

Fonctions logarithmes

Série d'exercices – Énoncés

Exercice 1

- 1) montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
- 2) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.
 - a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n - \frac{1}{n} \leq \ln 2 \leq U_n - \frac{1}{2n}$.
 - b) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
- 3) on pose $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$ et $y_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1)$ pour tout entier naturel non nul n .
 - a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n \leq x_n$.
 - b) montrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - 2 \arctan x$.

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.
- 2) calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations.
- 3) a) prouver que l'équation $f(x) = 2n$ admet une unique solution notée a_n .
 b) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad e^{2n} < a_n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- 4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \ln \left(\frac{a_n}{e^{2n}} \right) = 2 \arctan(a_n)$ en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{e^{2n}} = e^\pi$.
- 5) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \ln \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = 2(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1)$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Exercice 3

Soit a un réel de $\mathbb{R}_+^*$.

on considère la suite $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a+k}$ et la fonction $f(x) = \ln(x+a)$.

- 1) montrer que $(\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \quad \frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{a+k}$.
- 2) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right) \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right)$.
- 3) déterminer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} + \ln(x+1)$.

- 1) a) montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- b) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ donner une interprétation géométrique du résultats.
- 2) tracer la courbe de la fonction f .
- 3) soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère l'équation $(E_n) \quad nf(x) = 1$.
 - a) montrer que (E_n) admet une unique solution x_n .
 - b) montrer que f admet une réciproque f^{-1} et dresser le tableau des variations de f^{-1} .
 - c) déduire la monotonie de la suite $(x_n)_n$ puis déterminer sa limite.

4) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{\ln x}{n} - \frac{1}{x^n}$.

1) étudier le sens de variation de f_n et donner le tableau des variations.

2) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n .

3) a) prouver que $(\forall n \geq 2) \quad \sqrt[n]{e} < u_n$.

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x \geq x + 1$ en déduire que $(\forall n \geq 2) \quad u_n < e$.

4) a) prouver que $f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln u_n}{(n+1)u_n} \left(u_n - 1 - \frac{1}{n}\right)$ et déduire que $f_{n+1}(u_n) > 0$.

b) montrer que $(u_n)_n$ est décroissante et convergente.

5) on pose $V_n = \ln u_n$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

a) vérifier que $(\forall n \geq 2) \quad nV_n = \ln \left(\frac{n}{V_n}\right)$.

b) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad \frac{\ln n}{n} < V_n < 2 \frac{\ln n}{n}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 6

Soit n un entier de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. on considère la fonction $f_n(x) = -x^2 + 2 + n \ln x$.

1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$.

2) calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau des variations de f_n .

3) a) on pose $g(x) = x \ln x - x + 2$.

(i) calculer $g'(x)$ puis donner le tableau des variations de g .

(ii) en déduire que $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$.

b) vérifier que $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions U_n et V_n .
(on prend $U_n < V_n$)

c) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$.

4) a) prouver que $(\forall n \geq 2) \quad U_n < 1$.

b) vérifier que $f_{n+1}(U_n) = \ln(U_n)$ puis déduire que $(U_n)_{n \geq 3}$ est croissante.

c) déterminer $\ln U_n$ en fonction de n et U_n et montrer que $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{2}{n} \leq \ln U_n \leq -\frac{1}{n}$
puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Correction détaillée – Exercice 1

Fonctions logarithmes et suites adjacentes

Énoncé

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

2. On considère la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

a) Montrer que $U_n - \frac{1}{n} \leq \ln 2 \leq U_n - \frac{1}{2n}$. b) En déduire la convergence et la limite de (U_n) .

3. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n, \quad y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

a) Montrer que $y_n \leq x_n$. b) Montrer que (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

1. Encadrer une différence de logarithmes

Idée : utiliser le théorème des accroissements finis, car la dérivée de $\ln$ est très simple.

Fixons un entier $k \geq 1$. La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, car $k > 0$. Le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln k = f'(c)((k+1) - k) = \frac{1}{c}.$$

Or $k < c < k+1$, et tous ces nombres sont positifs. Lorsque l'on prend les inverses de nombres strictement positifs, le sens des inégalités s'inverse :

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}.$$

On obtient donc, en particulier,

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

À retenir : le logarithme transforme un produit en somme et, surtout ici, les différences successives $\ln(k+1) - \ln k$ se simplifient lorsqu'on les additionne.

2. Étude de la suite U_n

a) Encadrer $\ln 2$

Pour tout entier $k \geq 1$, la question 1 fournit

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Additionnons ces inégalités pour $k = n, n+1, \dots, 2n-1$:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} (\ln(k+1) - \ln k) \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

Calcul de la somme centrale. En développant, les termes intermédiaires se compensent :

$$\begin{aligned} & (\ln(n+1) - \ln n) + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + \dots \\ & + (\ln(2n) - \ln(2n-1)) = \ln(2n) - \ln n = \ln \frac{2n}{n} = \ln 2. \end{aligned}$$

Calcul de la somme de gauche. En posant $j = k+1$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \underbrace{\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}}_{U_n} - \frac{1}{n} = U_n - \frac{1}{n}.$$

Calcul de la somme de droite. Il manque le dernier terme $1/(2n)$ de U_n :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}_{U_n} - \frac{1}{2n} = U_n - \frac{1}{2n}.$$

En réunissant les trois calculs, nous obtenons exactement

$$\forall n \geq 1, \quad U_n - \frac{1}{n} \leq \ln 2 \leq U_n - \frac{1}{2n}.$$

Vérification rapide pour $n = 1$. $U_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. L'encadrement devient $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$, ce qui est cohérent.

b) Convergence et limite

Nous voulons encadrer U_n lui-même. À partir de l'encadrement précédent, ajoutons $1/(2n)$ à l'inégalité de droite, puis $1/n$ à celle de gauche :

$$\ln 2 + \frac{1}{2n} \leq U_n \leq \ln 2 + \frac{1}{n}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Les deux bornes convergent donc vers $\ln 2$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2.$$

Remarque utile : l'encadrement donne aussi une estimation de l'erreur :

$$\frac{1}{2n} \leq U_n - \ln 2 \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi U_n approche $\ln 2$ par valeurs supérieures.

3. Deux suites adjacentes

Notons, pour simplifier les écritures,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n = H_n - \ln n$ et $y_n = H_n - \ln(n+1)$.

a) Comparer y_n et x_n

Soustrayons les deux expressions :

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= (H_n - \ln n) - (H_n - \ln(n+1)) \\ &= \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Comme $n+1 > n > 0$ et que $\ln$ est croissante,

$$\ln(n+1) > \ln n, \quad \text{donc} \quad x_n - y_n > 0.$$

$$\forall n \geq 1, \quad y_n \leq x_n.$$

b) Montrer que les suites sont adjacentes

Définition. Deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante, et que leur différence tend vers zéro. Nous allons vérifier ces trois propriétés.

Étape 1 : (x_n) est décroissante. Calculons la différence entre deux termes successifs. Comme $H_{n+1} = H_n + 1/(n+1)$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \right) - (H_n - \ln n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n). \end{aligned}$$

La première inégalité de la question 1, appliquée à $k = n$, donne

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n.$$

Par soustraction, $x_{n+1} - x_n \leq 0$. Ainsi

$$(x_n) \text{ est décroissante.}$$

Étape 2 : (y_n) est croissante. Calculons de la même manière :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) \right) - (H_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)). \end{aligned}$$

Appliquons la deuxième inégalité de la question 1 avec $k = n + 1$:

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'où $y_{n+1} - y_n \geq 0$ et donc

$$(y_n) \text{ est croissante.}$$

Étape 3 : leur écart tend vers zéro. Nous avons déjà obtenu

$$x_n - y_n = \ln(n+1) - \ln n.$$

En appliquant une dernière fois la question 1 avec $k = n$,

$$0 \leq x_n - y_n \leq \frac{1}{n}.$$

Puisque $1/n \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Conclusion. La suite (x_n) est décroissante, (y_n) est croissante, et leur différence tend vers zéro. Par définition,

$$(x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Elles convergent donc vers une même limite réelle, que l'on peut noter γ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \gamma.$$

Cette limite est appelée *constante d'Euler-Mascheroni*. Il n'est pas nécessaire de connaître sa valeur pour répondre à l'exercice.

Bilan des méthodes

1. Pour encadrer $\ln(k+1) - \ln k$, penser à la dérivée $1/x$ et au théorème des accroissements finis.
2. Lorsqu'une somme contient des différences successives, chercher une *somme télescopique* : presque tous les termes disparaissent.
3. Pour déterminer une limite, isoler la suite entre deux expressions ayant la même limite.
4. Pour prouver que deux suites sont adjacentes, calculer $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$ et $x_n - y_n$.

Exercice 2 — Logarithme et arctangente

Correction complète et détaillée

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 \arctan x.$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- 2) Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 3) a) Montrer que $f(x) = 2n$ admet une unique solution a_n .
b) Vérifier que $e^{2n} < a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- 4) Montrer que $\ln\left(\frac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2 \arctan(a_n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{e^{2n}}$.
- 5) Montrer que $\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

1. Limites aux bornes du domaine

Nous utilisons les limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, le terme $-2 \arctan x$ tend vers 0 ; il ne change donc pas la limite infinie de $\ln x$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $-2 \arctan x \rightarrow -\pi$, nombre fini. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Idée à retenir : ajouter une quantité qui tend vers une valeur finie ne modifie pas une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$.

2. Dérivée et variations

Pour $x > 0$, les formules de dérivation sont

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'où

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x^2}.$$

Réduisons au même dénominateur, strictement positif car $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} - \frac{2x}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x(1+x^2)} = \boxed{\frac{(x-1)^2}{x(1+x^2)}}. \end{aligned}$$

Le numérateur est un carré : $(x-1)^2 \geq 0$; il est nul uniquement pour $x = 1$. Le dénominateur est strictement positif. Ainsi,

$$f'(x) > 0 \quad \text{si } x \neq 1, \quad f'(1) = 0.$$

La fonction est donc **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$: le fait que la dérivée s'annule en un point isolé ne crée pas de palier. Calculons la valeur au point particulier :

$$f(1) = \ln 1 - 2 \arctan 1 = 0 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

Conclusion : f est continue et strictement croissante de $-\infty$ vers $+\infty$ sur $]0, +\infty[$.

3. Existence de a_n , inégalité et limite

a) Existence et unicité

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $2n$ est un réel fixé. Comme f est continue sur $]0, +\infty[$ et que ses limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe au moins un $a_n > 0$ tel que

$$f(a_n) = 2n.$$

De plus, f est strictement croissante, donc deux nombres distincts ne peuvent pas avoir la même image. La solution est donc unique.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un **unique** $a_n > 0$ tel que $\boxed{\ln a_n - 2 \arctan(a_n) = 2n}$.

b) Comparaison avec e^{2n} et limite

Partons de l'égalité définissant a_n :

$$\ln a_n - 2 \arctan(a_n) = 2n.$$

Isolons le logarithme :

$$\ln a_n = 2n + 2 \arctan(a_n).$$

Puisque $a_n > 0$, on sait que $0 < \arctan(a_n) < \frac{\pi}{2}$. Ainsi $2 \arctan(a_n) > 0$ et

$$\ln a_n > 2n = \ln(e^{2n}).$$

La fonction **exponentielle** est strictement croissante, d'où
logarithmique

$$\boxed{a_n > e^{2n}}.$$

Or $e^{2n} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme a_n est toujours plus grand, le théorème de comparaison donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty}.$$

Astuce : pour obtenir une minoration de a_n , il suffit d'isoler $\ln a_n$ et d'utiliser la positivité de $\arctan(a_n)$.

4. Limite du quotient a_n/e^{2n}

Repartons de $\ln a_n - 2 \arctan(a_n) = 2n$. En déplaçant $2n$,

$$\ln a_n - 2n = 2 \arctan(a_n).$$

Mais $2n = \ln(e^{2n})$. Par la propriété $\ln u - \ln v = \ln(u/v)$ pour $u, v > 0$,

$$\boxed{\ln\left(\frac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2 \arctan(a_n)}.$$

D'après la question 3, $a_n \rightarrow +\infty$. Par continuité de l'arctangente et sa limite usuelle,

$$\arctan(a_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad 2 \arctan(a_n) \rightarrow \pi.$$

En appliquant l'exponentielle à l'égalité précédente,

$$\frac{a_n}{e^{2n}} = \exp(2 \arctan(a_n)).$$

La fonction exponentielle est continue ; on peut donc passer à la limite :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{e^{2n}} = e^\pi}.$$

Interprétation : pour les grands indices, a_n est proche de $e^\pi e^{2n} = e^{2n+\pi}$, au sens où leur quotient tend vers 1.

5. Limite du quotient de deux termes consécutifs

Écrivons la relation définissant a_n puis celle définissant a_{n+1} :

$$\begin{aligned} \ln a_n - 2 \arctan(a_n) &= 2n, \\ \ln a_{n+1} - 2 \arctan(a_{n+1}) &= 2(n+1) = 2n+2. \end{aligned}$$

Idée la plus directe : soustraire les deux égalités. La première moins la seconde donne

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_{n+1} - 2 \arctan(a_n) + 2 \arctan(a_{n+1}) \\ = 2n - (2n+2) = -2. \end{aligned}$$

En regroupant,

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = 2 \arctan(a_n) - 2 \arctan(a_{n+1}) - 2.$$

On utilise $\ln u - \ln v = \ln(u/v)$ et on factorise par 2 :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1)}.$$

Comme $a_n \rightarrow +\infty$, la suite décalée a_{n+1} tend aussi vers $+\infty$. Ainsi

$$\arctan(a_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \arctan(a_{n+1}) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Par différence,

$$2(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1) \rightarrow 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 1\right) = -2.$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-2}.$$

Vérification intuitive : puisque a_n se comporte comme $e^{2n+\pi}$, le quotient de deux termes consécutifs se comporte comme $e^{2n+\pi}/e^{2(n+1)+\pi} = e^{-2}$.

Bilan des résultats

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \\ f'(x) &= \frac{(x-1)^2}{x(1+x^2)} \geq 0, & f &\text{ strictement croissante,} \\ f(a_n) &= 2n \text{ possède une unique solution } a_n > e^{2n}, \\ a_n &\rightarrow +\infty, & \frac{a_n}{e^{2n}} &\rightarrow e^\pi, & \frac{a_n}{a_{n+1}} &\rightarrow e^{-2}. \end{aligned}$$

Correction détaillée – Exercice 3

Sommes et fonction logarithme

Énoncé

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a+n-1}, \quad f(x) = \ln(x+a).$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$\frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{a+k}.$$

2. Prouver que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln\left(1 + \frac{n}{a}\right) \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln\left(1 + \frac{n}{a}\right).$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$.

Préparation : pourquoi toutes les expressions existent-elles ?

Comme $a > 0$ et $k \geq 0$, on a $a+k > 0$ et $a+k+1 > 0$. Les fractions sont donc bien définies et les logarithmes $\ln(a+k)$ et $\ln(a+k+1)$ existent. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$, car $x+a > 0$ sur cet intervalle.

1. Encadrer $f(k+1) - f(k)$

Idée à retenir

Sur un intervalle de longueur 1, la différence $f(k+1) - f(k)$ est comprise entre les valeurs extrêmes de la dérivée lorsque celle-ci est décroissante.

Étape 1 : calcul de la dérivée. La dérivée de $\ln u(x)$ est $u'(x)/u(x)$, lorsque $u(x) > 0$. Ici $u(x) = x+a$ et $u'(x) = 1$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{x+a}.$$

Étape 2 : comparer les valeurs de f' . Pour $x \in [k, k+1]$, on a

$$a+k \leq a+x \leq a+k+1.$$

Ces trois nombres étant strictement positifs, prendre leurs inverses renverse le sens des inégalités :

$$\frac{1}{a+k+1} \leq \frac{1}{a+x} \leq \frac{1}{a+k}.$$

Étape 3 : théorème des accroissements finis. La fonction f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. Il existe donc $c \in]k, k+1[$ tel que

$$f(k+1) - f(k) = f'(c)((k+1) - k) = \frac{1}{a+c}.$$

Comme $k < c < k + 1$, l'encadrement précédent appliqué à $x = c$ donne

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{a+k}.$$

Vérification avec les logarithmes : $f(k+1) - f(k) = \ln(a+k+1) - \ln(a+k) = \ln\left(\frac{a+k+1}{a+k}\right)$. La question 1 donne donc aussi un encadrement utile de ce logarithme.

2. Encadrer la somme U_n

Idée à retenir

Additionner les encadrements de la question 1. Les termes $f(1), \dots, f(n-1)$ se compensent : c'est le principe d'une *somme télescopique*.

Étape 1 : additionner pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k} = U_n.$$

Étape 2 : faire apparaître la simplification. La somme du milieu vaut

$$\begin{aligned} & [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \dots + [f(n) - f(n-1)] \\ &= f(n) - f(0) = \ln(a+n) - \ln a \\ &= \ln\left(\frac{a+n}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{n}{a}\right). \end{aligned}$$

On en déduit déjà la *borne inférieure recherchée* :

$$\ln\left(1 + \frac{n}{a}\right) \leq U_n.$$

Étape 3 : obtenir la borne supérieure. Pour $k = 0, \dots, n-2$, l'inégalité de gauche à la question 1 donne

$$\frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k).$$

En additionnant ces $n-1$ inégalités (lorsque $n \geq 2$), on trouve

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{a+k+1} \leq f(n-1) - f(0).$$

Or

$$U_n = \frac{1}{a} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{a+k+1},$$

donc

$$U_n \leq \frac{1}{a} + \ln(a+n-1) - \ln a = \frac{1}{a} + \ln\left(1 + \frac{n-1}{a}\right).$$

Comme $a > 0$ et $n-1 \leq n$, la fonction $\ln$ étant croissante,

$$\ln\left(1 + \frac{n-1}{a}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{a}\right).$$

Ainsi

$$U_n \leq \frac{1}{a} + \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right).$$

Cas $n = 1$. On a $U_1 = 1/a$, et l'inégalité supérieure est immédiate puisque $\ln(1 + 1/a) > 0$. La borne inférieure découle de la question 1 avec $k = 0$.

$$\forall n \geq 1, \quad \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right) \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right).$$

Remarque utile. Une majoration un peu plus précise a même été démontrée :

$$U_n \leq \frac{1}{a} + \ln \left(1 + \frac{n-1}{a} \right).$$

3. Limites de U_n et de U_n/n

a) Limite de U_n

Comme $a > 0$ est fixé, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{n}{a} \rightarrow +\infty, \quad 1 + \frac{n}{a} \rightarrow +\infty.$$

La fonction logarithme vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$. Donc

$$\ln \left(1 + \frac{n}{a} \right) \rightarrow +\infty.$$

Or la question 2 assure que $U_n \geq \ln(1 + n/a)$. Par comparaison, U_n tend lui aussi vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

b) Limite de $\frac{U_n}{n}$

Idée à retenir

Une suite peut tendre vers $+\infty$ tout en devenant négligeable devant n . Ici, le logarithme augmente beaucoup plus lentement que n .

Comme $n > 0$, on peut diviser l'encadrement de la question 2 par n sans changer le sens des inégalités :

$$0 \leq \frac{U_n}{n} \leq \frac{1}{an} + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right).$$

Le premier terme de droite tend vers zéro :

$$\frac{1}{an} \rightarrow 0.$$

Pour le second, posons $t_n = 1 + n/a$. Alors $t_n \rightarrow +\infty$ et $n = a(t_n - 1)$. Ainsi

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{n}{a} \right) = \frac{1}{a} \frac{\ln t_n}{t_n - 1} = \frac{1}{a} \frac{\ln t_n}{t_n} \frac{t_n}{t_n - 1}.$$

On utilise les limites usuelles

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t-1} = 1.$$

Par produit, $\frac{1}{n} \ln(1 + n/a) \rightarrow 0$. Le majorant tend donc vers zéro. Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n} = 0.$$

Bilan : ce qu'il faut savoir refaire

1. Calculer $f'(x)$ puis l'encadrer sur $[k, k+1]$.
2. Appliquer le théorème des accroissements finis.
3. Additionner les inégalités et reconnaître une somme télescopique.
4. Utiliser une comparaison pour obtenir une limite infinie.
5. Diviser un encadrement par n et appliquer le théorème des gendarmes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n} = 0.$$

Exercice 4 — Fonctions logarithmes

Correction complète et détaillée

Étude d'une fonction, réciproque et suite implicite

Énoncé — données et questions

On considère f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} + \ln(x + 1).$$

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$; donner une interprétation géométrique.
2. Tracer la courbe de f .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $(E_n) : nf(x) = 1$. a) Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n . b) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} et dresser son tableau de variations. c) Dédire la monotonie de (x_n) et sa limite.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$.

1. Étude de la fonction

1.a) Croissance stricte

Méthode directe. Sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante. Or, pour $t \geq 0$, $t \mapsto t/(1+t)$ est croissante. Leur composée $x \mapsto x^2/(1+x^2)$ est donc croissante. De plus $x \mapsto \ln(1+x)$ est *strictement* croissante. Leur somme est strictement croissante.

Vérification par dérivation. Pour $x \geq 0$, en appliquant la règle de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)' &= \frac{2x(1+x^2) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$. Donc

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x}.$$

Pour $x \geq 0$, le premier terme est positif ou nul et le second est strictement positif. Ainsi $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus $f(0) = 0/(1+0) + \ln 1 = 0$.

1.b) Limites et interprétation géométrique

Première limite. Pour $x > 0$,

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La somme d'un terme tendant vers 1 et d'un terme tendant vers $+\infty$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Deuxième limite. En divisant par $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

D'une part $0 \leq x/(1+x^2) \leq 1/x$ pour $x > 0$, donc le premier terme tend vers 0. D'autre part, la croissance comparée du logarithme et de x donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0.$$

On peut aussi poser $t = x + 1$: $\ln(1+x)/x = \frac{\ln t}{t} \frac{t}{t-1}$; le premier facteur tend vers 0 et le second vers 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Interprétation. La courbe monte indéfiniment puisque $f(x) \rightarrow +\infty$, mais sa hauteur devient négligeable devant l'abscisse puisque $f(x)/x \rightarrow 0$. Elle possède une *branche parabolique de direction l'axe des abscisses* (Ox) à droite. Ce n'est pas une asymptote horizontale, car $f(x)$ ne tend pas vers une valeur finie.

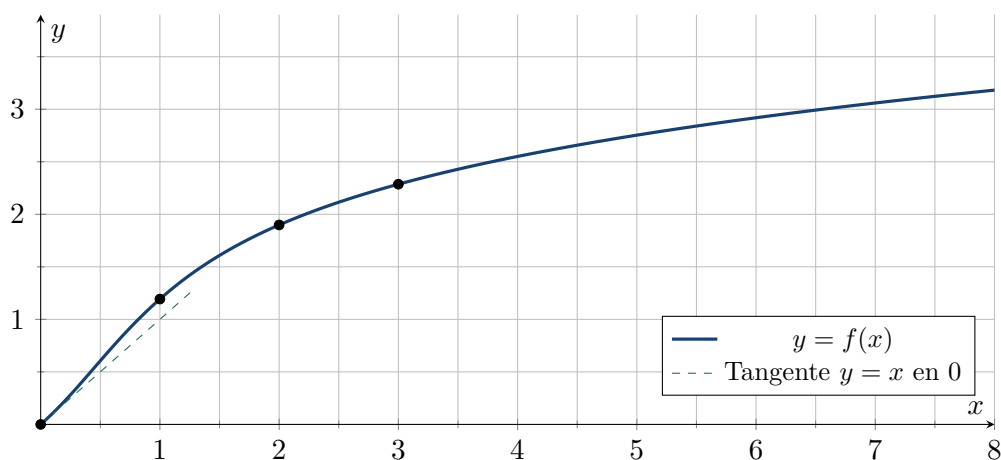
2. Tracé de la courbe

Le tableau de variations est :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

En $x = 0$, $f'(0) = 1$: la demi-tangente au point $O(0,0)$ a pour équation $y = x$. Quelques points utiles :

$$f(1) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1,193, \quad f(2) = \frac{4}{5} + \ln 3 \approx 1,899, \quad f(3) = \frac{9}{10} + \ln 4 \approx 2,286.$$



Lecture graphique. La courbe part de l'origine, monte continuellement et s'aplatit progressivement à droite ; elle ne redescend jamais.

3. Étude de l'équation $nf(x) = 1$ et de la suite (x_n)

3.a) Existence et unicité

Fixons $n \geq 1$. Puisque $n > 0$,

$$nf(x) = 1 \iff f(x) = \frac{1}{n}.$$

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ (somme de fonctions continues), strictement croissante, et satisfait

$$f(0) = 0 < \frac{1}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > \frac{1}{n}.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = 1/n$. La stricte croissance assure qu'il n'en existe *pas deux* : si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$.

$$\forall n \geq 1, \quad \exists! x_n > 0 : \quad nf(x_n) = 1.$$

3.b) Fonction réciproque

Comme f est continue et strictement croissante de 0 à $+\infty$, son image est exactement $[0, +\infty[$. Elle est donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et admet une fonction réciproque

$$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[.$$

La réciproque est strictement croissante. En effet, si $0 \leq u < v$, et si $p = f^{-1}(u)$, $q = f^{-1}(v)$, alors $p < q$, car f est strictement croissante.

$$\begin{array}{c|cc} t & 0 & +\infty \\ \hline f^{-1}(t) & 0 & \nearrow +\infty \end{array}$$

On a $f^{-1}(0) = 0$, et $f^{-1}(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

3.c) Monotonie et limite de (x_n)

De $f(x_n) = 1/n$, on tire immédiatement

$$x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $1/(n+1) < 1/n$, et f^{-1} est strictement croissante :

$$x_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) < f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = x_n.$$

Donc (x_n) est **strictement décroissante**. De plus $x_n > 0$: elle est minorée par 0. Par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Comme $f(x_n) = 1/n \rightarrow 0$, la continuité de f donne $f(\ell) = 0$. Or $f(0) = 0$ et f est strictement croissante, donc $\ell = 0$.

$$x_{n+1} < x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Autre preuve très courte : $x_n = f^{-1}(1/n)$ et $1/n \rightarrow 0$; par continuité de f^{-1} en 0, $x_n \rightarrow f^{-1}(0) = 0$.

4. Limite de $f(x)/x$ et de nx_n

Étape 1 : calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)/x$. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Le premier terme tend vers 0 et la limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = 1$ donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

On retrouve aussi ce résultat avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$: $f(x)/x = [f(x) - f(0)]/(x - 0) \rightarrow f'(0) = 1$.

Étape 2 : exploiter l'équation définissant x_n . Nous savons que $f(x_n) = 1/n$ et $x_n > 0$. Donc

$$\frac{f(x_n)}{x_n} = \frac{1}{nx_n} \implies nx_n = \frac{x_n}{f(x_n)} = \frac{1}{f(x_n)/x_n}.$$

Puisque $x_n \rightarrow 0^+$ et $f(x)/x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\frac{f(x_n)}{x_n} \longrightarrow 1, \quad nx_n \longrightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1.$$

Sens du résultat : pour de grandes valeurs de n , x_n est proche de $1/n$; on écrit $x_n \sim 1/n$.

Synthèse des résultats

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x} > 0, \quad f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

f^{-1} existe et est strictement croissante,

$$x_n = f^{-1}(1/n), \quad x_{n+1} < x_n, \quad x_n \rightarrow 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \boxed{nx_n \rightarrow 1}.$$

Exercice 5 — Fonctions logarithmiques

Correction détaillée

Énoncé. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère, pour $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{n} - \frac{1}{x^n}.$$

1. Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que $f_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n .
 - a) Prouver que $e^{1/n} < u_n$. b) Montrer que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire $u_n < e$.
 - a) Prouver que $f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln u_n}{(n+1)u_n} \left(u_n - 1 - \frac{1}{n}\right)$ et en déduire $f_{n+1}(u_n) > 0$. b) Montrer que (u_n) est décroissante et convergente.
3. On pose $V_n = \ln u_n$ pour $n \geq 2$. a) Vérifier $nV_n = \ln \left(\frac{n}{V_n}\right)$. b) Montrer $\frac{\ln n}{n} < V_n < \frac{2 \ln n}{n}$, puis déterminer $\lim V_n$ et $\lim u_n$.

1. Variations de f_n

Pour $x > 0$, nous dérivons séparément les deux termes :

$$\left(\frac{\ln x}{n}\right)' = \frac{1}{nx}, \quad (-x^{-n})' = nx^{-n-1}.$$

Donc

$$f'_n(x) = \frac{1}{nx} + \frac{n}{x^{n+1}} > 0 \quad (x > 0).$$

Ainsi f_n est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x/n \rightarrow -\infty$ et $-1/x^n \rightarrow -\infty$, donc $f_n(x) \rightarrow -\infty$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x/n \rightarrow +\infty$ et $1/x^n \rightarrow 0$, donc $f_n(x) \rightarrow +\infty$.

x	0^+	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. Existence et unicité de u_n

La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante et passe de $-\infty$ à $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'un zéro ; la stricte croissance assure son unicité.

Pour chaque entier $n \geq 2$, il existe un unique $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$. De plus, $f_n(x) < 0$ si $x < u_n$ et $f_n(x) > 0$ si $x > u_n$.

L'équation $f_n(u_n) = 0$ se réécrit :

$$\frac{\ln u_n}{n} = \frac{1}{u_n^n}, \quad \boxed{u_n^n \ln u_n = n}. \quad (\star)$$

Comme le membre de droite est positif, $\ln u_n > 0$, d'où $u_n > 1$.

3. Encadrement de u_n

a) Montrer $e^{1/n} < u_n$

Calculons f_n en $e^{1/n}$:

$$f_n(e^{1/n}) = \frac{1/n}{n} - \frac{1}{(e^{1/n})^n} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e}.$$

Pour $n \geq 2$, $1/n^2 \leq 1/4 < 1/e$ (car $e < 4$). Ainsi $f_n(e^{1/n}) < 0$. Puisque f_n est croissante et s'annule en u_n ,

$$e^{1/n} < u_n.$$

b) L'inégalité exponentielle et la borne supérieure

Posons $g(t) = e^t - t - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors $g'(t) = e^t - 1$, négative si $t < 0$, nulle en 0, positive si $t > 0$. Donc g admet son minimum en 0, et $g(0) = 0$. Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t,$$

avec égalité uniquement pour $t = 0$. Pour $n \geq 2$, l'inégalité appliquée à $t = n - 1 > 0$ donne $e^{n-1} > n$. Or

$$f_n(e) = \frac{1}{n} - \frac{1}{e^n} = \frac{e^n - n}{ne^n} > 0$$

car $e^n > e^{n-1} > n$. Comme $f_n(u_n) = 0$ et f_n est croissante,

$$e^{1/n} < u_n < e \quad (n \geq 2).$$

4. Monotonie et convergence de (u_n)

a) Calcul de $f_{n+1}(u_n)$

Par définition,

$$f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln u_n}{n+1} - \frac{1}{u_n^{n+1}}.$$

L'égalité $(\star)$ donne $1/u_n^n = \ln u_n/n$, donc

$$\frac{1}{u_n^{n+1}} = \frac{\ln u_n}{nu_n}.$$

En remplaçant et en factorisant,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= \frac{\ln u_n}{n+1} - \frac{\ln u_n}{nu_n} \\ &= \frac{\ln u_n}{(n+1)u_n} \left(u_n - \frac{n+1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_{n+1}(u_n) = \frac{\ln u_n}{(n+1)u_n} \left(u_n - 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Or $u_n > e^{1/n} > 1 + 1/n$ par la question 3 et l'inégalité exponentielle stricte en $1/n > 0$. Ainsi $u_n - 1 - 1/n > 0$; les autres facteurs sont positifs ($\ln u_n > 0$). Donc

$$f_{n+1}(u_n) > 0.$$

b) Décroissance et convergence

La fonction f_{n+1} est strictement croissante et s'annule en u_{n+1} . Puisque $f_{n+1}(u_n) > 0$, on obtient

$$u_{n+1} < u_n.$$

La suite est donc strictement décroissante. Elle est minorée par 1 puisque $u_n > e^{1/n} > 1$. **Une suite décroissante et minorée converge.** Il existe donc $\ell \geq 1$ tel que $u_n \rightarrow \ell$. La valeur de ℓ sera obtenue à la question 5.

5. Étude de $V_n = \ln u_n$

a) Équation vérifiée par V_n

D'après (*), $u_n^n \ln u_n = n$. Comme $u_n = e^{V_n}$ et $\ln u_n = V_n$,

$$e^{nV_n} V_n = n.$$

Puisque $V_n > 0$, on peut diviser par V_n : $e^{nV_n} = n/V_n$. En prenant le logarithme,

$$nV_n = \ln \left(\frac{n}{V_n} \right).$$

b) Encadrement de V_n , puis limites

D'après la question 3,

$$e^{1/n} < u_n < e.$$

En appliquant la fonction logarithme, strictement croissante, on trouve

$$\frac{1}{n} < V_n < 1. \quad (1)$$

Borne inférieure. Puisque $V_n < 1$, on a $n/V_n > n$. En prenant les logarithmes puis en utilisant 5a,

$$nV_n = \ln(n/V_n) > \ln n,$$

d'où

$$V_n > \frac{\ln n}{n}.$$

Borne supérieure. Puisque $V_n > 1/n$, on a $1/V_n < n$, donc $n/V_n < n^2$. Ainsi

$$nV_n = \ln(n/V_n) < \ln(n^2) = 2 \ln n,$$

d'où

$$V_n < \frac{2 \ln n}{n}.$$

Nous avons établi pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln n}{n} < V_n < \frac{2 \ln n}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, les deux bornes tendent vers 0. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0.$$

Enfin $u_n = e^{V_n}$ et la fonction exponentielle est continue en 0 ; par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1.$$

Bilan

Pour tout $n \geq 2$, f_n est strictement croissante et admet un unique zéro u_n . On a $e^{1/n} < u_n < e$. La suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers 1. En posant $V_n = \ln u_n$, on a $\frac{\ln n}{n} < V_n < \frac{2 \ln n}{n}$ et $V_n \rightarrow 0$.

Correction détaillée — Exercice 6

Fonctions logarithmiques et suites définies par des racines

Énoncé et notations

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère, pour $x > 0$,

$$f_n(x) = -x^2 + 2 + n \ln x.$$

On étudie les limites et variations de f_n , la fonction $g(x) = x \ln x - x + 2$, les deux solutions $U_n < V_n$ de $f_n(x) = 0$, puis les limites et la monotonie des suites correspondantes.

1. Limites de f_n

Lorsque $x \rightarrow 0^+$. On sait que $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $n \ln x \rightarrow -\infty$ puisque $n > 0$. Par ailleurs $-x^2 + 2 \rightarrow 2$. Par addition,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$. La difficulté est que $-x^2 \rightarrow -\infty$ tandis que $n \ln x \rightarrow +\infty$. On met x^2 en facteur :

$$f_n(x) = x^2 \left(-1 + \frac{2}{x^2} + n \frac{\ln x}{x^2} \right).$$

Or $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$ (croissance comparée). La parenthèse tend vers -1 et $x^2 \rightarrow +\infty$; ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty.$$

2. Dérivée et tableau de variations

Pour $x > 0$,

$$f'_n(x) = -2x + \frac{n}{x} = \frac{n - 2x^2}{x}.$$

Le dénominateur est positif : le signe de f'_n est celui de $n - 2x^2$. Posons $c_n = \sqrt{n/2}$. Alors

$$\begin{cases} f'_n(x) > 0 & \text{si } 0 < x < c_n, \\ f'_n(c_n) = 0, \\ f'_n(x) < 0 & \text{si } x > c_n. \end{cases}$$

De plus,

$$f_n(c_n) = -\frac{n}{2} + 2 + n \ln \sqrt{\frac{n}{2}} = 2 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}.$$

x	0	$c_n = \sqrt{n/2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $2 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}$ $\searrow$	$-\infty$

3. Une fonction auxiliaire et les deux racines

3.a.i. Étude de $g(x) = x \ln x - x + 2$

Pour $x > 0$, la dérivée du produit $x \ln x$ vaut $\ln x + 1$. Donc

$$g'(x) = (\ln x + 1) - 1 = \ln x.$$

Comme $\ln x < 0$ sur $]0, 1[$, $\ln 1 = 0$ et $\ln x > 0$ sur $]1, +\infty[$, la fonction g décroît sur $]0, 1]$ et croît sur $]1, +\infty[$. En outre $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$; et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Enfin $g(1) = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	2 ↘	1 ↗	$+\infty$

3.a.ii. Positivité

Le minimum de g sur $]0, +\infty[$ est $g(1) = 1$. Par conséquent,

$$\forall x > 0, \quad g(x) \geq 1 > 0.$$

3.b. Deux solutions distinctes

Au maximum de f_n ,

$$\begin{aligned} f_n \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \right) &= 2 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} \\ &= g \left(\frac{n}{2} \right) > 0, \end{aligned}$$

car $n/2 \geq 1$ et g est positive. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$. Elle part de $-\infty$, croît strictement jusqu'à une valeur strictement positive, puis décroît strictement vers $-\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc une racine de chaque côté du maximum; la stricte monotonie assure leur unicité respective.

$$0 < U_n < \sqrt{\frac{n}{2}} < V_n, \quad f_n(U_n) = f_n(V_n) = 0.$$

3.c. Limite de V_n et équivalent logarithmique

Puisque $V_n > \sqrt{n/2}$ et $\sqrt{n/2} \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty.$$

L'égalité $f_n(V_n) = 0$ donne

$$V_n^2 = 2 + n \ln V_n. \quad (1)$$

Pour calculer $\frac{\ln V_n}{\ln n}$, encadrons d'abord V_n . **Borne inférieure** : $V_n > \sqrt{n/2}$, donc

$$\ln V_n > \frac{1}{2}(\ln n - \ln 2). \quad (2)$$

Borne supérieure : Pour $n \geq 2$, montrons que $f_n(n) < 0$. On a

$$f_n(n) = -n^2 + 2 + n \ln n = n \left(\ln n - n + \frac{2}{n} \right).$$

La fonction $h(x) = x - \frac{2}{x} - \ln x$ a pour dérivée

$$h'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x + 2}{x^2} > 0.$$

Pour $x \geq 2$, $h(x) \geq h(2) = 1 - \ln 2 > 0$. Ainsi $\ln n - n + 2/n < 0$ et $f_n(n) < 0$. Comme $n > \sqrt{n/2}$ et f_n est strictement décroissante après son maximum, on obtient $V_n < n$. Donc $\ln V_n < \ln n$. En divisant (2) et cette dernière inégalité par $\ln n > 0$ (pour $n \geq 2$),

$$\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2 \ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1. \quad \text{cet encadrement ne permet pas d'avoir la limite de } \ln V_n / \ln n, \text{ il faut donc agir autrement...} \quad (3)$$

Pour préciser la limite, reprenons (1). Comme $V_n \rightarrow +\infty$, $\ln V_n \rightarrow +\infty$ et

$$V_n^2 = n \left(\ln V_n + \frac{2}{n} \right).$$

En prenant le logarithme, ce qui est permis car les quantités sont positives,

$$2 \ln V_n = \ln n + \ln \left(\ln V_n + \frac{2}{n} \right).$$

Ainsi

$$2 \frac{\ln V_n}{\ln n} = 1 + \frac{\ln (\ln V_n + 2/n)}{\ln n}. \quad (4)$$

Grâce à $V_n < n$, pour n assez grand, $0 < \ln V_n + 2/n < \ln n + 1$. De plus $\ln V_n \rightarrow +\infty$, donc le numérateur logarithmique est positif pour n assez grand. Par encadrement,

$$0 \leq \frac{\ln (\ln V_n + 2/n)}{\ln n} \leq \frac{\ln (\ln n + 1)}{\ln n} \rightarrow 0,$$

car $\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (avec $t = \ln n$, à une modification négligeable près). En passant à la limite dans (4),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n} = \frac{1}{2}.$$

4. Étude de la petite racine U_n

4.a. Montrer $U_n < 1$

On calcule $f_n(1) = -1 + 2 + n \ln 1 = 1 > 0$. D'autre part, $f_n(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Comme f_n est strictement croissante sur $]0, \sqrt{n/2}[$ et $1 \leq \sqrt{n/2}$,

$$0 < U_n < 1 \quad (n \geq 2).$$

4.b. Monotonie de (U_n)

Pour tout $x > 0$,

$$f_{n+1}(x) = -x^2 + 2 + (n+1) \ln x = f_n(x) + \ln x.$$

En prenant $x = U_n$ et en utilisant $f_n(U_n) = 0$,

$$f_{n+1}(U_n) = \ln U_n < 0.$$

Or $U_n < 1 \leq \sqrt{(n+1)/2}$: U_n appartient donc à l'intervalle où f_{n+1} est strictement croissante. Sur cet intervalle, f_{n+1} est négative avant son unique zéro U_{n+1} , puis positive après. Puisque $f_{n+1}(U_n) < 0$, nécessairement

$$U_n < U_{n+1} \quad (n \geq 2).$$

La suite $(U_n)_{n \geq 2}$ est donc strictement croissante (et, en particulier, sa sous-suite indexée par $n \geq 3$ l'est aussi).

4.c. Encadrement de $\ln U_n$ et limite

Partons de l'équation qui définit U_n :

$$-U_n^2 + 2 + n \ln U_n = 0.$$

On isole le logarithme :

$$\ln U_n = \frac{U_n^2 - 2}{n}.$$

Puisque $0 < U_n < 1$, on a $0 < U_n^2 < 1$, d'où

$$-2 < U_n^2 - 2 < -1.$$

En divisant par $n > 0$, le sens des inégalités ne change pas :

$$-\frac{2}{n} < \ln U_n < -\frac{1}{n}.$$

Ceci implique bien l'encadrement demandé avec des inégalités larges. Comme $-2/n \rightarrow 0$ et $-1/n \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\ln U_n \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^0 = 1.$$

Bilan des résultats

$$0 < U_n < 1 < V_n \quad (\text{avec } V_n > \sqrt{n/2})$$

$$U_n \nearrow 1, \quad V_n \rightarrow +\infty, \quad \frac{\ln V_n}{\ln n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{2}{n} < \ln U_n < -\frac{1}{n}.$$