premiers termes contenant $\sqrt{2}$ donnent

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Et

$$\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - 3 + \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 0.710.$$

b) Sur $]1, +\infty[$

Ici, le dénominateur de $f'(x)$ est positif et $2x^2 - 1 > 0$.

- Pour $1 < x < \sqrt{3}$, on a $x^2 - 3 < 0$, donc $f'(x) < 0$.

- Pour $x > \sqrt{3}$, on a $x^2 - 3 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

La fonction décroît donc sur $]1, \sqrt{3}[$, puis croît sur $]\sqrt{3}, +\infty[$. Elle possède un minimum en $x = \sqrt{3}$.

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 3 + \frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\right).$$

Or

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Donc

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 0.257.$$

Tableaux de variations

x	0^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1^-
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\searrow \approx 0.710$	$\nearrow +\infty$

x	1^+	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\searrow \approx 0.257$	$\nearrow +\infty$

5. Branches infinies de C_f

a) Au voisinage de $x = 0$

Nous avons montré que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Ainsi, dans la partie étudiée, la droite

$$x = 0$$

est une asymptote verticale à C_f .

b) Au voisinage de $x = 1$

Nous avons obtenu

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Donc

$$x = 1$$

est une asymptote verticale.

c) Lorsque $x \rightarrow +\infty$

Cherchons une asymptote oblique. Calculons

$$f(x) - (x - 3) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

car $x > 1$ au voisinage de $+\infty$.

Or

$$\frac{3}{2x} \rightarrow 0$$

et

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0.$$

Par conséquent, la droite

$$\Delta : y = x - 3$$

est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

Pour connaître la position de la courbe par rapport à Δ , pour $x > 1$:

$$\frac{3}{2x} > 0$$

et

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \implies \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0.$$

Donc

$$f(x) - (x - 3) > 0.$$

Ainsi, pour $x > 1$, la courbe est située **au-dessus** de l'asymptote Δ .

Les branches infinies sur le domaine d'étude sont :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad \Delta : y = x - 3.$$

En $+\infty$, C_f approche Δ par au-dessus.

6. Construction de la courbe C_f dans D_E

Pour construire la courbe, on utilise toutes les informations précédentes :

- asymptote verticale $x = 0$;
- asymptote verticale $x = 1$;
- asymptote oblique $y = x - 3$ en $+\infty$;
- sur $]0, 1[$, la courbe descend de $+\infty$, atteint un minimum en

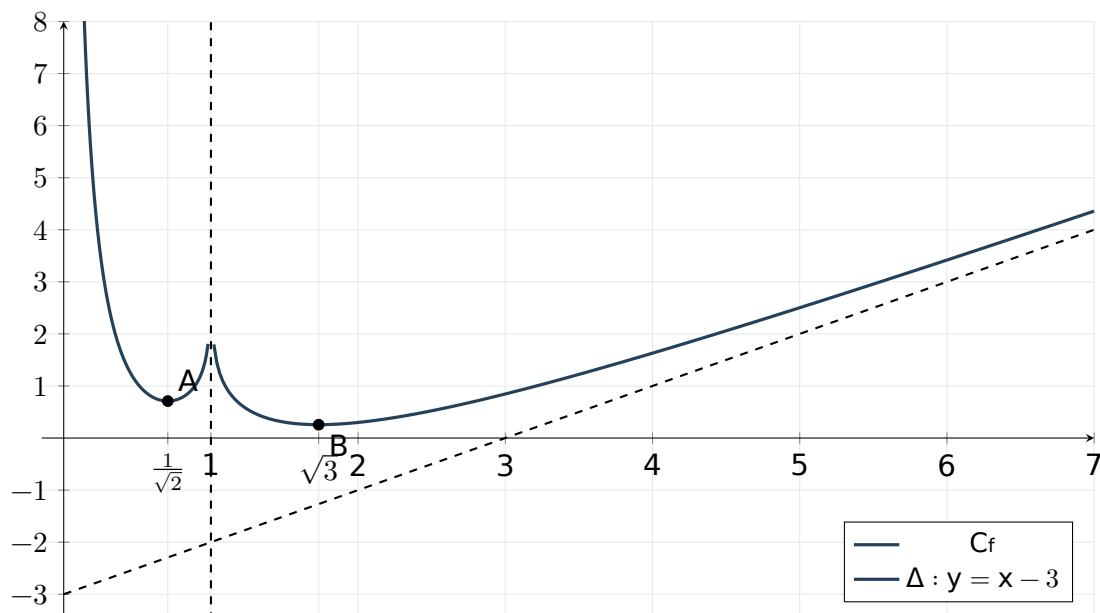
$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx (0.707, 0.710),$$

puis remonte vers $+\infty$;

- sur $]1, +\infty[$, elle descend de $+\infty$, atteint un minimum en

$$B(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \approx (1.732, 0.257),$$

puis remonte vers $+\infty$ en se rapprochant de $y = x - 3$.



Remarque pour obtenir toute la courbe. La partie correspondant à $x < 0$ s'obtient par la symétrie centrale de centre $I(0, -3)$, puisque $f(-x) = -f(x) - 6$.

EXERCICE 25

Logarithmes de bases variables - Correction détaillée

Rappels. Le logarithme $\log_a(b)$ existe lorsque

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées,

$$\log_a(b) = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

En particulier, pour $a, b > 0$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 1$,

$$\log_a(b) \log_b(a) = 1.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x).$$

Étape 1 : déterminer les conditions d'existence

Pour $\log_x(x+1)$, il faut :

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad x+1 > 0.$$

Pour $\log_{x+1}(x)$, il faut :

$$x+1 > 0, \quad x+1 \neq 1, \quad x > 0.$$

Si $x > 0$, alors $x+1 > 1$, donc $x+1 > 0$ et $x+1 \neq 1$ sont automatiquement vérifiées.

Il reste donc

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

Ainsi, le domaine sur lequel l'équation a un sens est

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Étape 2 : utiliser la formule de changement de base

Sur D ,

$$\log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

et

$$\log_{x+1}(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}.$$

L'équation devient donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}.$$

Comme $x \neq 1$, on a $\ln x \neq 0$. De plus, $x > 0$ implique $x+1 > 1$, donc $\ln(x+1) > 0$ et en particulier $\ln(x+1) \neq 0$.

On peut donc multiplier les deux membres par $\ln x \ln(x+1)$:

$$(\ln(x+1))^2 = (\ln x)^2.$$

Étape 3 : résoudre l'égalité de deux carrés

L'égalité $A^2 = B^2$ équivaut à

$$A = B \quad \text{ou} \quad A = -B.$$

On obtient donc deux cas.

Premier cas :

$$\ln(x+1) = \ln x.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, elle est injective. Ainsi,

$$x+1 = x,$$

ce qui donnerait $1 = 0$. C'est impossible.

Deuxième cas :

$$\ln(x+1) = -\ln x.$$

On fait passer $\ln x$ à gauche :

$$\ln(x+1) + \ln x = 0.$$

Comme $x > 0$ et $x+1 > 0$,

$$\ln(x(x+1)) = 0.$$

Or

$$\ln 1 = 0,$$

donc

$$x(x+1) = 1.$$

Ainsi,

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5.$$

Les deux solutions de cette équation du second degré sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Mais x doit être strictement positif. Or

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0.$$

Cette valeur est donc rejetée. En revanche,

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} > 0$$

et cette valeur est différente de 1.

La solution de l'équation est

$$S_1 = \left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right\}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\log_2(x) > \log_x(2).$$

Étape 1 : déterminer le domaine

Le logarithme $\log_2(x)$ existe lorsque

$$x > 0.$$

Le logarithme $\log_x(2)$ existe lorsque la base x vérifie

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

Par conséquent,

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Étape 2 : écrire les logarithmes avec $\ln$

On a

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

et

$$\log_x(2) = \frac{\ln 2}{\ln x}.$$

L'inéquation devient

$$\frac{\ln x}{\ln 2} > \frac{\ln 2}{\ln x}.$$

Il faut ici être prudent : le signe de $\ln x$ dépend de x . On ne multiplie donc pas directement par $\ln x$ sans étudier son signe.

Posons

$$t = \frac{\ln x}{\ln 2} = \log_2(x).$$

Comme $x \neq 1$, on a $t \neq 0$. De plus,

$$\frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{1}{t}.$$

L'inéquation est donc équivalente à

$$t > \frac{1}{t}, \quad t \neq 0.$$

Étape 3 : résoudre l'inéquation en t

On regroupe tout dans le membre de gauche :

$$t - \frac{1}{t} > 0.$$

En mettant au même dénominateur,

$$\frac{t^2 - 1}{t} > 0.$$

Puis

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0.$$

Les valeurs importantes sont donc

$$-1, \quad 0, \quad 1.$$

Intervalle	$] - \infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$	$] 0, 1[$	$] 1, +\infty[$
Signe	-	0	+	-	+

On cherche les intervalles où le quotient est strictement positif. On obtient

$$-1 < t < 0 \quad \text{ou} \quad t > 1.$$

Donc

$$t \in] -1, 0[\cup] 1, +\infty[.$$

Étape 4 : revenir à x

Rappelons que

$$t = \log_2(x).$$

Comme la base 2 est supérieure à 1, la fonction $x \mapsto \log_2(x)$ est strictement croissante.

Premier intervalle :

$$-1 < \log_2(x) < 0.$$

Or

$$-1 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad 0 = \log_2(1).$$

Par croissance de $\log_2$,

$$\frac{1}{2} < x < 1.$$

Deuxième intervalle :

$$\log_2(x) > 1.$$

Or

$$1 = \log_2(2).$$

Toujours par croissance de $\log_2$,

$$x > 2.$$

Les bornes $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$ ne sont pas retenues car l'inégalité est stricte. La valeur $x = 1$ est de toute façon interdite comme base d'un logarithme.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S_2 = \left] \frac{1}{2}, 1[\cup] 2, +\infty[.$$

Bilan final

$$\log_x(x+1) = \log_{x+1}(x) \iff x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\log_2(x) > \log_x(2) \iff x \in \left] \frac{1}{2}, 1[\cup] 2, +\infty[$$

EXERCICE 26 - CORRECTION DÉTAILLÉE

$$\text{Fonction } f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

2^e année Baccalauréat - Sciences Mathématiques

Objectif. Étudier complètement la fonction $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$, puis construire dans le même repère sa courbe et celle de sa fonction réciproque.

1. Ensemble de définition

Pour que $f(x)$ existe, il faut d'abord que $\ln x$ existe :

$$x > 0.$$

Il faut ensuite que le nombre sous la racine soit positif ou nul :

$$1 - \ln x \geq 0.$$

Donc

$$1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1.$$

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

$$\ln x \leq 1 = \ln e \iff x \leq e.$$

Les deux conditions donnent

$$D_f =]0, e].$$

2. Résoudre $f(x) = 1$

On cherche $x \in]0, e]$ tel que

$$\sqrt{1 - \ln x} = 1.$$

Les deux membres sont positifs ou nuls, donc on peut élever au carré :

$$1 - \ln x = 1 \iff \ln x = 0 \iff x = 1.$$

Comme $1 \in D_f$, cette solution est admissible.

$$S = \{1\}.$$

3. Résoudre $f(x) \leq 1$

Pour $x \in D_f$,

$$\sqrt{1 - \ln x} \leq 1.$$

Les deux membres étant positifs ou nuls,

$$1 - \ln x \leq 1 \iff \ln x \geq 0.$$

Puisque $\ln$ est croissante,

$$\ln x \geq \ln 1 \iff x \geq 1.$$

En tenant compte de $x \leq e$,

$$S = [1, e].$$

4. Dérivabilité à gauche de e

On a

$$f(e) = \sqrt{1 - \ln e} = 0.$$

Le taux d'accroissement à gauche de e est

$$\frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x - e}, \quad x < e.$$

Pour étudier sa limite sans approximation, posons

$$u = \frac{e - x}{x} > 0.$$

Lorsque $x \rightarrow e^-$, on a $u \rightarrow 0^+$, et

$$\frac{e}{x} = 1 + u.$$

D'autre part,

$$1 - \ln x = \ln e - \ln x = \ln\left(\frac{e}{x}\right) = \ln(1 + u),$$

et

$$x - e = -(e - x) = -xu.$$

Ainsi,

$$\frac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\frac{\sqrt{\ln(1 + u)}}{xu} = -\frac{1}{x\sqrt{u}} \sqrt{\frac{\ln(1 + u)}{u}}.$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1, \quad x \rightarrow e, \quad \sqrt{u} \rightarrow 0^+.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\infty.$$

La limite n'est pas finie : f n'est donc pas dérivable à gauche de e au sens usuel.

La courbe C_f possède en $E(e, 0)$ une **demi-tangente verticale** d'équation

$$x = e.$$

5. Variations et bijection

Sur $]0, e[$, on a $1 - \ln x > 0$, donc f est dérivable. Avec

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x},$$

la dérivation donne

$$f'(x) = \frac{-1/x}{2\sqrt{1 - \ln x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{1 - \ln x}}.$$

Pour $x \in]0, e[$, le dénominateur est strictement positif. Donc

$$f'(x) < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0, e[$.

À gauche du domaine,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

À droite,

$$f(e) = 0.$$

x	0	e
$f(x)$	$+\infty$	0

Comme f est continue et strictement décroissante, ses valeurs parcourent exactement $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection

$$f :]0, e] \longrightarrow [0, +\infty[.$$

Ainsi, l'intervalle demandé est

$$J = [0, +\infty[.$$

Expression de la fonction réciproque

Pour préparer la construction, déterminons f^{-1} . Posons

$$y = f(x) = \sqrt{1 - \ln x}.$$

Comme $y \geq 0$,

$$y^2 = 1 - \ln x.$$

Donc

$$\ln x = 1 - y^2$$

puis

$$x = e^{1-y^2}.$$

En échangeant x et y ,

$$f^{-1}(x) = e^{1-x^2}, \quad x \in [0, +\infty[.$$

6. Construction de C_f et $C_{f^{-1}}$

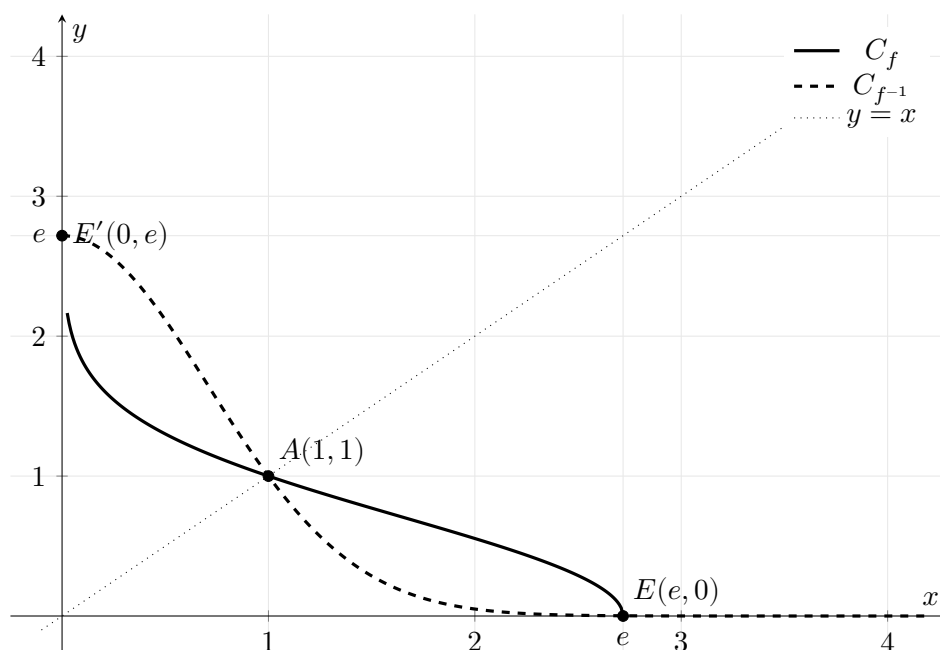
Pour construire C_f , retenons les éléments suivants :

- $D_f =]0, e]$;
- f est strictement décroissante ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: la droite $x = 0$ est une asymptote verticale ;
- $f(1) = 1$, donc $A(1, 1) \in C_f$;
- $f(e) = 0$, donc $E(e, 0) \in C_f$;
- en E , la courbe possède la demi-tangente verticale $x = e$.

Puisque f est bijective, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite

$$y = x.$$

Ainsi, $A(1, 1)$ reste fixe, tandis que $E(e, 0)$ devient $E'(0, e)$.



Conclusion graphique : $C_{f^{-1}}$ est exactement l'image de C_f par la symétrie d'axe $y = x$, avec

$$f^{-1}(x) = e^{1-x^2} \quad (x \geq 0).$$

Bilan

Question	Résultat
Domaine	$D_f =]0, e]$
$f(x) = 1$	$x = 1$
$f(x) \leq 1$	$x \in [1, e]$
À gauche de e	taux d'accroissement $\rightarrow -\infty$, demi-tangente verticale $x = e$
Variations	strictement décroissante de $+\infty$ vers 0
Bijection	$f :]0, e] \rightarrow [0, +\infty[$
Réciproque	$f^{-1}(x) = e^{1-x^2}, x \geq 0$
Courbes	symétriques par rapport à $y = x$

EXERCICE 27 - FONCTION LOGARITHMIQUE

Correction détaillée - 2^e année Bac Sciences Mathématiques

On considère

$$g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

1. Ensemble de définition de g

Pour que $g(x)$ existe, deux conditions doivent être satisfaites :

$$x \neq 0$$

à cause de la fraction $1/x$, et l'argument du logarithme doit être strictement positif :

$$1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Mettons cette expression sous une seule fraction :

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

Il faut donc résoudre

$$\frac{x+1}{x} > 0.$$

Les valeurs importantes sont $x = -1$ et $x = 0$. Étudions le signe :

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, +\infty[$
$x+1$	-	0	+	+	+
x	-	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	non défini	+

Ainsi,

$$\frac{x+1}{x} > 0 \iff x < -1 \text{ ou } x > 0.$$

$$D_g =] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$$

2. Prolongement par continuité en 0

a) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0

Au voisinage de 0, la fonction n'est définie que pour $x > 0$. Nous devons donc calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Posons

$$t = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $t \rightarrow +\infty$, et

$$x = \frac{1}{t}.$$

Alors

$$g(x) = \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

On sait que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

Pour prolonger g par continuité en 0 , il suffit donc de définir une nouvelle fonction, encore notée g , par

$$g(0) = 0.$$

Le prolongement continu en 0 est donné par

$$g(0) = 0.$$

Son domaine devient

$$]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[.$$

b) Dérivabilité en 0 et interprétation géométrique

On étudie la dérivabilité à droite puisque le prolongement n'est défini près de 0 que pour $x \geq 0$.

Le taux d'accroissement en 0 est

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Comme $g(0) = 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \quad 1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = +\infty.$$

La limite n'est pas un nombre réel fini : g n'est donc pas dérivable à droite en 0 au sens usuel.

La courbe du prolongement passe par

$$O(0, 0)$$

et possède en ce point une **demi-tangente verticale**, d'équation

$$x = 0.$$

3. Limites en $+\infty$ et en -1 à gauche

Limite en $+\infty$

On écrit

$$g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$$

Posons

$$u = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$. Donc

$$g(x) = \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Or la limite fondamentale

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}.$$

Limite en -1 à gauche

Lorsque $x \rightarrow -1^-$,

$$x+1 \rightarrow 0^-, \quad x \rightarrow -1^-.$$

Ainsi,

$$\frac{x+1}{x} \rightarrow 0^+.$$

Or

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

donc

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow -\infty.$$

En même temps,

$$x \rightarrow -1.$$

Le produit d'un nombre tendant vers -1 par une quantité tendant vers $-\infty$ tend vers $+\infty$.
Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty}.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}$$

et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty}.$$

4. Dérivée et variations de g

Pour $x \in D_g$,

$$g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

C'est un produit. On utilise

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Posons

$$u(x) = x, \quad v(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Alors

$$u'(x) = 1.$$

Pour dériver v , posons

$$w(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

On a

$$w'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc

$$v'(x) = \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Comme

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},$$

on obtient

$$v'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}.$$

Par conséquent,

$$g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right),$$

d'où

$$\boxed{g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}}.$$

Signe de $g'(x)$

Nous allons utiliser l'inégalité

$$\ln(1+t) > \frac{t}{1+t} \quad \text{pour } t > -1, t \neq 0.$$

Ici,

$$t = \frac{1}{x}.$$

Pour $x \in D_g$, on a $t > -1$ et $t \neq 0$. Ainsi,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Simplifions le membre de droite :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{g'(x) > 0 \quad \text{sur } D_g}.$$

La fonction est donc strictement croissante sur chacun des intervalles

$$]-\infty, -1[\quad \text{et} \quad]0, +\infty[.$$

Pour compléter le tableau, il faut aussi connaître la limite en $-\infty$. On écrit

$$g(x) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

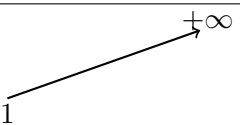
$$\frac{1}{x} \rightarrow 0^-,$$

et la même limite fondamentale donne

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1.$$

Pour le prolongement,

$$g(0) = 0.$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+			+
$g(x)$			$\emptyset$	

g est strictement croissante sur $] - \infty, -1[$ et sur $[0, +\infty[$ pour son prolongement continu.

5. Branches infinies de C_g

Au voisinage de $x = -1$

Nous avons obtenu

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty.$$

Donc la droite

$$x = -1$$

est une asymptote verticale à C_g .

Lorsque $x \rightarrow +\infty$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1,$$

la droite

$$y = 1$$

est une asymptote horizontale à droite.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$

Nous avons également montré

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1.$$

La même droite

$$y = 1$$

est donc une asymptote horizontale à gauche.

Position de C_g par rapport à $y = 1$

Pour $u > -1$, $u \neq 0$, on sait que

$$\ln(1 + u) < u.$$

Avec

$$u = \frac{1}{x},$$

on obtient

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Si $x > 0$, la multiplication par x conserve le sens :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1.$$

Donc

$$g(x) < 1 \quad (x > 0).$$

Si $x < -1$, alors $x < 0$. La multiplication par x inverse le sens :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 1.$$

Donc

$$g(x) > 1 \quad (x < -1).$$

Ainsi, la branche de gauche est au-dessus de $y = 1$, tandis que la branche de droite est au-dessous de $y = 1$.

Les asymptotes de C_g sont

$$x = -1$$

et

$$y = 1.$$

6. Construction de la courbe C_g

Les informations nécessaires sont maintenant réunies :

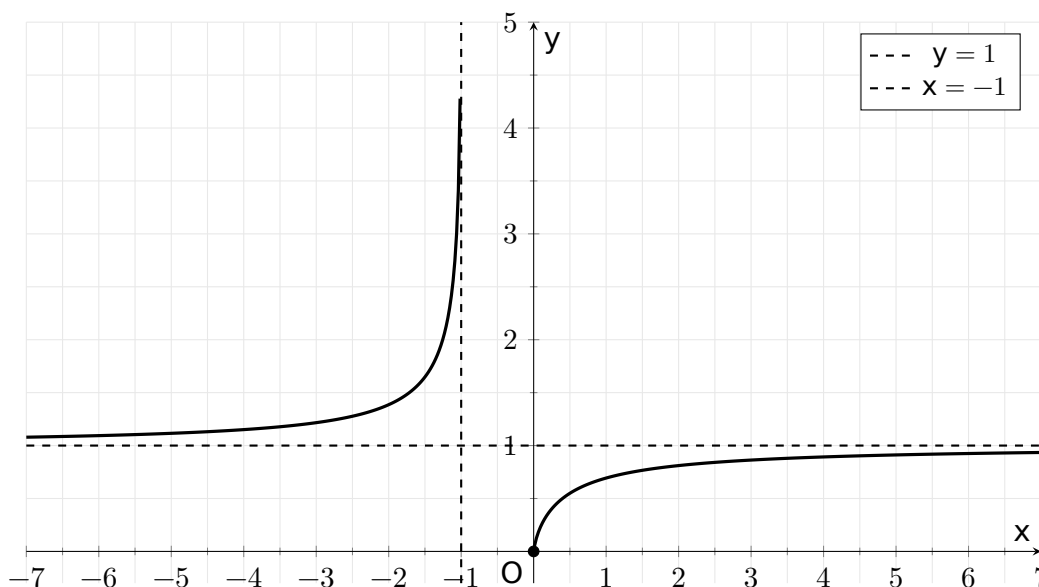
- $D_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, et le prolongement vérifie $g(0) = 0$;
- g est croissante sur chacune de ses deux branches;
- $x = -1$ est une asymptote verticale;
- $y = 1$ est une asymptote horizontale aux deux infinis;
- la branche gauche est au-dessus de $y = 1$;
- la branche droite est au-dessous de $y = 1$;
- le prolongement passe par $O(0,0)$ et possède en O une demi-tangente verticale.

Quelques points utiles :

$$g(1) = \ln 2 \approx 0.693,$$

$$g(2) = 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \approx 0.811,$$

$$g(-2) = -2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 \approx 1.386.$$



La figure respecte toutes les informations obtenues par l'étude : deux branches croissantes, asymptote verticale $x = -1$, asymptote horizontale $y = 1$, et demi-tangente verticale en $O(0,0)$ pour le prolongement.