

Fonctions logarithmiques

Série 4 — Énoncés des exercices

Exercice (1)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2 ; \quad x \neq 0, \quad f(0) = -1.$$

- 1) a) montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$
b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0
- 2) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique
- 3) a) montrer que $(\forall x > 0) \quad \ln x \leq x - 1$
b) calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$
c) déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
- 4) construire la courbe de la fonction f

Exercice (2)

Partie (1) soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$

- 1) déterminer D_g et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$
- 2) calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variation de g
- 3) déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(0) = 0$)

Partie (2)

on considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} & x \neq 0 ; \quad x \neq -1, \\ f(0) = 1 ; \quad f(-1) = 0. \end{cases}$$

- 1) a) montrer f que au point 0 et à droite de -1
b) étudier la dérivabilité de f à droite de -1
- 2) a) montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

étudier la dérivabilité de f à droite de 0

- b) soit x un réel de $] -1, 0[$ et on considère la fonction φ définie sur $] -1, 0[$ par :

$$\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t)).$$

Montrer que :

$$(\exists c \in]x, 0[) \quad \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

puis étudier la dérivabilité de f à gauche de 0

- 3) montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

- 4) a) montrer que : $(\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\})$;

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$$

- b) dresser le tableau de variation de f

- 5) étudier la position de (C_f) par rapport à $(\Delta) y = x$ et construire la courbe (C_f)

Exercice (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = nx + \ln x$$

- 1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$
 b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 2) étudier le sens de variation de f_n et construire la courbe (C_1)
- 3) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution u_n et que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < 1$
 b) montrer que $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$, déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$
- 4) a) montrer que $(\forall x > 0) \quad x > \ln x$, déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$
 b) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln n} = 1$

Exercice (4)

Partie (1) soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
- 2) montrer que : $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ et donner le tableau de variation de g
- 3) déduire que $(\forall x > 0) \quad g(x) > 0$

Partie (2)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

- 1) a) montrer que f est continue à droite de 0
 b) montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donner une interprétation géométrique du résultat
- 2) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 3) calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis donner le tableau de variation
- 4) construire la courbe (C_f)

Partie (3) soit $(U_n)_{n>0}$ une suite telle que

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et on pose} \quad V_n = \ln U_n$$

- 1) a) vérifier que $V_n = f(n)$ et déduire que $(U_n)_n$ est croissante
 b) montrer que $(\forall x > 0) \ln(1+x) < x$; déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n < e$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- 2) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{V_k}{k}$. exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n}$

Exercice (5)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{e} \left[\cup \right] \frac{1}{e}, +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}; \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) montrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$
 b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$
- 2) calculer les limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 1/e \\ x < 1/e}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1/e \\ x > 1/e}} f(x)$
- 3) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 4) montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f
- 5) construire la courbe (C)
- 6) soit n un entier tel que $n \geq 2$.
 - a) montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{n}$ admet deux solutions u_n et v_n avec $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$
 - b) (b1) montrer que $(\forall n \geq 2) v_n \geq \sqrt{n}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
 (b2) montrer que $(\forall x \geq 16) \sqrt{x} > 1 + \ln x$ et déduire que $(\forall n \geq 16) v_n \leq n$
 (b3) montrer que $(\forall n \geq 2) \ln v_n = \frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n)$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$
 - c) (c1) montrer que $(u_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente
 (c2) montrer que $(\forall n \geq 2) u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1}$; déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$
 (c3) démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (u_n - e^{-1}) = e^{-2}$

Exercice (7)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$$

- 1) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$
- 2) calculer $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n
- 3) a) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq u_n < e^2$
 b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}$ et déduire la monotonie de $(u_n)_n$
 c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ln u_n = 2 - \frac{2}{n} u_n$
 d) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} u_n$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$

4) a) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\exists d > 0) \quad e^{\frac{2}{n}u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n}u_n$

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n}u_n} - 1}{\frac{2}{n}u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n)$

Correction détaillée – Exercice 1

Fonctions logarithmiques

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2 - (x - 1)^2 \quad (x \neq 0), \quad f(0) = -1.$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
b) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation géométrique.
- 3) a) Montrer que $(\forall x > 0) \ln x \leq x - 1$.
b) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$.
c) Déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 4) Construire la courbe de la fonction f .

1. Continuité et dérivabilité au voisinage de zéro

1.a) Continuité sur $[0, +\infty[$

Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto (x - 1)^2$ sont continues. Les produits, puissances et différences de fonctions continues étant continus, f est continue en tout $x > 0$.

Il reste à vérifier la continuité à droite en 0. Pour $x > 0$,

$$f(x) = x(\ln x)^2 - (x - 1)^2.$$

Nous utilisons la limite usuelle $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$. Expliquons-la : en posant $t = 1/x$, on a $t \rightarrow +\infty$ et

$$x(\ln x)^2 = \frac{(\ln t)^2}{t} \longrightarrow 0,$$

car le logarithme croît moins vite que toute puissance strictement positive de t (en particulier $\ln t / \sqrt{t} \rightarrow 0$). Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 1 = -1 = f(0).$$

Ainsi, f est continue à droite en 0, donc **continue sur** $[0, +\infty[$.

1.b) Dérivabilité à droite en 0

La dérivée à droite, si elle existe comme nombre réel, est la limite

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Pour $x > 0$, en remplaçant $f(x)$ et $f(0)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{x(\ln x)^2 - (x-1)^2 + 1}{x} \\ &= \frac{x(\ln x)^2 - (x^2 - 2x + 1) + 1}{x} \\ &= \frac{x(\ln x)^2 - x^2 + 2x}{x} \\ &= (\ln x)^2 - x + 2.\end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$, donc $(\ln x)^2 \rightarrow +\infty$, tandis que $-x + 2 \rightarrow 2$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty.$$

Conclusion : f n'est pas dérivable à droite en 0 au sens usuel, car le taux d'accroissement ne tend pas vers un réel fini. La courbe possède au point $A(0, -1)$ une **demi-tangente verticale**, d'équation $x = 0$.

2. Limites en $+\infty$ et interprétation géométrique

Pour $x > 0$, développons le carré :

$$\begin{aligned}f(x) &= x(\ln x)^2 - x^2 + 2x - 1 \\ &= x^2 \left(\frac{(\ln x)^2}{x} - 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right).\end{aligned}$$

Or, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

L'expression entre parenthèses tend donc vers -1 . Elle est négative, par exemple inférieure à $-\frac{1}{2}$, dès que x est assez grand. Comme $x^2 \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Pour le quotient demandé, divisons directement par x :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= (\ln x)^2 - \frac{(x-1)^2}{x} \\ &= (\ln x)^2 - x + 2 - \frac{1}{x} \\ &= x \left(\frac{(\ln x)^2}{x} - 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right).\end{aligned}$$

La parenthèse tend encore vers -1 , et $x \rightarrow +\infty$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Interprétation géométrique. La courbe descend vers $-\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Comme $f(x)/x \rightarrow -\infty$, elle possède, au voisinage de $+\infty$, une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** (Oy). Il ne s'agit pas d'une asymptote oblique, car $f(x)/x$ n'a pas de limite réelle finie.

3. Inégalité logarithmique, dérivées et variations

3.a) Montrer que $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$

Méthode directe : posons $h(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 0$. Alors

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Puisque $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $x - 1$:

- si $0 < x < 1$, $h'(x) < 0$, donc h décroît ;
- si $x = 1$, $h'(1) = 0$;
- si $x > 1$, $h'(x) > 0$, donc h croît.

Ainsi, h atteint son minimum en $x = 1$. Or

$$h(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0.$$

Il s'ensuit que $h(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1.}$$

L'égalité a lieu uniquement pour $x = 1$.

3.b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

Pour $x > 0$, nous avons $f(x) = x(\ln x)^2 - (x - 1)^2$. Dérivons le premier terme par la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} [x(\ln x)^2]' &= 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ &= (\ln x)^2 + 2 \ln x. \end{aligned}$$

D'autre part, $[(x - 1)^2]' = 2(x - 1)$. Par différence,

$$\boxed{f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2x + 2.}$$

En particulier,

$$f'(1) = (\ln 1)^2 + 2 \ln 1 - 2 + 2 = 0, \quad \boxed{f'(1) = 0}.$$

Dérivons une seconde fois, terme par terme :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2 \\ &= \frac{2 \ln x + 2 - 2x}{x} \\ &= \boxed{\frac{2}{x}(\ln x - x + 1)}. \end{aligned}$$

3.c) Signe de f' et tableau de variations

D'après la question 3.a, pour tout $x > 0$,

$$\ln x \leq x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x - x + 1 \leq 0.$$

Puisque $2/x > 0$, la formule de f'' entraîne

$$f''(x) \leq 0 \quad (x > 0),$$

avec égalité uniquement en $x = 1$. Par conséquent, f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Nous savons que $f'(1) = 0$. Comme f' décroît :

- pour $0 < x < 1$, on a $f'(x) > f'(1) = 0$;
- pour $x = 1$, on a $f'(1) = 0$;
- pour $x > 1$, on a $f'(x) < f'(1) = 0$.

Donc f est strictement **croissante** sur $[0, 1]$, puis strictement **décroissante** sur $[1, +\infty[$. Les valeurs utiles sont

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1 \cdot 0^2 - (1 - 1)^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

x	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bilan : f admet un **maximum global** égal à 0, atteint uniquement en $x = 1$. En particulier, $f(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, avec égalité uniquement en $x = 1$.

4. Construction de la courbe représentative

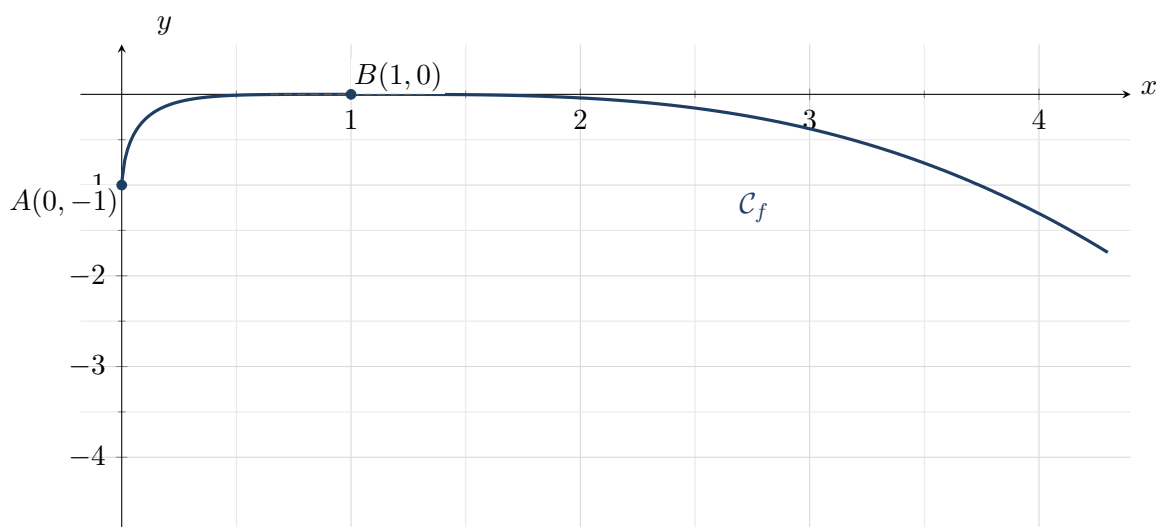
Nous réunissons les informations nécessaires au tracé :

- La courbe part de $A(0, -1)$ et possède en ce point une demi-tangente verticale $x = 0$.
- Elle monte strictement de $A(0, -1)$ jusqu'à $B(1, 0)$.
- Comme $f'(1) = 0$, sa tangente en B est horizontale, d'équation $y = 0$.
- Elle redescend strictement après $x = 1$ et tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- Comme $f''(x) \leq 0$, la courbe est concave sur $]0, +\infty[$: sa pente diminue continûment.

Quelques points de repère. Pour placer des points sans calculatrice scientifique avancée, on peut utiliser

$$f(e) = e - (e - 1)^2 = -e^2 + 3e - 1 \approx -0,235,$$

$$f(2) = 2(\ln 2)^2 - 1 \approx -0,039, \quad f(3) = 3(\ln 3)^2 - 4 \approx -0,379.$$



Lecture du graphique. Le point $B(1, 0)$ est le seul point de contact avec l'axe des abscisses. La courbe reste au-dessous de cet axe partout ailleurs. Sa tangente est verticale au départ et horizontale au sommet.

Résumé des résultats

f continue sur $[0, +\infty[$, $f'_d(0)$ n'existe pas comme réel;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty,$$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 2x + 2,$$

$$f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x - x + 1) \leq 0,$$

$$f \nearrow \text{ sur } [0, 1], \quad f \searrow \text{ sur } [1, +\infty[, \quad \max f = f(1) = 0.$$

Exercice 2 – Fonctions logarithmiques

Correction complète et détaillée

Énoncé – Partie 1

On considère $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

1. Déterminer D_g , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
3. En déduire le signe de $g(x)$, sachant que $g(0) = 0$.

Énoncé – Partie 2

On définit f sur $[-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)}, & x \neq -1, x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

- a) Montrer que f est continue en 0 et à droite de -1 .
- b) Étudier la dérivabilité de f à droite de -1 .
- 2.a) Montrer que, pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, puis étudier la dérivabilité à droite de 0.
- 2.b) Pour $x \in]-1, 0[$, on pose $\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$, $t \in]-1, 0[$. Montrer qu'il existe $c \in]x, 0[$ tel que $\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$, puis étudier la dérivabilité à gauche de 0.
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et étudier la branche infinie de (C_f) .
- 4.a) Montrer que, pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$.
- 4.b) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Étudier la position de (C_f) par rapport à $\Delta : y = x$ et construire (C_f) .

Partie 1 – Étude de la fonction g

1. Domaine et limites

Le logarithme $\ln(1+x)$ existe exactement lorsque $1+x > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. Donc

$$D_g =]-1, +\infty[.$$

En -1 à droite. Posons $t = 1+x$. Alors $t \rightarrow 0^+$, $x = t-1$ et

$$g(x) = t-1-t\ln t.$$

La limite usuelle $t \ln t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ donne

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -1.$$

En $+\infty$. Réécrivons

$$g(x) = (1+x) \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right).$$

Or $\frac{x}{1+x} \rightarrow 1$, tandis que $\ln(1+x) \rightarrow +\infty$. L'expression entre parenthèses tend donc vers $-\infty$ et $1+x \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

2. Dérivée et variations

Pour $x > -1$, dérivons terme à terme. La dérivée de $(1+x)\ln(1+x)$, par la règle du produit, est

$$(1+x)' \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + 1.$$

Par conséquent,

$$g'(x) = 1 - (\ln(1+x) + 1) = -\ln(1+x).$$

Si $-1 < x < 0$, alors $0 < 1+x < 1$, donc $\ln(1+x) < 0$ et $g'(x) > 0$. Si $x = 0$, $g'(0) = 0$. Si $x > 0$, $\ln(1+x) > 0$, donc $g'(x) < 0$. De plus $g(0) = 0 - 1 \ln 1 = 0$.

x	-1^+	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\searrow$

3. Signe de g

Sur $] -1, 0[$, g croît strictement vers $g(0) = 0$: $g(x) < 0$. Sur $]0, +\infty[$, g décroît strictement à partir de 0 : $g(x) < 0$. Ainsi

$$g(x) \leq 0 \quad (x > -1), \quad g(x) = 0 \iff x = 0.$$

Partie 2 – Étude de la fonction f

1.a. Continuité en 0 et à droite de -1

En 0. La limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ implique, en prenant les inverses,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 = f(0).$$

La fonction f est donc continue en 0 (à gauche et à droite).

En -1 à droite. Quand $x \rightarrow -1^+$, on a $x \rightarrow -1$ et $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$. Le quotient tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1).$$

La fonction f est donc continue à droite de -1 . En particulier, elle est continue sur tout $[-1, +\infty[$.

1.b. Dérivabilité à droite de -1

Par définition, le taux d'accroissement à droite vaut, pour $x > -1$,

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)}.$$

Posons $t = 1 + x \rightarrow 0^+$. Alors

$$\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)} = \frac{t-1}{t\ln t}.$$

Le numérateur tend vers -1 et le dénominateur $t\ln t$ tend vers 0 par valeurs négatives. Le quotient tend donc vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty.$$

La dérivée à droite n'est pas finie : f n'est pas dérivable à droite de -1 au sens usuel. Géométriquement, (C_f) possède en $A(-1, 0)$ une **demi-tangente verticale** d'équation $x = -1$.

2.a. Encadrement de $\ln(1+x)$ et dérivée à droite de 0

Première inégalité. Pour $t \geq 0$, posons

$$h(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}.$$

On a $h(0) = 0$ et

$$h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1 - (1+t) + t(1+t)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \geq 0.$$

Donc $h(t) \geq h(0) = 0$, d'où $\ln(1+t) \geq t - t^2/2$.

Seconde inégalité. Posons

$$k(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(1+t).$$

Alors $k(0) = 0$ et

$$k'(t) = 1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1-t+t^2)(1+t) - 1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t} \geq 0.$$

Ainsi $k(t) \geq 0$. Nous avons démontré, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Dérivée à droite de 0 . Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x/\ln(1+x) - 1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}.$$

En soustrayant l'encadrement précédent de x , nous obtenons

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Divisons par $x^2 > 0$:

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Les deux bornes tendent vers $1/2$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Or

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \underbrace{\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}}_{\rightarrow 1/2} \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\rightarrow 1}.$$

Donc

$$f'_d(0) = \frac{1}{2}.$$

2.b. Théorème de Rolle et dérivée à gauche de 0

Fixons $x \in]-1, 0[$ et posons $A = x - \ln(1+x)$. La fonction

$$\varphi(t) = t^2 A - x^2(t - \ln(1+t))$$

est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$. Vérifions les valeurs aux bornes :

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = x^2 A - x^2(x - \ln(1+x)) = 0.$$

Le **théorème de Rolle** garantit donc l'existence d'un $c \in]x, 0[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Pour $t \in]x, 0[$, on calcule

$$\varphi'(t) = 2tA - x^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = 2tA - \frac{x^2 t}{1+t}.$$

En $t = c$, cela donne

$$0 = c \left(2A - \frac{x^2}{1+c}\right).$$

Comme $c \in]x, 0[$, on a $c < 0$, donc $c \neq 0$. Nous pouvons diviser par c :

$$2A = \frac{x^2}{1+c}, \quad \boxed{\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}}.$$

Quand $x \rightarrow 0^-$, l'encadrement $x < c < 0$ donne $c \rightarrow 0$ (gendarmes). Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

En reprenant le taux d'accroissement calculé à la question 2.a et la limite $x/\ln(1+x) \rightarrow 1$, nous obtenons

$$\boxed{f'_g(0) = \frac{1}{2}}.$$

Les dérivées à gauche et à droite sont égales : $\boxed{f'(0) = 1/2}$. La tangente en $B(0, 1)$ est

$$\boxed{y = 1 + \frac{x}{2}}.$$

3. Limite en $+\infty$ et branche infinie

Pour $x > 0$, $f(x) = x/\ln(1+x)$. Comme $\ln(1+x)/x \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, son inverse tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Pour déterminer la direction de la branche infinie, calculons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

La courbe possède donc une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** (Ox). Elle n'admet pas d'asymptote horizontale puisque $f(x) \rightarrow +\infty$, ni d'asymptote oblique de pente non nulle puisque $f(x)/x \rightarrow 0$.

4.a. Dérivée de f hors de 0

Pour $x > -1$ et $x \neq 0$, la règle de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(1+x) - x \cdot \frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}.$$

En mettant le numérateur au même dénominateur,

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$

Or $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$. Ainsi

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$

4.b. Tableau de variations

Pour $x > -1$, $x \neq 0$, le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif : $1+x > 0$ et le carré du logarithme est positif. D'après la partie 1, $g(x) < 0$ si $x \neq 0$: donc $-g(x) > 0$ et $f'(x) > 0$. Au point 0, nous avons démontré $f'(0) = 1/2 > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	non définie	$+$ $\frac{1}{2}$ $+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

5. Position par rapport à $\Delta : y = x$ et construction

Pour $x > -1$, $x \neq 0$, comparons les ordonnées :

$$f(x) - x = \frac{x}{\ln(1+x)} - x = \frac{x(1 - \ln(1+x))}{\ln(1+x)}.$$

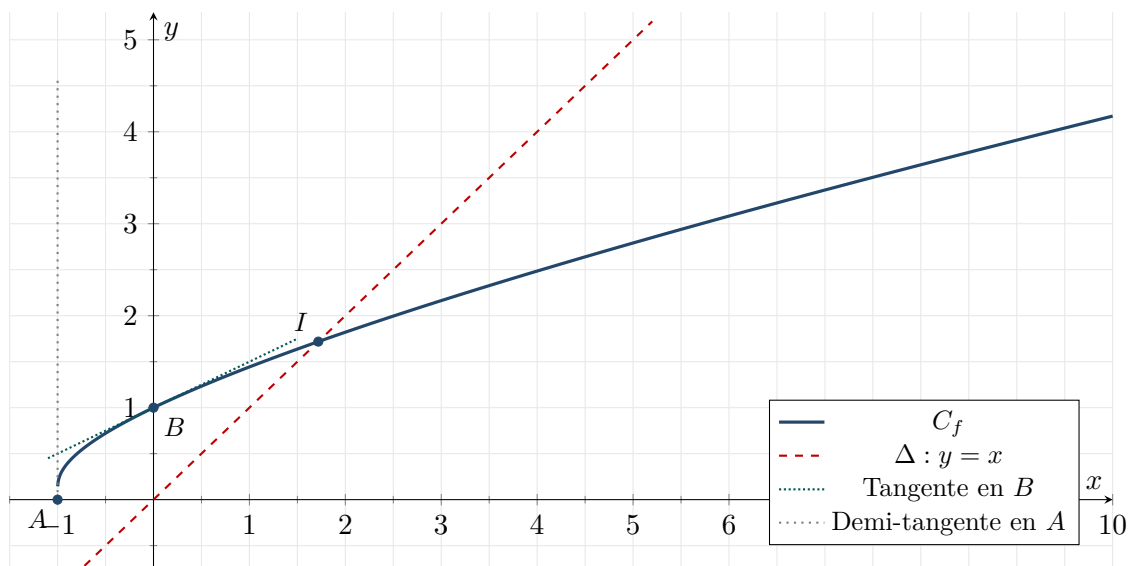
Point clé : x et $\ln(1+x)$ ont toujours le même signe. Leur quotient est donc strictement positif. Le signe de $f(x) - x$ est uniquement celui de $1 - \ln(1+x)$.

$$1 - \ln(1+x) > 0 \iff \ln(1+x) < 1 \iff 1+x < e \iff x < e-1.$$

Ainsi (C_f) est **au-dessus** de Δ pour $-1 < x < e-1$ (y compris en 0, car $f(0) = 1 > 0$), coupe Δ en $I(e-1, e-1)$, puis est **au-dessous** pour $x > e-1$. À l'extrémité $x = -1$, $f(-1) = 0 > -1$, donc le point $A(-1, 0)$ est aussi au-dessus de Δ .

Repères pour un tracé rigoureux

La courbe part de $A(-1, 0)$ avec une demi-tangente verticale $x = -1$, passe par $B(0, 1)$ avec tangente $y = 1 + x/2$, coupe $y = x$ en $I(e-1, e-1) \approx (1,718; 1,718)$, puis monte sans borne en s'aplatissant relativement à l'axe (Ox) .



Bilan

$$g(x) \leq 0, \quad f \text{ strictement croissante sur } [-1, +\infty[, \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Exercice 3 – Fonctions logarithmiques

Correction complète et détaillée

Énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = nx + \ln x.$$

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$. b) Étudier la branche infinie de (C_{f_n}) au voisinage de $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f_n et construire (C_1) .
3. a) Montrer que $f_n(x) = 0$ admet une seule solution u_n et que $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$. b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$ et en déduire la monotonie de (u_n) .
4. a) Montrer que $x > \ln x$ pour tout $x > 0$ et en déduire $u_n < 1/\sqrt{n}$. b) Déterminer $\lim u_n$, $\lim nu_n$ et montrer que $\lim \frac{nu_n}{\ln n} = 1$.

1. Limites et branche infinie

1.a. Limites aux bornes du domaine

Le logarithme $\ln x$ existe exactement pour $x > 0$. Le terme nx est défini pour tout réel, donc le domaine de f_n est $]0, +\infty[$. L'entier $n \geq 1$ est fixé lorsque l'on calcule les limites en x .

Lorsque $x \rightarrow 0^+$. On sait que $nx \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$. La somme d'une quantité tendant vers 0 et d'une quantité tendant vers $-\infty$ tend vers $-\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$. Puisque $n > 0$, on a $nx \rightarrow +\infty$, et aussi $\ln x \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

1.b. Branche infinie au voisinage de $+\infty$

Cherchons d'abord la direction éventuelle de la courbe en calculant

$$\frac{f_n(x)}{x} = \frac{nx + \ln x}{x} = n + \frac{\ln x}{x}.$$

La limite usuelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = n.$$

La courbe a donc, au voisinage de $+\infty$, une **branche infinie de direction** la droite $y = nx$. Mais attention : une direction ne suffit pas pour conclure à une asymptote oblique.

Vérifions la différence entre la courbe et cette droite :

$$f_n(x) - nx = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Cette différence ne tend pas vers zéro. **La droite $y = nx$ n'est donc pas une asymptote oblique.** On dit que (C_{f_n}) possède une **branche parabolique de direction $y = nx$** . Pour $x > 1$, $\ln x > 0$: la courbe est au-dessus de cette droite.

Méthode à retenir. Pour étudier une branche infinie, calculer d'abord $f(x)/x$. Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}$, calculer ensuite $f(x) - ax$. Une asymptote $y = ax + b$ n'existe que si cette dernière différence tend vers un réel fini b .

2. Variations de f_n et construction de (C_1)

Pour $x > 0$, la fonction f_n est dérivable. En dérivant terme à terme,

$$(nx)' = n, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \boxed{f'_n(x) = n + \frac{1}{x} = \frac{nx + 1}{x}}.$$

Comme $n \geq 1$ et $x > 0$, on a $nx + 1 > 0$ et $x > 0$. Par conséquent

$$\forall x > 0, \quad f'_n(x) > 0.$$

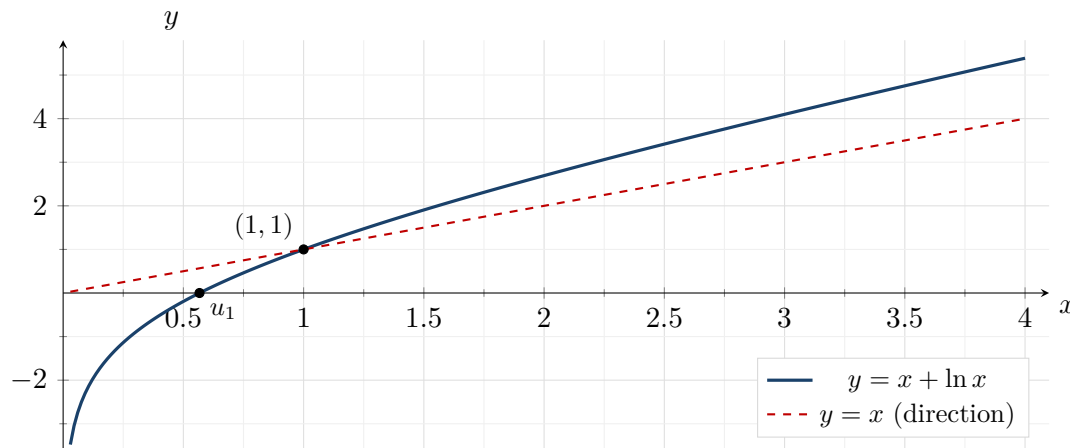
La fonction f_n est donc **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Ses limites calculées à la question 1 donnent le tableau suivant :

x	0^+	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Pour $n = 1$. On a $f_1(x) = x + \ln x$ et $f'_1(x) = 1 + 1/x > 0$. Quelques valeurs faciles à placer :

$$f_1(1) = 1, \quad f_1(e) = e + 1, \quad f_1(e^{-1}) = e^{-1} - 1 \approx -0,632.$$

La courbe monte sans interruption, part vers $-\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ et monte vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. La droite $x = 0$ est une **asymptote verticale**. Le point $(1, 1)$ appartient à la courbe. Elle coupe l'axe horizontal en un point $u_1 \in]0, 1[$, justifié à la question suivante.



3. Étude des solutions u_n

3.a. Existence, unicité et encadrement $u_n < 1$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions continues), strictement croissante, et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, elle prend donc la valeur 0 au moins une fois. Comme elle est strictement croissante, elle ne peut prendre cette valeur qu'une seule fois. Notons cette solution u_n :

$$\boxed{\exists! u_n > 0 \text{ tel que } nu_n + \ln u_n = 0.}$$

Pour situer cette solution, calculons $f_n(1)$:

$$f_n(1) = n + \ln 1 = n > 0.$$

Or $f_n(u_n) = 0$ et f_n est strictement croissante. L'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n(1)$ impose $u_n < 1$. Puisque u_n appartient au domaine,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n < 1.}$$

3.b. Calcul de $f_n(u_{n+1})$ et monotonie de (u_n)

Par définition, u_{n+1} annule f_{n+1} , donc

$$(n+1)u_{n+1} + \ln u_{n+1} = 0.$$

Développons $(n+1)u_{n+1} = nu_{n+1} + u_{n+1}$:

$$nu_{n+1} + \ln u_{n+1} = -u_{n+1}.$$

Le membre de gauche est exactement $f_n(u_{n+1})$. Ainsi

$$\boxed{f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}.}$$

Comme $u_{n+1} > 0$, on en déduit $f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$. Or f_n est strictement croissante : elle conserve l'ordre des antécédents. Donc

$$\boxed{u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.}$$

La suite (u_n) est **strictement décroissante**. Elle est minorée par 0 ; elle est donc convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

4. Encadrement et limites de la suite

4.a. Montrer $x > \ln x$ et en déduire $u_n < 1/\sqrt{n}$

Étape 1 : inégalité fondamentale. Posons $h(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 0$. Sa dérivée vaut

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme $x > 0$, $h'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$, $h'(1) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour $x > 1$. La fonction h décroît jusqu'à 1 puis croît ; elle admet donc un minimum en 1. Or

$$h(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0.$$

Ainsi $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$. En ajoutant 1 et en utilisant $x - 1 < x$,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1 < x.}$$

Étape 2 : appliquer l'inégalité à $1/u_n$. Puisque $0 < u_n < 1$, on a $1/u_n > 1 > 0$. L'inégalité précédente donne

$$\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) < \frac{1}{u_n}.$$

Mais $nu_n + \ln u_n = 0$, donc $-\ln u_n = nu_n$, et $\ln(1/u_n) = -\ln u_n$. Par substitution,

$$nu_n < \frac{1}{u_n}.$$

On multiplie par $u_n > 0$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$nu_n^2 < 1 \quad \implies \quad u_n^2 < \frac{1}{n}.$$

Les deux membres sont positifs, donc on peut prendre leurs racines carrées :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

4.b. Les trois limites demandées

Première limite : u_n . L'encadrement précédent fournit

$$0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Par le **théorème des gendarmes**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Deuxième limite : nu_n . L'équation qui définit u_n donne immédiatement

$$nu_n = -\ln u_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

Puisque $u_n \rightarrow 0$ avec $u_n > 0$, on a $1/u_n \rightarrow +\infty$. Le logarithme tendant vers $+\infty$ à l'infini,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty.$$

Troisième limite : $nu_n / \ln n$. La méthode consiste à transformer l'égalité $nu_n = -\ln u_n$ pour faire apparaître $\ln n$.

Posons $t_n = nu_n > 0$. Alors $u_n = t_n/n$, et l'égalité précédente devient

$$t_n = -\ln\left(\frac{t_n}{n}\right).$$

Par la propriété du logarithme d'un quotient,

$$t_n = -(\ln t_n - \ln n) = \ln n - \ln t_n.$$

Ainsi

$$t_n + \ln t_n = \ln n.$$

Nous savons déjà que $t_n = nu_n \rightarrow +\infty$. Il existe donc un rang N tel que, pour $n \geq N$, $t_n > 1$, d'où $\ln t_n > 0$. L'égalité ci-dessus entraîne alors

$$0 < t_n < \ln n \quad (n \geq N).$$

Comme le logarithme est croissant, pour n assez grand pour avoir $\ln n > 1$,

$$0 < \ln t_n < \ln(\ln n).$$

Divisons par $\ln n > 0$:

$$0 < \frac{\ln t_n}{\ln n} < \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}.$$

La limite usuelle $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, appliquée à $y = \ln n \rightarrow +\infty$, donne

$$\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \rightarrow 0.$$

Par encadrement,

$$\frac{\ln t_n}{\ln n} \rightarrow 0.$$

Enfin, divisons l'égalité $t_n = \ln n - \ln t_n$ par $\ln n$:

$$\frac{t_n}{\ln n} = 1 - \frac{\ln t_n}{\ln n} \rightarrow 1 - 0 = 1.$$

Comme $t_n = nu_n$, nous obtenons bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{\ln n} = 1.$$

Interprétation. Pour les grands entiers n , nu_n est proche de $\ln n$ au sens où leur quotient tend vers 1. On peut donc écrire $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Bilan des résultats

Pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = nx + \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Au voisinage de $+\infty$, sa courbe a une branche parabolique de direction $y = nx$. L'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n , et

$$0 < u_{n+1} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1).$$

Enfin,

$$u_n \rightarrow 0, \quad nu_n \rightarrow +\infty, \quad \frac{nu_n}{\ln n} \rightarrow 1.$$

Correction détaillée — Exercice 4

Fonctions logarithmiques et suites

Énoncé reformulé fidèlement

Partie (1). Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1) Calculer les limites en $+\infty$ et en 0^+ . 2) Montrer que $g'(x) = -1/[x(x+1)^2]$ et donner ses variations. 3) En déduire que $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

Partie (2). f est définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0), \quad f(0) = 0.$$

1) a) Continuité à droite en 0. b) Limite de $f(x)/x$ en 0^+ et interprétation géométrique. 2) Branche infinie en $+\infty$. 3) Dérivée, variations et tableau. 4) Construire (C_f) .

Partie (3). Pour $n \geq 1$, $U_n = (1 + 1/n)^n$ et $V_n = \ln U_n$. 1) a) Vérifier $V_n = f(n)$ et déduire que (U_n) est croissante. b) Montrer $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$, puis $U_n < e$ et calculer $\lim U_n$.

2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n V_k/k$. Exprimer S_n en fonction de n , puis calculer $\lim S_n$ et $\lim S_n/\ln n$.

Partie (1) — Étude de g

1. Limites aux bornes

La fonction est bien définie pour $x > 0$, car $x+1 > 0$ et $1 + 1/x > 1 > 0$. Son domaine est donc $D_g =]0, +\infty[$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous avons $1/x \rightarrow 0$, donc $1 + 1/x \rightarrow 1$. La fonction logarithme étant continue en 1,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

De plus, $-1/(x+1) \rightarrow 0$. Par addition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$. Comme $1/x \rightarrow +\infty$, on a $1 + 1/x \rightarrow +\infty$, puis

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty.$$

En même temps, $-1/(x+1) \rightarrow -1$. Une quantité tendant vers $+\infty$ à laquelle on ajoute une quantité de limite finie tend encore vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty.$$

2. Dérivée et variations

On dérive terme par terme pour $x > 0$. D'abord,

$$\left(-\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Pour le logarithme, posons $u(x) = 1 + 1/x$. Alors $u'(x) = -1/x^2$ et

$$\left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]' = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x} = \frac{-1/x^2}{(x+1)/x} = -\frac{1}{x(x+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{x - (x+1)}{x(x+1)^2} = \boxed{-\frac{1}{x(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, le dénominateur $x(x+1)^2$ est strictement positif : $g'(x) < 0$. Donc g est **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$.

x	0^+	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad 0$

3. Signe de g

Idée de méthode

Une fonction strictement décroissante qui tend vers 0 à droite reste strictement au-dessus de 0 en tout point de son domaine.

Fixons $x > 0$. Pour tout $t > x$, la stricte décroissance donne $g(x) > g(t)$. En laissant $t \rightarrow +\infty$, on obtient déjà $g(x) \geq 0$. Pour établir la stricte positivité, choisissons $t > x : g(x) > g(t) \geq 0$. Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) > 0.}$$

Partie (2) — Étude de f

1.a. Continuité à droite en 0

Nous devons montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$. Pour $x > 0$, posons $t = 1/x$: lorsque $x \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow +\infty$ et

$$f(x) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

La limite usuelle de croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t)/t = 0$ donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$

Autre justification par encadrement. Pour $y > 0$, $0 < \ln(1+y) < y$ (inégalité démontrée en partie 3). En prenant $y = 1/x$, on obtient $0 < f(x) < 1$, ce qui ne suffit pas pour conclure en 0 ; c'est bien la croissance comparée ci-dessus qui permet de démontrer la limite nulle.

1.b. Quotient $f(x)/x$ et tangente en 0

Pour $x > 0$, on simplifie directement :

$$\frac{f(x)}{x} = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, l'argument du logarithme tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Comme $f(0) = 0$, le taux d'accroissement à droite en 0 est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty.$$

Il n'existe donc *pas de dérivée à droite finie* en 0. **Interprétation géométrique** : la courbe (C_f) admet à l'origine $O(0,0)$ une **demi-tangente verticale**, d'équation $x = 0$.

2. Branche infinie au voisinage de $+\infty$

Posons $t = 1/x$. Alors $t \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et

$$f(x) = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

La limite fondamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)/t = 1$ donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

La courbe possède donc une **asymptote horizontale** à droite, d'équation $y = 1$. Pour connaître la position de la courbe, nous utilisons $\ln(1+t) < t$ pour $t > 0$:

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) < x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Ainsi (C_f) est **au-dessous** de son asymptote $y = 1$ pour tout $x > 0$; elle s'en approche par valeurs inférieures.

3. Dérivée et variations

Pour $x > 0$, appliquons la règle de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \left(-\frac{1}{x(x+1)} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} = g(x). \end{aligned}$$

La partie (1) a établi $g(x) > 0$ pour $x > 0$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$: f y est strictement croissante. Sa continuité à droite en 0 et sa limite $f(0) = 0$ permettent d'étendre la stricte croissance à $[0, +\infty[$.

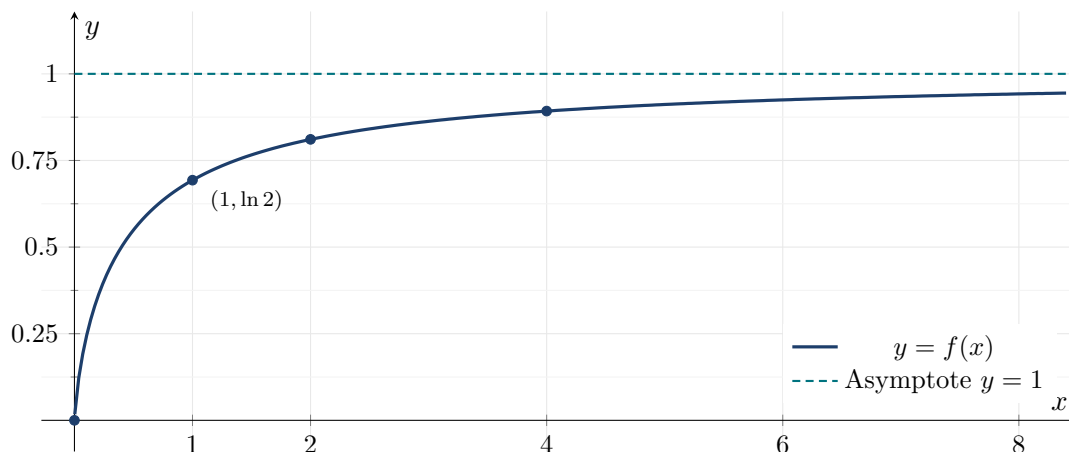
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	non définie	+
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1

En complément : $f''(x) = g'(x) = -1/[x(x+1)^2] < 0$ pour $x > 0$. La courbe est donc concave : ses pentes positives diminuent progressivement.

4. Construction de la courbe (C_f)

Pour tracer la courbe, retenons quatre renseignements : elle part de $O(0,0)$; elle est strictement croissante ; elle est concave ; elle admet la demi-tangente verticale $x = 0$ en O et l'asymptote horizontale $y = 1$ à droite. Pour placer quelques points :

$$f(1) = \ln 2 \approx 0,693, \quad f(2) = 2 \ln \frac{3}{2} \approx 0,811, \quad f(4) = 4 \ln \frac{5}{4} \approx 0,893.$$



La courbe n'atteint jamais l'asymptote $y = 1$: on a $f(x) < 1$ pour tout $x \geq 0$.

Partie (3) — Étude des suites

1.a. Identité $V_n = f(n)$ et croissance de (U_n)

Pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = (1 + 1/n)^n > 0$; son logarithme existe. En utilisant $\ln(a^n) = n \ln a$ pour $a > 0$,

$$V_n = \ln U_n = \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \boxed{f(n)}.$$

Comme f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $n+1 > n$,

$$V_{n+1} = f(n+1) > f(n) = V_n.$$

L'exponentielle est strictement croissante :

$$U_{n+1} = e^{V_{n+1}} > e^{V_n} = U_n.$$

Donc $\boxed{(U_n)_{n \geq 1}}$ est strictement croissante.

1.b. Inégalité logarithmique, majoration et limite

Idée de méthode

Pour prouver $\ln(1+x) < x$, étudier la différence $h(x) = x - \ln(1+x)$: sa dérivée est immédiatement positive.

Pour $x \geq 0$, posons $h(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction est dérivable et

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Si $x > 0$, alors $h'(x) > 0$. Comme $h(0) = 0$, la stricte croissance entraîne $h(x) > 0$ pour tout $x > 0$, soit

$$\forall x > 0, \quad \ln(1+x) < x.$$

Appliquons cette inégalité à $x = 1/n > 0$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Multiplions par $n > 0$:

$$V_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1.$$

En appliquant l'exponentielle, nous obtenons

$$\forall n \geq 1, \quad U_n < e.$$

Calcul de la limite. Nous savons déjà que $V_n = f(n)$. Or, la partie (2) donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Comme $n \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1.$$

Enfin $U_n = e^{V_n}$ et la fonction exponentielle est continue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^1 = e.$$

On retrouve ainsi, par une démonstration fondée sur l'étude de f , la limite classique de la suite $(1 + 1/n)^n$.

2. Somme S_n , expression explicite et limites

Par définition,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{k}.$$

La question 1.a donne, pour chaque $k \geq 1$, $V_k = k \ln(1 + 1/k)$. Donc

$$\frac{V_k}{k} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

Substituons dans la somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n). \end{aligned}$$

Idée de méthode

C'est une **somme télescopique** : chaque terme $+\ln j$ est annulé par le terme $-\ln j$ qui apparaît juste après. Seuls le premier et le dernier logarithmes subsistent.

Après simplification,

$$S_n = \ln(n+1) - \ln 1.$$

Or $\ln 1 = 0$, d'où l'expression exacte

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \ln(n+1).$$

Première limite. Comme $n+1 \rightarrow +\infty$ et $\ln t \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Deuxième limite. Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\ln n} &= \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln n} \\ &= \frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}. \end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, le numérateur de la fraction tend vers $\ln 1 = 0$ et son dénominateur tend vers $+\infty$. On peut aussi encadrer directement :

$$0 < \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} < \frac{1}{n \ln n} \longrightarrow 0 \quad (n \geq 2),$$

grâce à l'inégalité démontrée en 1.b. Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1.$$

Synthèse des résultats

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0, \quad g(x) > 0; \\ f(0) &= 0, \quad f'(x) = g(x) > 0 \quad (x > 0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1; \\ \text{demi-tangente en } O : x &= 0, \quad \text{asymptote en } +\infty : y = 1; \\ V_n &= f(n), \quad U_n \nearrow e, \quad S_n = \ln(n+1), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1. \end{aligned}$$

Correction intégrale de l'exercice 5

Fonctions logarithmiques — 2^e année du baccalauréat

Énoncé. Soit f définie sur $[0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0. b) Étudier sa dérivabilité à droite en 0.
- 2) Calculer les limites de f de part et d'autre de e^{-1} .
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 4) Montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 5) Construire la courbe (C) .
- 6) Soit $n \geq 2$ entier. a) Montrer que $f(x) = \sqrt{n}$ admet deux solutions u_n, v_n avec $e^{-1} < u_n < 1 < v_n$.
 b1) Montrer que $v_n \geq \sqrt{n}$ et calculer $\lim v_n$.
 b2) Montrer que $(\forall x \geq 16) \sqrt{x} > 1 + \ln x$, puis en déduire que $(\forall n \geq 16) v_n \leq n$.
 b3) Montrer que $\ln v_n = \frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n)$ et en déduire $\lim \frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$.
 c1) Montrer que (u_n) est décroissante puis convergente.
 c2) Montrer que $u_n = e^{u_n/\sqrt{n}-1}$ et en déduire $\lim u_n = e^{-1}$.
 c3) Démontrer que $\lim \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) = e^{-2}$.

1. Étude au voisinage de zéro

1.a) Continuité à droite en 0. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $\ln x \rightarrow -\infty$. Ainsi, pour $0 < x < e^{-1}$, $1 + \ln x < 0$ et

$$|f(x)| = \frac{x}{|1 + \ln x|}.$$

Pour $0 < x \leq e^{-2}$, on a $1 + \ln x \leq -1$, donc $|1 + \ln x| \geq 1$ et

$$0 \leq |f(x)| \leq x.$$

Puisque $x \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Conclusion : f est continue à droite en 0.

1.b) Dérivabilité à droite en 0. Pour $x > 0$ suffisamment proche de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{1 + \ln x}}{x} = \frac{1}{1 + \ln x}.$$

Or $1 + \ln x \rightarrow -\infty$; donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Conclusion : $f'_+(0) = 0$. La courbe possède en $O(0, 0)$ une demi-tangente horizontale, d'équation $y = 0$.

2. Limites au voisinage de e^{-1}

Notons $a = e^{-1}$. Comme $\ln a = -1$, le dénominateur $1 + \ln x$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow a$, tandis que le numérateur tend vers $a > 0$.

Si $0 < x < a$, alors $\ln x < -1$, donc $1 + \ln x < 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Si $x > a$, alors $\ln x > -1$, donc $1 + \ln x > 0$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

La droite $x = e^{-1}$ est une asymptote verticale à (C) .

3. Étude au voisinage de $+\infty$

3.a) Limite de f . On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc

$$\frac{1 + \ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0^+.$$

En prenant l'inverse (les quantités étant positives pour $x > 1$),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \ln x)/x} = +\infty.$$

3.b) Branche infinie. Pour rechercher une direction asymptotique, calculons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + \ln x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Comme $f(x) \rightarrow +\infty$ alors que $f(x)/x \rightarrow 0$, (C) possède au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** (Ox) .

Il ne s'agit pas d'une asymptote horizontale : une telle asymptote exigerait que $f(x)$ tende vers une limite finie.

4. Dérivée et variations

Sur $]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$, on dérive un quotient. Avec $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + \ln x$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1/x$. Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(1 + \ln x) - x(1/x)}{(1 + \ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}. \end{aligned}$$

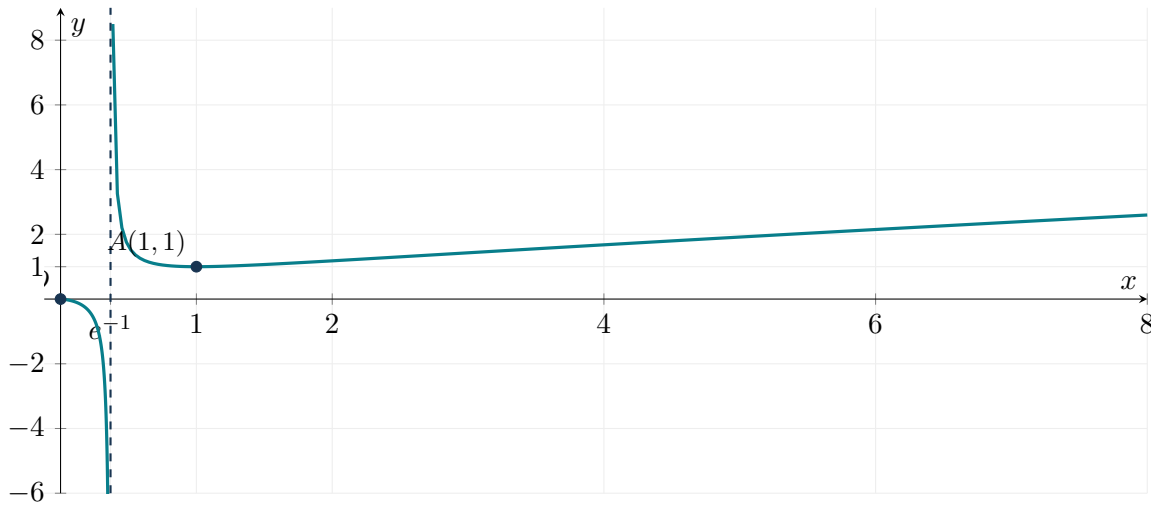
Le dénominateur est strictement positif sur le domaine de dérivation. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $\ln x$: négatif si $0 < x < 1$, nul si $x = 1$, positif si $x > 1$. En outre $f(1) = 1/(1 + 0) = 1$.

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	−		0	+
$f(x)$	0 ↘ −∞		−∞ ↘ 1	↗ +∞

Lecture du tableau : sur $[0, e^{-1}[$, f décroît de 0 vers $-\infty$; sur $]e^{-1}, 1]$, f décroît de $+\infty$ à 1 ; sur $[1, +\infty[$, f croît de 1 vers $+\infty$.

5. Construction de (C)

Pour tracer la courbe, plaçons d'abord $O(0,0)$ et $A(1,1)$. Traçons en pointillés l'asymptote verticale $x = e^{-1}$. En O , la demi-tangente est horizontale ; en A , la tangente est également horizontale puisque $f'(1) = 0$. La branche gauche descend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow e^{-1-}$. À droite de l'asymptote, la courbe descend de $+\infty$ jusqu'au minimum A , puis remonte vers $+\infty$ avec une direction parallèle à (Ox) .



6. Étude des solutions de $f(x) = \sqrt{n}$

Dans toute cette partie, n est un entier ≥ 2 ; donc $\sqrt{n} > 1$.

6.a) Existence et unicité des deux solutions. Sur $[0, e^{-1}[$, on a $1 + \ln x < 0$ pour $x > 0$, donc $f(x) < 0$; ainsi aucune solution n'y est possible.

Sur $]e^{-1}, 1]$, f est continue et strictement décroissante ; elle passe de $+\infty$ à 1. Comme $\sqrt{n} > 1$, le théorème des valeurs intermédiaires, puis la stricte monotonie, assurent une unique solution $u_n \in]e^{-1}, 1]$.

Sur $[1, +\infty[$, f est continue et strictement croissante ; elle passe de 1 à $+\infty$. Il existe donc une unique solution $v_n \in]1, +\infty[$.

$$e^{-1} < u_n < 1 < v_n, \quad f(u_n) = f(v_n) = \sqrt{n}.$$

6.b1) Minoration et limite de v_n . Puisque $v_n > 1$, on a $\ln v_n > 0$, d'où $1 + \ln v_n \geq 1$. Or

$$\frac{v_n}{1 + \ln v_n} = \sqrt{n} \iff v_n = \sqrt{n}(1 + \ln v_n).$$

Par conséquent $v_n \geq \sqrt{n}$. Puisque $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

6.b2) Démonstration de $\sqrt{x} > 1 + \ln x$ pour $x \geq 16$. Posons

$$h(x) = \sqrt{x} - 1 - \ln x \quad (x \geq 16).$$

Cette fonction est dérivable et

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}.$$

Pour $x \geq 16$, $\sqrt{x} \geq 4 > 2$, donc $h'(x) > 0$. La fonction h est strictement croissante sur $[16, +\infty[$. En outre

$$h(16) = 4 - 1 - \ln 16 = 3 - \ln 16 > 0,$$

car $\ln 16 = 4 \ln 2 < 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ (on peut aussi constater $e^3 > 16$). Ainsi $h(x) \geq h(16) > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \geq 16, \quad \sqrt{x} > 1 + \ln x.}$$

Application à v_n . Pour $n \geq 16$, on a $\sqrt{n} > 1 + \ln n$ et donc

$$f(n) = \frac{n}{1 + \ln n} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} = f(v_n).$$

Les deux nombres n et v_n sont supérieurs à 1, et f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit $\boxed{v_n < n}$, donc en particulier $\boxed{v_n \leq n}$.

6.b3) Limite du rapport des logarithmes. L'égalité $f(v_n) = \sqrt{n}$ donne

$$v_n = \sqrt{n}(1 + \ln v_n).$$

Les facteurs sont positifs, donc on peut prendre le logarithme :

$$\ln v_n = \ln \sqrt{n} + \ln(1 + \ln v_n) = \boxed{\frac{1}{2} \ln n + \ln(1 + \ln v_n)}.$$

Pour $n \geq 16$, $1 < v_n \leq n$; puisque le logarithme est croissant,

$$0 < \ln v_n \leq \ln n \implies 0 < \ln(1 + \ln v_n) \leq \ln(1 + \ln n).$$

Comme $\ln n > 0$, on peut diviser :

$$0 \leq \frac{\ln(1 + \ln v_n)}{\ln n} \leq \frac{\ln(1 + \ln n)}{\ln n}.$$

Or, en posant $t = \ln n \rightarrow +\infty$, le membre de droite devient $\ln(1 + t)/t \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$\frac{\ln(1 + \ln v_n)}{\ln n} \longrightarrow 0.$$

En divisant l'égalité encadrée plus haut par $\ln n$,

$$\frac{\ln v_n}{\ln n} = \frac{1}{2} + \frac{\ln(1 + \ln v_n)}{\ln n} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}.$$

6.c1) Monotonie et convergence de (u_n) . Comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, on a

$$f(u_{n+1}) = \sqrt{n+1} > \sqrt{n} = f(u_n).$$

Or f est *strictement décroissante* sur $]e^{-1}, 1[$. Les inégalités sur les images sont donc inversées pour les antécédents :

$$\boxed{u_{n+1} < u_n}.$$

Ainsi (u_n) est strictement décroissante. Comme $u_n > e^{-1}$ pour tout $n \geq 2$, elle est minorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle converge vers un réel $\ell \geq e^{-1}$.

6.c2) Valeur de la limite. Puisque $f(u_n) = \sqrt{n}$,

$$\frac{u_n}{1 + \ln u_n} = \sqrt{n} \iff 1 + \ln u_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$$

D'où $\ln u_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1$ et, par exponentiation,

$$\boxed{u_n = e^{\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1}}.$$

Comme $0 < u_n < 1$, on a $0 < \frac{u_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Par encadrement, $u_n/\sqrt{n} \rightarrow 0$. La continuité de l'exponentielle fournit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}.$$

6.c3) Limite de $\sqrt{n}(u_n - e^{-1})$. Repartons de la relation exacte obtenue en c2 :

$$u_n = e^{-1} e^{u_n/\sqrt{n}}.$$

En soustrayant e^{-1} , puis en multipliant par $\sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) &= e^{-1} \sqrt{n} (e^{u_n/\sqrt{n}} - 1) \\ &= e^{-1} u_n \frac{e^{u_n/\sqrt{n}} - 1}{u_n/\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

La dernière écriture est légitime puisque $u_n > 0$. Posons $t_n = u_n/\sqrt{n}$; nous avons déjà montré que $t_n \rightarrow 0$. On utilise la limite fondamentale de l'exponentielle

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) = e^{-1} \times \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}_{e^{-1}} \times 1 = \boxed{e^{-2}}.$$

Bilan. Les deux solutions de $f(x) = \sqrt{x}$ vérifient

$$u_n \searrow e^{-1}, \quad v_n \longrightarrow +\infty, \quad \frac{\ln v_n}{\ln n} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \sqrt{n}(u_n - e^{-1}) \longrightarrow e^{-2}.$$

Correction détaillée — Exercice 6

Fonctions logarithmiques et suites définies implicitement

Énoncé

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x.$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.
- 2) Calculer $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variation de f_n .
- 3.a) Montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n < e^2$.
- 3.b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}$ et déduire la monotonie de (u_n) .
- 3.c) Montrer que $\ln u_n = 2 - \frac{2}{n} u_n$.
- 3.d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} u_n$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$.
- 4.a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $d > 0$ tel que

$$e^{\frac{2}{n} u_n} - 1 = \frac{2e^d}{n} u_n.$$

- 4.b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq \frac{e^{\frac{2}{n} u_n} - 1}{\frac{2}{n} u_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}},$$

puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n)$.

1. Limites de la fonction f_n

Le logarithme népérien n'est défini que pour $x > 0$. Par conséquent, le domaine de définition est

$$D_{f_n} =]0, +\infty[.$$

Dans toute l'étude de f_n , l'entier $n \geq 1$ est fixé.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$. On sait que $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$. Comme $n/2 > 0$, on a aussi $(n/2) \ln x \rightarrow +\infty$. Le terme $-n$ est constant. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$. On a $x \rightarrow 0$, tandis que $\ln x \rightarrow -\infty$. Puisque $n/2 > 0$, il vient $(n/2) \ln x \rightarrow -\infty$. Les termes x et $-n$ restent bornés. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty.$$

2. Dérivée et tableau de variations

Pour $x > 0$, la dérivée de x vaut 1, celle de la constante $-n$ vaut 0, et celle de $\ln x$ vaut $1/x$. Par linéarité,

$$f'_n(x) = 1 + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x + n}{2x}.$$

Comme $x > 0$ et $n \geq 1$, le numérateur $2x + n$ et le dénominateur $2x$ sont strictement positifs. Donc

$$\forall x > 0, \quad f'_n(x) > 0.$$

Par le théorème de monotonie, f_n est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

x	0^+	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. Étude de la suite (u_n)

3.a. Existence, unicité et encadrement

Existence. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, car elle est somme de fonctions continues sur cet intervalle. D'après la question 1, ses valeurs vont de $-\infty$ à $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc qu'il existe au moins un réel $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

Unicité. La fonction f_n est strictement croissante : elle ne peut donc prendre la valeur 0 en deux points distincts. La solution u_n est unique.

Encadrement. Calculons d'abord

$$f_n(1) = 1 - n + \underbrace{\frac{n}{2} \ln 1}_{=0} = 1 - n \leq 0 \quad (n \geq 1).$$

Puis

$$\begin{aligned} f_n(e^2) &= e^2 - n + \frac{n}{2} \ln(e^2) \\ &= e^2 - n + \frac{n}{2} \cdot 2 = e^2 > 0. \end{aligned}$$

Puisque f_n est strictement croissante et s'annule en u_n , les inégalités $f_n(1) \leq 0 < f_n(e^2)$ donnent

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 1 \leq u_n < e^2.}$$

Précision : pour $n = 1$, $f_1(1) = 0$ et donc $u_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, $f_n(1) = 1 - n < 0$, donc $u_n > 1$.

3.b. Calcul de $f_n(u_{n+1})$ et monotonie

Par définition de u_{n+1} , on sait que

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0.$$

En développant cette égalité,

$$u_{n+1} - (n+1) + \frac{n+1}{2} \ln u_{n+1} = 0.$$

D'autre part,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n + \frac{n}{2} \ln u_{n+1}.$$

Soustrayons les deux expressions :

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) - f_{n+1}(u_{n+1}) &= [-n + (n+1)] + \left(\frac{n}{2} - \frac{n+1}{2}\right) \ln u_{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, nous obtenons

$$f_n(u_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1}.$$

Or $u_{n+1} < e^2$, donc, puisque $\ln$ est strictement croissante,

$$\ln u_{n+1} < \ln(e^2) = 2.$$

En divisant par 2 et en soustrayant à 1, il vient

$$1 - \frac{1}{2} \ln u_{n+1} > 0.$$

Ainsi $f_n(u_{n+1}) > 0$, tandis que $f_n(u_n) = 0$. Comme f_n est strictement croissante,

$$f_n(u_n) < f_n(u_{n+1}) \implies u_n < u_{n+1}.$$

$$(u_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement croissante.}$$

De plus, elle est majorée par e^2 (question 3.a). Le théorème de convergence des suites monotones garantit donc qu'elle converge vers une limite réelle $\ell \leq e^2$.

3.c. Expression de $\ln u_n$

L'égalité caractéristique $f_n(u_n) = 0$ s'écrit

$$u_n - n + \frac{n}{2} \ln u_n = 0.$$

Isolons le terme logarithmique :

$$\frac{n}{2} \ln u_n = n - u_n.$$

Comme $n > 0$, on peut multiplier les deux membres par $2/n$:

$$\ln u_n = 2 - \frac{2u_n}{n}.$$

3.d. Limites de $\frac{2u_n}{n}$ et de u_n

D'après la question 3.a, $1 \leq u_n < e^2$. En multipliant par le nombre positif $2/n$,

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2u_n}{n} < \frac{2e^2}{n}.$$

Les deux bornes tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2u_n}{n} = 0.$$

Utilisons maintenant l'identité de 3.c :

$$\ln u_n = 2 - \frac{2u_n}{n}.$$

Le membre de droite tend vers 2 ; ainsi $\ln u_n \rightarrow 2$. En appliquant la fonction exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$,

$$u_n = e^{\ln u_n} \longrightarrow e^2.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2.$$

4. Vitesse de convergence vers e^2

4.a. Application du théorème des accroissements finis

Fixons $n \geq 1$ et posons $a_n = \frac{2u_n}{n}$. Comme $u_n \geq 1$ et $n > 0$, on a $a_n > 0$.

Considérons $h(t) = e^t$. Cette fonction est continue sur $[0, a_n]$ et dérivable sur $]0, a_n[$, avec $h'(t) = e^t$. Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un nombre $d_n \in]0, a_n[$ tel que

$$h(a_n) - h(0) = h'(d_n)(a_n - 0).$$

En remplaçant h et a_n par leurs expressions,

$$e^{\frac{2u_n}{n}} - 1 = e^{d_n} \frac{2u_n}{n}.$$

Donc

$$\exists d_n \in \left] 0, \frac{2u_n}{n} \right[: e^{\frac{2u_n}{n}} - 1 = \frac{2e^{d_n}}{n} u_n.$$

4.b. Encadrement et limite de $n(e^2 - u_n)$

Puisque $0 < d_n < \frac{2u_n}{n}$ et que l'exponentielle est strictement croissante,

$$1 = e^0 < e^{d_n} < e^{\frac{2u_n}{n}}.$$

Or $u_n < e^2$; donc $\frac{2u_n}{n} < \frac{2e^2}{n}$, puis

$$e^{\frac{2u_n}{n}} < e^{\frac{2e^2}{n}}.$$

En combinant ces inégalités,

$$1 < e^{d_n} < e^{\frac{2e^2}{n}}.$$

D'après 4.a, puisque $\frac{2u_n}{n} > 0$,

$$\frac{e^{\frac{2u_n}{n}} - 1}{\frac{2u_n}{n}} = e^{d_n}.$$

Ainsi l'encadrement demandé est bien établi :

$$1 \leq \frac{e^{\frac{2u_n}{n}} - 1}{\frac{2u_n}{n}} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{2e^2}{n} \rightarrow 0$ et, par continuité de l'exponentielle, $e^{\frac{2e^2}{n}} \rightarrow 1$. Le théorème des gendarmes donne donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2u_n}{n}} - 1}{\frac{2u_n}{n}} = 1.$$

Dernière étape : calculons $n(e^2 - u_n)$. L'identité de 3.c donne

$$\ln u_n = 2 - \frac{2u_n}{n}.$$

En prenant l'exponentielle des deux membres,

$$u_n = e^{2 - \frac{2u_n}{n}} = e^2 e^{-\frac{2u_n}{n}}.$$

Multiplions par $e^{\frac{2u_n}{n}}$:

$$u_n e^{\frac{2u_n}{n}} = e^2.$$

Soustrayons u_n :

$$e^2 - u_n = u_n \left(e^{\frac{2u_n}{n}} - 1 \right).$$

Multiplions par n :

$$n(e^2 - u_n) = nu_n \left(e^{\frac{2u_n}{n}} - 1 \right).$$

Pour utiliser le quotient dont nous venons de calculer la limite, multiplions et divisons par $\frac{2u_n}{n}$:

$$\begin{aligned} n(e^2 - u_n) &= nu_n \cdot \frac{2u_n}{n} \cdot \frac{e^{\frac{2u_n}{n}} - 1}{\frac{2u_n}{n}} \\ &= 2u_n^2 \cdot \frac{e^{\frac{2u_n}{n}} - 1}{\frac{2u_n}{n}}. \end{aligned}$$

D'après la question 3.d, $u_n \rightarrow e^2$, donc $2u_n^2 \rightarrow 2e^4$. Le second facteur tend vers 1. Par la règle du produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n) = 2e^4.$$

Interprétation : la différence $e^2 - u_n$ est positive et tend vers 0 ; plus précisément, elle est du même ordre que $\frac{2e^4}{n}$.

Bilan

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 1 + \frac{n}{2x} > 0, & 1 \leq u_n < e^2, \\ u_n &< u_{n+1}, & \ln u_n = 2 - \frac{2u_n}{n}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= e^2, & \lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^2 - u_n) = 2e^4. \end{aligned}$$