

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x)^4, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

$$1) \quad 2 \ln(x-2) - \ln(x+3) = 0, \quad (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0, \quad (\ln x)^3 - \ln x = 0.$$

$$2) \quad \ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0, \quad \ln x - 2 \geq \frac{4}{\ln x}, \quad \ln x > -1 + \ln 2.$$

Exercice 3

$$1) \quad \text{montrer que } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad \ln(1+x) \leq x \leq (x+1) \ln(1+x).$$

$$2) \quad \text{a) montrer que : } \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

$$\text{b) en déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}.$$

Exercice 4

$$1) \quad \text{a) montrer que } (\forall t \in]0, +\infty[) \quad \ln t \leq t - 1.$$

$$\text{b) en déduire que } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad x \ln x \geq x - 1.$$

$$2) \quad \text{montrer que } (\forall x \in [1, +\infty[) \quad x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

$$3) \quad \text{soit } f \text{ la fonction définie sur }]0, +\infty[\text{ par : } f(x) = x \ln x$$

$$\text{a) étudier le sens de variation de } f \text{ puis dresser le tableau de variations}$$

$$\text{b) soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ montrer que l'équation } f(x) = \frac{1}{n} \text{ admet une seule solution } a_n \text{ et } 1 < a_n < e$$

$$\text{c) étudier la monotonie de } (a_n)_{n \geq 1} \text{ et déduire qu'elle est convergente}$$

$$\text{d) montrer que } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ puis calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^2 - 2n \ln x$$

$$1) \quad \text{a) calculer les limites } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$\text{b) étudier les variations de } f_n \text{ et donner le tableau de variations}$$

$$2) \quad \text{montrer que } f_n(x) = 0 \text{ admet deux solutions } u_n \text{ et } v_n \text{ telles que } u_n < \sqrt{n} < v_n$$

- 3) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{2}$
- 4) a) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \geq 1$
- b) vérifier que $f_{n+1}(u_n) = -\ln u_n$ en déduire que $(u_n)_n$ est convergente
- c) montrer que $(\forall n \geq 3) \quad u_n \leq e^{\frac{3}{2n}}$ en déduire la limite de $(u_n)_n$

Exercice 6

- 1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \ln x \leq x - 1$
- 2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1; x_2; \dots; x_n, \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}_+^*$
Tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$
- a) Montrer que pour tout k de $\{1; 2; \dots; n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$
- b) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right)$
- c) Montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right)$
- d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$
- e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
- En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1; x_2; \dots; x_n$ de $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 7

- 1) montrer que $(\forall x > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
- 2) on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour tout entier naturel n non nul
- a) calculer $U_1; U_2$
- b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)
- 3) on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour n de $\mathbb{N}^*$.
montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Soit x de $]0, +\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$$

- 1) montrer que φ vérifie les conditions de Rolle sur $[0, x]$
- 2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$
- 3) déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- 4) déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Exercice 1

Fonctions logarithmiques

Correction complète et détaillée

Énoncé

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$.
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x)^4$.
- 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$.
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)}$.
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)$.
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

Rappels utiles

Nous utiliserons les limites fondamentales :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier $p \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^a} = 0.$$

Nous donnerons également des démonstrations par encadrement lorsque cela simplifie le raisonnement.

1. Première limite

Calculons :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Étape 1 : reconnaître une limite usuelle.

Nous savons que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

Pour faire apparaître cette expression, multiplions et divisons par x :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Étape 2 : effectuer le changement de variable.

Posons $u = x^2$.

Lorsque $x \rightarrow 0$, nous avons $u \rightarrow 0$.

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1.$$

D'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Étape 3 : conclure par produit.

$$L_1 = 0 \times 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$$

2. Deuxième limite

Calculons :

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}.$$

Au voisinage de zéro, $\cos x > 0$: le logarithme est donc bien défini.

Étape 1 : transformer le logarithme.

Puisque :

$$\cos x = 1 + (\cos x - 1),$$

nous pouvons écrire, pour $x \neq 0$ proche de zéro :

$$\frac{\ln(\cos x)}{x} = \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Étape 2 : étudier le premier facteur.

Posons $u = \cos x - 1$.

Lorsque $x \rightarrow 0$:

$$u \rightarrow \cos 0 - 1 = 0.$$

La limite fondamentale du logarithme donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} = 1.$$

Étape 3 : étudier le second facteur.

Utilisons l'identité trigonométrique :

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Ainsi :

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sin(x/2)}{x/2}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Étape 4 : conclure.

$$L_2 = 1 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$$

3. Troisième limite

Calculons :

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^4.$$

Nous avons :

$$x^3 \rightarrow 0, \quad (\ln x)^4 \rightarrow +\infty.$$

Il s'agit donc d'une forme indéterminée du type $0 \times +\infty$.

Étape 1 : changer de variable.

Posons :

$$t = \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, alors $t \rightarrow +\infty$.

De plus :

$$x = \frac{1}{t}, \quad \ln x = -\ln t.$$

Par conséquent :

$$x^3(\ln x)^4 = \frac{(-\ln t)^4}{t^3} = \frac{(\ln t)^4}{t^3}.$$

Étape 2 : établir un encadrement.

Nous utilisons l'inégalité classique :

$$\forall y > 0, \quad \ln y \leq y - 1.$$

Pour $t \geq 1$, prenons :

$$y = t^{1/4}.$$

Nous obtenons :

$$\ln(t^{1/4}) \leq t^{1/4} - 1.$$

Donc :

$$\frac{1}{4} \ln t \leq t^{1/4} - 1 \leq t^{1/4}.$$

Ainsi :

$$0 \leq \ln t \leq 4t^{1/4}.$$

Élevons les trois membres à la puissance quatre :

$$0 \leq (\ln t)^4 \leq 256t.$$

Puis divisons par $t^3 > 0$:

$$0 \leq \frac{(\ln t)^4}{t^3} \leq \frac{256}{t^2}.$$

Étape 3 : appliquer le théorème des gendarmes.

Comme :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{256}{t^2} = 0,$$

nous obtenons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^4}{t^3} = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^4 = 0$$

4. Quatrième limite

Calculons :

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right).$$

Étape 1 : utiliser les propriétés du logarithme.

Pour $x > 0$:

$$\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \ln(1+x) - \ln x.$$

Ainsi :

$$\sqrt{x} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \sqrt{x} \ln(1+x) - \sqrt{x} \ln x.$$

Nous allons étudier séparément les deux termes.

Étape 2 : premier terme.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$\sqrt{x} \rightarrow 0, \quad \ln(1+x) \rightarrow 0.$$

Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(1+x) = 0.$$

Étape 3 : second terme.

Posons :

$$t = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Alors :

$$t \rightarrow +\infty, \quad \sqrt{x} = \frac{1}{t}, \quad x = \frac{1}{t^2}.$$

Donc :

$$\ln x = -2 \ln t.$$

Par conséquent :

$$\sqrt{x} \ln x = -2 \frac{\ln t}{t}.$$

Or :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

Étape 4 : conclure par différence.

$$L_4 = 0 - 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = 0$$

5. Cinquième limite

Calculons :

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)}.$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$.

Nous rencontrons une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Étape 1 : factoriser dans les logarithmes.

Pour $x > 0$:

$$2 + 3\sqrt{x} = \sqrt{x} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right).$$

Par conséquent :

$$\ln(2 + 3\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x + \ln \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right).$$

De même :

$$1 + 2x^2 = x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Donc :

$$\ln(1 + 2x^2) = 2 \ln x + \ln \left(2 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Étape 2 : remplacer dans le quotient.

$$\frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)} = \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}{2 \ln x + \ln \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}.$$

Pour $x > 1$, divisons le numérateur et le dénominateur par $\ln x$:

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\ln(3+2/\sqrt{x})}{\ln x}}{2 + \frac{\ln(2+1/x^2)}{\ln x}}.$$

Étape 3 : calculer les limites.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\ln \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \rightarrow \ln 3,$$

$$\ln \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow \ln 2,$$

et :

$$\ln x \rightarrow +\infty.$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(3 + 2/\sqrt{x})}{\ln x} \rightarrow 0$$

et :

$$\frac{\ln(2 + 1/x^2)}{\ln x} \rightarrow 0.$$

Étape 4 : conclure.

$$L_5 = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2 + 0} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + 3\sqrt{x})}{\ln(1 + 2x^2)} = \frac{1}{4}$$

6. Sixième limite

Calculons :

$$L_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}.$$

Étape 1 : encadrer $\ln(x+1)$.

Pour $x \geq 1$:

$$x + 1 \leq 2x.$$

La fonction logarithme étant croissante :

$$\ln(x+1) \leq \ln(2x).$$

Or :

$$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x.$$

Donc :

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 + \ln x.$$

Étape 2 : multiplier par un facteur positif.

Pour $x \geq 1$:

$$\frac{\ln x}{x} \geq 0.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$0 \leq \frac{\ln x \ln(x+1)}{x} \leq \frac{\ln x (\ln 2 + \ln x)}{x}.$$

En développant le dernier membre :

$$0 \leq \frac{\ln x \ln(x+1)}{x} \leq \ln 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Étape 3 : étudier les deux termes majorants.

Nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Pour le second terme, appliquons :

$$\ln y \leq y - 1$$

avec $y = x^{1/4}$, pour $x \geq 1$.

Alors :

$$\frac{1}{4} \ln x \leq x^{1/4} - 1 \leq x^{1/4}.$$

Donc :

$$0 \leq \ln x \leq 4x^{1/4}.$$

En élevant au carré :

$$0 \leq (\ln x)^2 \leq 16\sqrt{x}.$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{16}{\sqrt{x}}.$$

Comme :

$$\frac{16}{\sqrt{x}} \rightarrow 0,$$

nous avons :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} \rightarrow 0.$$

Étape 4 : conclure par encadrement.

Le majorant tend vers zéro. Le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x} = 0$$

7. Septième limite

Calculons :

$$L_7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right).$$

Étape 1 : transformer la fraction.

Remarquons que :

$$2x + 1 = (2x + 3) - 2.$$

Par conséquent :

$$\frac{2x + 1}{2x + 3} = 1 - \frac{2}{2x + 3}.$$

Ainsi :

$$x \ln \left(\frac{2x + 1}{2x + 3} \right) = x \ln \left(1 - \frac{2}{2x + 3} \right).$$

Étape 2 : faire apparaître la limite fondamentale.

Posons :

$$u = -\frac{2}{2x + 3}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, alors $u \rightarrow 0$.

Nous pouvons écrire :

$$x \ln(1 + u) = xu \frac{\ln(1 + u)}{u}.$$

Or :

$$xu = -\frac{2x}{2x + 3}.$$

Donc :

$$x \ln \left(\frac{2x + 1}{2x + 3} \right) = -\frac{2x}{2x + 3} \frac{\ln(1 + u)}{u}.$$

Étape 3 : calculer les limites.

En divisant par x :

$$-\frac{2x}{2x + 3} = -\frac{2}{2 + 3/x}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x}{2x + 3} = -1.$$

Par ailleurs :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1.$$

Étape 4 : conclure par produit.

$$L_7 = (-1) \times 1 = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right) = -1$$

8. Huitième limite

Calculons :

$$L_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}.$$

Étape 1 : utiliser une inégalité classique.

Pour tout $y > 0$:

$$\ln y \leq y - 1.$$

Pour $x \geq 1$, choisissons :

$$y = x^{1/3}.$$

Nous obtenons :

$$\ln(x^{1/3}) \leq x^{1/3} - 1.$$

Or :

$$\ln(x^{1/3}) = \frac{1}{3} \ln x.$$

Donc :

$$\frac{1}{3} \ln x \leq x^{1/3} - 1 \leq x^{1/3}.$$

En multipliant par 3 :

$$0 \leq \ln x \leq 3x^{1/3}.$$

Étape 2 : élever à la puissance trois.

Tous les termes sont positifs, donc :

$$0 \leq (\ln x)^3 \leq 27x.$$

En divisant par $x^2 > 0$:

$$0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{27}{x}.$$

Étape 3 : appliquer le théorème des gendarmes.

Nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{27}{x} = 0.$$

Par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$$

Bilan des huit limites

$$\begin{array}{ll} L_1 = 0, & L_2 = 0, \\ L_3 = 0, & L_4 = 0, \\ L_5 = \frac{1}{4}, & L_6 = 0, \\ L_7 = -1, & L_8 = 0. \end{array}$$

Correction détaillée – Exercice 2

Équations et inéquations logarithmiques

Rappels essentiels

Le logarithme $\ln A$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A > 0$. Pour $A > 0$ et $B > 0$:

$$\ln A + \ln B = \ln(AB), \quad \ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right), \quad k \ln A = \ln(A^k).$$

De plus, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, et la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour $A, B > 0$, $\ln A < \ln B \iff A < B$.

1. Résolution des trois équations

1.a) $2 \ln(x - 2) - \ln(x + 3) = 0$

Domaine de définition. Les deux logarithmes existent lorsque

$$x - 2 > 0 \quad \text{et} \quad x + 3 > 0,$$

soit $x > 2$. On travaille donc sur $D =]2, +\infty[$.

Transformation. Puisque $x - 2 > 0$, on a $2 \ln(x - 2) = \ln((x - 2)^2)$. L'équation devient

$$\begin{aligned} \ln((x - 2)^2) &= \ln(x + 3) \\ \iff (x - 2)^2 &= x + 3 \\ \iff x^2 - 4x + 4 &= x + 3 \\ \iff x^2 - 5x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 21$. Les racines sont

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

Comme $\sqrt{21} > 1$, $x_1 < (5 - 1)/2 = 2$: cette racine est exclue. Comme $\sqrt{21} > 0$, $x_2 > 5/2 > 2$: elle est admise.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

1.b) $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$

Domaine : $x > 0$.

Astuce : posons $t = \ln x$. L'équation est un trinôme du second degré en t :

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t - 1)(t - 2) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc $t = 1$ ou $t = 2$, c'est-à-dire

$$\ln x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = 2.$$

En utilisant $\ln(e^a) = a$, on obtient $x = e$ ou $x = e^2$. Les deux nombres sont positifs.

$$\mathcal{S} = \{e, e^2\}$$

1.c) $(\ln x)^3 - \ln x = 0$

Domaine : $x > 0$.

Posons $t = \ln x$. Alors

$$\begin{aligned} t^3 - t &= 0 \\ t(t^2 - 1) &= 0 \\ t(t-1)(t+1) &= 0. \end{aligned}$$

Donc $t = 0$, $t = 1$ ou $t = -1$. En revenant à x :

$$\ln x = 0 \iff x = 1, \quad \ln x = 1 \iff x = e, \quad \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Les trois solutions appartiennent à $]0, +\infty[$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{e}, 1, e \right\}$$

2. Résolution des trois inéquations

2.a) $\ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0$

Étape 1 : déterminer le domaine. Il faut simultanément

$$x^2 - x = x(x-1) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3x+4} > 0.$$

Le premier produit est positif si $x < 0$ ou $x > 1$; la deuxième condition équivaut à $3x+4 > 0$, soit $x > -4/3$. En prenant l'intersection :

$$D = \left] -\frac{4}{3}, 0 \right[\cup]1, +\infty[.$$

Étape 2 : regrouper les logarithmes. Sur D , leurs arguments sont strictement positifs. Donc

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0 &\iff \ln\left(\frac{x^2 - x}{3x+4}\right) < \ln 1 \\ &\iff \frac{x^2 - x}{3x+4} < 1. \end{aligned}$$

Sur D , $3x+4 > 0$: on peut multiplier par ce nombre sans changer le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x}{3x+4} < 1 &\iff x^2 - x < 3x+4 \\ &\iff x^2 - 4x - 4 < 0. \end{aligned}$$

Étape 3 : étudier le signe du trinôme. Son discriminant est

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-4) = 32 = (4\sqrt{2})^2.$$

Ses deux racines sont

$$\alpha = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}, \quad \beta = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Le coefficient de x^2 étant positif, le trinôme est strictement négatif *entre* ses racines :

$$x^2 - 4x - 4 < 0 \iff 2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2}.$$

Étape 4 : tenir compte du domaine. Comme $-4/3 < 2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $1 < 2 + 2\sqrt{2}$, l'intersection avec D donne deux intervalles. En particulier, $x = 0$ et $x = 1$ sont interdits.

$$\mathcal{S} =]2 - 2\sqrt{2}, 0[\cup]1, 2 + 2\sqrt{2}[$$

2.b) $\ln x - 2 \geq \frac{4}{\ln x}$

Étape 1 : domaine. Il faut $x > 0$ pour définir $\ln x$, et $\ln x \neq 0$ car il est au dénominateur. Ainsi

$$D =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Étape 2 : changement de variable. Posons $t = \ln x$, avec $t \neq 0$. L'inéquation devient

$$\begin{aligned} t - 2 &\geq \frac{4}{t} \\ \iff t - 2 - \frac{4}{t} &\geq 0 \\ \iff \frac{t^2 - 2t - 4}{t} &\geq 0. \end{aligned}$$

Attention : il ne faut pas multiplier immédiatement par t , car son signe est inconnu.

Étape 3 : racines et signes. Pour $P(t) = t^2 - 2t - 4$, on a

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-4) = 20 = (2\sqrt{5})^2.$$

Les racines sont $a = 1 - \sqrt{5} < 0$ et $b = 1 + \sqrt{5} > 0$. Comme le coefficient dominant est positif, $P(t)$ est positif à l'extérieur de $[a, b]$ et négatif à l'intérieur. En tenant compte du signe de t :

t	$] -\infty, a[$	a	$]a, 0[$	0	$]0, b[$	b	$]b, +\infty[$
$P(t)$	+	0	-	-	-	0	+
t	-	-	-	0	+	+	+
$P(t)/t$	-	0	+	ND	-	0	+

Ainsi, $\frac{P(t)}{t} \geq 0$ si et seulement si

$$t \in [a, 0[\cup [b, +\infty[.$$

Étape 4 : revenir à x . La fonction exponentielle est strictement croissante. Par conséquent,

$$\begin{aligned} a \leq \ln x < 0 &\iff e^a \leq x < 1, \\ \ln x \geq b &\iff x \geq e^b. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = [e^{1-\sqrt{5}}, 1[\cup [e^{1+\sqrt{5}}, +\infty[$$

2.c) $\ln x > -1 + \ln 2$

Étape 1 : domaine. Il faut $x > 0$.

Étape 2 : écrire le membre de droite sous la forme d'un seul logarithme. Puisque $-1 = \ln(e^{-1})$,

$$-1 + \ln 2 = \ln(e^{-1}) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2}{e}\right).$$

L'inéquation s'écrit alors

$$\ln x > \ln\left(\frac{2}{e}\right).$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, on conserve le sens de l'inégalité :

$$x > \frac{2}{e}.$$

Cette condition implique déjà $x > 0$, puisque $2/e > 0$.

$$\mathcal{S} = \left] \frac{2}{e}, +\infty \right[$$

Bilan des réponses

1.a) $\left\{ \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$

1.b) $\{e, e^2\}$

1.c) $\left\{ \frac{1}{e}, 1, e \right\}$

2.a) $]2 - 2\sqrt{2}, 0[\cup]1, 2 + 2\sqrt{2}[$

2.b) $[e^{1-\sqrt{5}}, 1[\cup [e^{1+\sqrt{5}}, +\infty[$

2.c) $]2/e, +\infty[.$

Exercice 3 — Correction détaillée

Logarithme népérien, produits et limites de suites

Énoncé. Pour tout $x > 0$, montrer que

$$\ln(1+x) \leq x \leq (1+x) \ln(1+x).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

1. Encadrement de x par des expressions logarithmiques

On souhaite établir, pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x \leq (1+x) \ln(1+x)}.$$

Première inégalité : $\ln(1+x) \leq x$.

Idée : ramener l'inégalité à l'étude du signe d'une fonction. Posons, sur $[0, +\infty[$,

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

Cette fonction est dérivable et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour $x \geq 0$, on a $x \geq 0$ et $1+x > 0$, donc $f'(x) \geq 0$. La fonction f est ainsi croissante sur $[0, +\infty[$.
Or

$$f(0) = 0 - \ln 1 = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x}.$$

Deuxième inégalité : $x \leq (1+x) \ln(1+x)$.

Posons, sur $[0, +\infty[$,

$$g(x) = (1+x) \ln(1+x) - x.$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, nous obtenons

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x). \end{aligned}$$

Pour $x \geq 0$, on a $1+x \geq 1$, donc $\ln(1+x) \geq \ln 1 = 0$. Ainsi $g'(x) \geq 0$ et g est croissante. De plus,

$$g(0) = 1 \cdot \ln 1 - 0 = 0.$$

Il en résulte que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, soit

$$x \leq (1+x) \ln(1+x).$$

En réunissant les deux résultats, on obtient bien

$$\forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leq x \leq (1+x) \ln(1+x).$$

Remarque : les inégalités sont même strictes lorsque $x > 0$; l'énoncé demande seulement des inégalités larges.

2.a. Encadrement de e^n par deux produits

Étape 1 : appliquer la question 1 à $x = \frac{1}{k}$.

Soit $k \geq 1$ un entier. Comme $1/k > 0$, la question précédente donne

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

En multipliant les trois membres par $k > 0$, le sens des inégalités ne change pas :

$$k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 1 \leq (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Étape 2 : additionner les inégalités.

Nous appliquons cette relation successivement à $k = 1, 2, \dots, n$. En additionnant membre à membre, nous trouvons

$$\sum_{k=1}^n k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} \leq \sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

D'où

$$\sum_{k=1}^n k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq n \leq \sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Étape 3 : passer des sommes aux produits.

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut exponentier les trois membres :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \leq e^n \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Rappelons les deux propriétés suivantes, valables pour $a > 0$:

$$e^{m \ln a} = a^m, \quad e^{A_1 + \dots + A_n} = e^{A_1} \dots e^{A_n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{k=1}^n k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \\ \exp\left(\sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons exactement le résultat demandé :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

2.b. Calcul de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Étape 1 : simplifier les deux produits.

L'astuce consiste à écrire

$$1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Pour le produit de gauche, notons

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{2^1}{1^1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdots \frac{(n+1)^n}{n^n}.$$

Chaque entier j compris entre 2 et n apparaît au numérateur avec l'exposant $j-1$ et au dénominateur avec l'exposant j . Il reste donc un facteur $1/j$. Ainsi

$$P_n = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot 3 \cdots n} = \boxed{\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

Pour le produit de droite, notons

$$Q_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1}.$$

On peut éviter un nouveau calcul en remarquant que

$$\begin{aligned} Q_n &= \left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \right] \left[\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right] \\ &= P_n \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Dans le second produit, tous les facteurs intermédiaires se simplifient :

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Par suite,

$$Q_n = \frac{(n+1)^n}{n!} (n+1) = \boxed{\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}}.$$

Étape 2 : encadrer $n!$.

En remplaçant les deux produits dans la question 2.a, nous obtenons

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Puisque $n! > 0$ et $e^n > 0$, nous pouvons multiplier par $n!$ et diviser par e^n :

$$\boxed{\frac{(n+1)^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}}.$$

Étape 3 : faire apparaître la suite demandée.

La fonction $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Nous prenons donc les racines n -ièmes :

$$\frac{n+1}{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}{e}.$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (n+1)^{1/n}.$$

Étape 4 : calculer les limites des deux bornes.

À gauche, il est immédiat que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}.$$

Pour la borne de droite, il reste à montrer que $(n+1)^{1/n} \rightarrow 1$.

Posons $u_n = (n+1)^{1/n} > 0$. Alors

$$\ln u_n = \frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Or $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ et la limite usuelle $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ donne

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \rightarrow 0.$$

Donc $\ln u_n \rightarrow 0$, et par continuité de l'exponentielle,

$$u_n = e^{\ln u_n} \rightarrow e^0 = 1.$$

Ainsi la borne de droite tend elle aussi vers $1/e$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (n+1)^{1/n} = \frac{1}{e}.$$

Conclusion. La suite recherchée est encadrée par deux suites ayant la même limite. D'après le *théorème des gendarmes*,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

À retenir. La démarche est : étudier deux fonctions auxiliaires, remplacer x par $1/k$, additionner puis exponentier, simplifier les produits, et conclure par encadrement. Aucun résultat avancé sur la factorielle n'est nécessaire.

Correction détaillée de l'exercice 4

Logarithme népérien, variations et suites

1. Deux inégalités fondamentales

1.a. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t - 1$

Idée : pour comparer deux expressions, on étudie la différence entre elles.

Posons, pour $t > 0$, $g(t) = t - 1 - \ln t$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}.$$

Puisque $t > 0$, le signe de $g'(t)$ est celui de $t - 1$:

- si $0 < t < 1$, alors $g'(t) < 0$, donc g est décroissante ;
- si $t > 1$, alors $g'(t) > 0$, donc g est croissante.

Ainsi, g atteint son minimum en $t = 1$. Or

$$g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0.$$

Il s'ensuit que $g(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$, autrement dit

$$\forall t > 0, \quad \ln t \leq t - 1.$$

Cas d'égalité : $\ln t = t - 1$ exactement lorsque $t = 1$.

1.b. En déduire que, pour tout $x > 0$, $x \ln x \geq x - 1$

Astuce : dans l'inégalité précédente, on remplace t par $\frac{1}{x}$.

Soit $x > 0$. Alors $\frac{1}{x} > 0$ et la question 1.a donne

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1.$$

Or $\ln(1/x) = -\ln x$, donc

$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1.$$

En multipliant les deux membres par $x > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas :

$$-x \ln x \leq 1 - x.$$

En multipliant enfin par -1 , on inverse le sens :

$$\forall x > 0, \quad x \ln x \geq x - 1.$$

L'égalité a lieu uniquement pour $x = 1$.

2. Montrer que $x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ pour $x \geq 1$

Idée : on réutilise directement l'inégalité de la question 1.a.

Pour tout $x \geq 1$, on a $x > 0$. En appliquant 1.a avec $t = x$, on obtient

$$\ln x \leq x - 1.$$

Comme $x \geq 1$, on peut multiplier cette inégalité par x (qui est positif) :

$$x \ln x \leq x(x - 1).$$

Cette estimation ne suffit pas à elle seule pour conclure. On utilise donc une fonction auxiliaire adaptée :

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - x \ln x, \quad x \geq 1.$$

Sa dérivée est

$$\begin{aligned} h'(x) &= x - (\ln x + 1) \\ &= x - 1 - \ln x. \end{aligned}$$

D'après 1.a, $\ln x \leq x - 1$, donc $h'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 1$. Par conséquent, h est croissante sur $[1, +\infty[$. Comme

$$h(1) = \frac{1 - 1}{2} - 1 \ln 1 = 0,$$

on a $h(x) \geq h(1) = 0$, soit

$$\forall x \geq 1, \quad x \ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}.$$

L'égalité a lieu pour $x = 1$ seulement.

3. Étude de $f(x) = x \ln x$ sur $]0, +\infty[$

3.a. Sens de variation et tableau de variations

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par la règle de dérivation d'un produit,

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout

$$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante,

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{e}, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \frac{1}{e}, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > \frac{1}{e}. \end{cases}$$

En outre,

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

Pour compléter le tableau, calculons les limites aux bornes. Quand $x \rightarrow 0^+$, posons $u = 1/x$: alors $u \rightarrow +\infty$ et

$$x \ln x = -\frac{\ln u}{u} \rightarrow 0,$$

car $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $x \ln x \rightarrow +\infty$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\frac{1}{e}$ $\nearrow$	$+\infty$

Conclusion : f est strictement décroissante sur $]0, 1/e]$ et strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$. Elle admet un minimum égal à $-1/e$.

3.b. Existence, unicité et encadrement de a_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $n \geq 1$. On veut résoudre

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad x \ln x = \frac{1}{n}.$$

Étape 1 : aucune solution sur $]0, 1]$. Si $0 < x \leq 1$, alors $\ln x \leq 0$, donc $x \ln x \leq 0$. Mais $1/n > 0$. L'équation ne peut donc pas avoir de solution dans $]0, 1]$.

Étape 2 : existence d'une solution dans $]1, e[$. La fonction f est continue sur $[1, e]$. On calcule

$$f(1) = 1 \ln 1 = 0, \quad f(e) = e \ln e = e.$$

Comme $n \geq 1$, on a

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 < e.$$

Ainsi, $f(1) < 1/n < f(e)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $a_n \in]1, e[$ tel que $f(a_n) = 1/n$.

Étape 3 : unicité. Pour tout $x > 1$, on a $\ln x > 0$, donc

$$f'(x) = 1 + \ln x > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Elle ne peut prendre la valeur $1/n$ qu'une seule fois sur cet intervalle. Comme aucune solution n'existe dans $]0, 1]$, la solution trouvée est unique sur $]0, +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! a_n \in]1, e[: a_n \ln a_n = \frac{1}{n}.$$

3.c. Monotonie et convergence de la suite (a_n)

Pour tout entier $n \geq 1$, on sait que

$$f(a_n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Or $n+1 > n > 0$, d'où

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad f(a_{n+1}) < f(a_n).$$

Puisque a_n et a_{n+1} appartiennent à $]1, e[$, où f est strictement croissante, cette inégalité entraîne

$$a_{n+1} < a_n.$$

La suite (a_n) est donc **strictement décroissante**.

De plus, la question 3.b donne $a_n > 1$ pour tout $n \geq 1$. La suite est donc **minorée par 1**.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, toute suite décroissante et minorée converge. Par conséquent,

$(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et convergente.

3.d. Encadrement de a_n et calcul de sa limite

Fixons $n \geq 1$. Nous savons que $a_n > 1$ et

$$a_n \ln a_n = \frac{1}{n}.$$

Première inégalité : montrer que $\sqrt{1 + 2/n} \leq a_n$.

Comme $a_n \geq 1$, la question 2 s'applique avec $x = a_n$:

$$a_n \ln a_n \leq \frac{a_n^2 - 1}{2}.$$

En remplaçant $a_n \ln a_n$ par $1/n$, on obtient successivement

$$\frac{1}{n} \leq \frac{a_n^2 - 1}{2} \implies \frac{2}{n} \leq a_n^2 - 1 \implies 1 + \frac{2}{n} \leq a_n^2.$$

Les deux membres étant positifs, on prend leur racine carrée ; la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\boxed{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n}.$$

Deuxième inégalité : montrer que $a_n \leq 1 + 1/n$.

D'après la question 1.b, appliquée à $x = a_n > 0$,

$$a_n \ln a_n \geq a_n - 1.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \geq a_n - 1 \implies \boxed{a_n \leq 1 + \frac{1}{n}}.$$

En réunissant les deux résultats, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Calcul de la limite. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $1/n \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

La suite (a_n) est encadrée entre deux suites qui convergent toutes deux vers 1. D'après le **théorème des gendarmes**,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.$$

Bilan : les inégalités des questions 1 et 2 permettent de déterminer précisément la limite de la suite définie implicitement par $a_n \ln a_n = 1/n$.

Exercice 5

Correction complète et expliquée

Pour tout entier $n \geq 3$, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^2 - 2n \ln x.$$

Dans tout l'exercice, n est fixé lorsqu'on étudie la fonction f_n .

1. Limites et variations de f_n

1.a) Limite lorsque $x \rightarrow 0^+$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln x \rightarrow -\infty$. Comme $-2n < 0$,

$$-2n \ln x \rightarrow +\infty.$$

Par addition, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty.$$

Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. On évite la forme indéterminée $+\infty - \infty$ en factorisant par x^2 :

$$f_n(x) = x^2 \left(1 - 2n \frac{\ln x}{x^2} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (croissance comparée). Ainsi le facteur entre parenthèses tend vers 1 et $x^2 \rightarrow +\infty$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

1.b) Dérivée et signe. Pour $x > 0$,

$$f'_n(x) = 2x - \frac{2n}{x} = \frac{2(x^2 - n)}{x}.$$

Le dénominateur x est strictement positif : le signe de $f'_n(x)$ est donc celui de $x^2 - n$. Comme $x > 0$:

$$\begin{aligned} 0 < x < \sqrt{n} &\implies f'_n(x) < 0, \\ x = \sqrt{n} &\implies f'_n(x) = 0, \\ x > \sqrt{n} &\implies f'_n(x) > 0. \end{aligned}$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{n}]$, puis strictement croissante sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Au minimum,

$$f_n(\sqrt{n}) = n - 2n \ln(\sqrt{n}) = n - n \ln n = n(1 - \ln n).$$

x	0^+	$\sqrt{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $n(1 - \ln n)$	$\nearrow$ $+\infty$

2. Existence et position des deux racines

Pour $n \geq 3$, on a $n > e$, donc $\ln n > 1$ et

$$f_n(\sqrt{n}) = n(1 - \ln n) < 0.$$

La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$. Sur $]0, \sqrt{n}]$, elle décroît strictement de $+\infty$ vers une valeur négative. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique racine u_n

dans $]0, \sqrt{n}[$. Sur $[\sqrt{n}, +\infty[$, elle croît strictement d'une valeur négative vers $+\infty$. Il existe donc une unique racine v_n dans $[\sqrt{n}, +\infty[$. Ces deux racines sont les seules puisque f_n est strictement monotone sur chacun de ces intervalles. Ainsi

$$u_n < \sqrt{n} < v_n, \quad f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0.$$

3. Étude de la grande racine v_n

Première limite. L'encadrement $v_n > \sqrt{n}$ et la limite $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ donnent immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Limite du quotient des logarithmes. Puisque $f_n(v_n) = 0$,

$$v_n^2 = 2n \ln v_n. \quad (1)$$

Pour $n \geq 3$, on sait que $v_n > \sqrt{n} > 1$, donc $\ln v_n > 0$ et l'on peut prendre les logarithmes de (1) :

$$2 \ln v_n = \ln(2n) + \ln(\ln v_n).$$

En divisant par $2 \ln(2n) > 0$,

$$\frac{\ln v_n}{\ln(2n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln(2n)}. \quad (2)$$

Il reste à montrer que le dernier quotient tend vers 0.

Une majoration simple de v_n . Montrons que $v_n < 2n$. On utilise l'inégalité $\ln t < t$ pour $t > 0$:

$$f_n(2n) = 4n^2 - 2n \ln(2n) = 2n(2n - \ln(2n)) > 0.$$

Or $2n > \sqrt{n}$, et f_n est strictement croissante sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Puisque $f_n(v_n) = 0 < f_n(2n)$, on a

$$\sqrt{n} < v_n < 2n.$$

Pour obtenir un encadrement positif, on se place à partir d'un rang assez grand : puisque $v_n \rightarrow +\infty$, il existe N tel que $v_n > e$ pour tout $n \geq N$. Pour ces indices,

$$0 < \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln(2n)} \leq \frac{\ln(\ln(2n))}{\ln(2n)}.$$

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$; en prenant $t = \ln(2n) \rightarrow +\infty$, le majorant tend vers 0. Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln v_n)}{\ln(2n)} = 0.$$

En revenant à (2), on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln v_n}{\ln(2n)} = \frac{1}{2}.$$

4. Étude de la petite racine u_n

4.a) Montrer que $u_n \geq 1$. On calcule

$$f_n(1) = 1^2 - 2n \ln 1 = 1 > 0.$$

Or $1 < \sqrt{n}$, $f_n(\sqrt{n}) < 0$, et f_n est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{n}]$. La racine u_n se trouve donc entre 1 et $\sqrt{n}$:

$$\boxed{1 < u_n < \sqrt{n} \quad (n \geq 3)}.$$

En particulier, $\ln u_n > 0$.

4.b) Montrer la convergence de (u_n) . L'énoncé comporte ici une petite erreur de coefficient : la bonne identité est $f_{n+1}(u_n) = -2 \ln u_n$. En effet,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^2 - 2(n+1) \ln u_n \\ &= \underbrace{(u_n^2 - 2n \ln u_n)}_{=f_n(u_n)=0} - 2 \ln u_n \\ &= \boxed{-2 \ln u_n < 0}. \end{aligned}$$

Comme $u_n < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, le point u_n appartient à l'intervalle où f_{n+1} est strictement décroissante. Sur cet intervalle, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(u_n) < 0$. La décroissance implique donc

$$\boxed{u_{n+1} < u_n}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est ainsi strictement décroissante. De plus, $u_n > 1$ pour tout $n \geq 3$: elle est minorée par 1. D'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.

4.c) Encadrement et valeur de la limite. Posons

$$a_n = e^{\frac{3}{2n}}.$$

Nous allons montrer que $u_n \leq a_n$. D'abord, pour $n \geq 3$,

$$a_n^2 = e^{3/n} \leq e < 3 \leq n,$$

donc $1 < a_n < \sqrt{n}$. On peut donc utiliser la décroissance de f_n sur $]0, \sqrt{n}]$. Calculons :

$$\begin{aligned} f_n(a_n) &= \left(e^{\frac{3}{2n}}\right)^2 - 2n \ln \left(e^{\frac{3}{2n}}\right) \\ &= e^{3/n} - 2n \cdot \frac{3}{2n} \\ &= e^{3/n} - 3 \leq e - 3 < 0. \end{aligned}$$

Ainsi $f_n(u_n) = 0 > f_n(a_n)$, et la stricte décroissance de f_n sur $]0, \sqrt{n}]$ donne $u_n < a_n$. En combinant avec 4.a),

$$\boxed{1 < u_n \leq e^{\frac{3}{2n}} \quad (n \geq 3)}.$$

Enfin, $\frac{3}{2n} \rightarrow 0$ et la continuité de l'exponentielle donne $e^{3/(2n)} \rightarrow e^0 = 1$. Le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

Bilan. Pour tout $n \geq 3$, f_n possède exactement deux racines $1 < u_n < \sqrt{n} < v_n$. La suite (u_n) décroît vers 1, tandis que $v_n \rightarrow +\infty$ et $\ln v_n / \ln(2n) \rightarrow 1/2$.

Correction détaillée — Exercice 6

Logarithmes et inégalité des moyennes

1. Une inégalité fondamentale

Montrons que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x \leq x - 1$.

Étape 1 : choisir une fonction auxiliaire. Posons, pour $x > 0$,

$$g(x) = x - 1 - \ln x.$$

L'inégalité demandée revient à montrer que $g(x) \geq 0$.

Étape 2 : étudier les variations. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$. Ainsi, g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en $x = 1$.

Étape 3 : calculer le minimum. On a

$$g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0.$$

Par conséquent, $g(x) \geq g(1) = 0$, d'où

$$\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1.$$

Cas d'égalité : l'égalité a lieu si et seulement si $x = 1$.

2. Application aux moyennes pondérées

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1.$$

On pose

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Puisque chaque $\alpha_k > 0$ et chaque $x_k > 0$, tous les produits $\alpha_k x_k$ sont strictement positifs. Leur somme y est donc strictement positive. Ainsi, les quotients x_k/y et leurs logarithmes sont bien définis.

a) Démonstration de l'inégalité pour chaque indice

Fixons un indice $k \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $x_k > 0$ et $y > 0$, on peut appliquer la question 1 au nombre positif $t = x_k/y$:

$$\ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{x_k}{y} - 1.$$

On multiplie les deux membres par $\alpha_k > 0$. Le sens de l'inégalité ne change donc pas :

$$\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \alpha_k \left(\frac{x_k}{y} - 1\right).$$

En distribuant α_k dans le membre de droite, on obtient

$$\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k.$$

Cette relation est vraie pour chaque indice k .

b) Inégalité de concavité du logarithme

Étape 1 : additionner les inégalités. En sommant celles de la question a) pour $k = 1, \dots, n$, on trouve

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k x_k}{y} - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Comme y ne dépend pas de k ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k x_k}{y} = \frac{1}{y} \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \frac{y}{y} = 1.$$

Par hypothèse, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Le membre de droite vaut donc $1 - 1 = 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq 0.$$

Étape 2 : utiliser les propriétés du logarithme. Puisque $x_k > 0$ et $y > 0$,

$$\ln\left(\frac{x_k}{y}\right) = \ln x_k - \ln y.$$

En remplaçant dans la somme, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln x_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln y &\leq 0, \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln x_k - \ln y \underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k}_{=1} &\leq 0, \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln x_k &\leq \ln y. \end{aligned}$$

En remplaçant y par son expression, on conclut :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln x_k \leq \ln\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right).$$

Cas d'égalité : d'après la question 1, l'égalité dans chacune des inégalités de a) exige $x_k/y = 1$. Comme les poids α_k sont strictement positifs, l'égalité finale a lieu exactement lorsque $x_1 = \dots = x_n$.

c) Cas des coefficients égaux

Choisissons

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}.$$

Ces coefficients sont strictement positifs et leur somme est

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

On peut donc appliquer la question b). Son membre de gauche devient

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k,$$

et le membre de droite devient

$$\ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right) = \ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

On obtient donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

d) Inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique

Nous partons de l'inégalité de c) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k \leq \ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

Étape 1 : transformer la somme des logarithmes. Pour des nombres strictement positifs, $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. En appliquant plusieurs fois cette propriété,

$$\sum_{k=1}^n \ln x_k = \ln(x_1 x_2 \dots x_n).$$

D'autre part, pour $A > 0$, on a $\frac{1}{n} \ln A = \ln(A^{1/n})$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k = \ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}).$$

Étape 2 : supprimer les logarithmes. L'inégalité devient

$$\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}) \leq \ln \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right).$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On peut donc comparer directement ses deux arguments :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

C'est l'**inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique**. L'égalité a lieu si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

e) Application à la factorielle

Première partie : majorer $n!$. Dans l'inégalité de d), choisissons les n nombres positifs

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \dots, \quad x_n = n.$$

Leur produit est $1 \times 2 \times \dots \times n = n!$ et leur somme est

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'inégalité de d) donne donc

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Les deux membres sont positifs. En les élevant à la puissance n , on conserve le sens de l'inégalité :

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Deuxième partie : une inégalité cyclique. Soient $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs. Appliquons l'inégalité de d) aux n nombres positifs

$$a_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad a_2 = \frac{x_2}{x_3}, \quad \dots, \quad a_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad a_n = \frac{x_n}{x_1}.$$

Elle fournit

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Calculons le produit :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_n &= \frac{x_1}{x_2} \times \frac{x_2}{x_3} \times \dots \times \frac{x_{n-1}}{x_n} \times \frac{x_n}{x_1} \\ &= \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_2 x_3 \dots x_n x_1} = 1. \end{aligned}$$

Tous les facteurs se simplifient successivement. La moyenne géométrique vaut donc $\sqrt[n]{1} = 1$, d'où

$$1 \leq \frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right).$$

En multipliant par $n > 0$, nous obtenons

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Cas d'égalité : il faut et il suffit que $a_1 = \dots = a_n$. Puisque leur produit vaut 1, leur valeur commune est nécessairement 1. Cela revient à $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

À retenir

L'inégalité $\ln t \leq t - 1$ permet d'obtenir une inégalité sur les logarithmes des moyennes pondérées, puis l'inégalité des moyennes géométrique et arithmétique. Cette dernière permet de résoudre directement les deux applications de la question e).

Correction détaillée — Exercice 7

Inégalités logarithmiques, sommes et produits

Énoncé. Pour tout $x > 0$, montrer que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right), \quad V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

Calculer U_1, U_2 , établir la convergence de (U_n) , puis celle de (V_n) et déterminer leurs limites.

1. Encadrement de $\ln(1+x)$

Nous allons démontrer *séparément* les deux inégalités à l'aide de dérivées et d'un tableau de signes simple.

Première inégalité : $\ln(1+x) \leq x$.

Pour $x \geq 0$, posons $g(x) = x - \ln(1+x)$. Cette fonction est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Puisque $x \geq 0$ et $1+x > 0$, on a $g'(x) \geq 0$. Ainsi g est croissante sur $[0, +\infty[$. Or $g(0) = 0 - \ln 1 = 0$. Donc, pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \geq g(0) = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ln(1+x) \leq x}.$$

Deuxième inégalité : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Pour $x \geq 0$, posons

$$h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x}. \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geq 0$ et $1+x > 0$, on obtient $h'(x) \geq 0$. La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $h(0) = 0$. Par conséquent,

$$h(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)}.$$

Conclusion de la question 1. Pour tout $x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Les deux inégalités sont strictes lorsque $x > 0$; l'égalité est atteinte pour $x = 0$ si l'on prolonge l'énoncé à $x \geq 0$.

2.a. Calcul de U_1 et U_2

Rappelons la définition :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

Pour $n = 1$: la somme contient un seul terme, celui correspondant à $k = 1$:

$$U_1 = \ln \left(1 + \frac{1}{1^2} \right) = \boxed{\ln 2}.$$

Pour $n = 2$: la somme contient deux termes, ceux correspondant à $k = 1$ et $k = 2$:

$$\begin{aligned} U_2 &= \ln \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{2^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{5}{4} \right) + \ln \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} \right) = \boxed{\ln \left(\frac{15}{8} \right)}. \end{aligned}$$

On a utilisé la propriété $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, valable pour $a, b > 0$.

2.b. Convergence de la suite (U_n)

Idée. Encadrons chacun des n termes de la somme à l'aide de la question 1, puis calculons les sommes obtenues.

Soit $n \geq 1$. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, le nombre $\frac{k}{n^2}$ est strictement positif. On peut donc appliquer l'encadrement de la question 1 avec

$$x = \frac{k}{n^2}.$$

Il vient

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n^2} \right)^2 \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

Additionnons ces inégalités pour $k = 1, 2, \dots, n$. L'ordre des inégalités est conservé par addition :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) \leq U_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}.$$

Les nombres n^2 et n^4 ne dépendent pas de k : on peut donc les sortir des sommes. Ainsi,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k.$$

Utilisons les deux formules

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En les remplaçant dans l'encadrement, on trouve

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq U_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Simplifions chaque expression :

$$\boxed{\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}.} \quad (1)$$

Calcul des limites des bornes. Pour la borne supérieure,

$$\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Pour le terme supplémentaire de la borne inférieure, développons seulement le produit de polynômes :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{12n^3} \\ &= \frac{1}{6n} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

La borne inférieure tend donc elle aussi vers $\frac{1}{2}$. D'après le **théorème des gendarmes**, appliqué à l'encadrement (1),

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}.}$$

La suite (U_n) est donc convergente.

3. Convergence et limite de (V_n)

On considère maintenant, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Chaque facteur est strictement positif. On peut donc prendre le logarithme du produit et utiliser la propriété

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \quad (a_1, \dots, a_n > 0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln V_n &= \ln \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \\ &= U_n. \end{aligned}$$

Nous avons donc $\ln V_n = U_n$. En appliquant la fonction exponentielle aux deux membres,

$$\boxed{V_n = e^{U_n}}.$$

Or, d'après la question 2.b, $U_n \rightarrow \frac{1}{2}$. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$e^{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1/2}.$$

Puisque $e^{1/2} = \sqrt{e}$, on conclut :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{e}}.$$

En particulier, la suite (V_n) converge.

Bilan des résultats

$$\boxed{U_1 = \ln 2, \quad U_2 = \ln \left(\frac{15}{8} \right)}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{e}}.$$

Méthode à retenir : encadrer le terme général d'une somme, additionner les encadrements, calculer les sommes usuelles, puis utiliser le théorème des gendarmes. Pour passer d'un produit à une somme, utiliser le logarithme.

Correction détaillée — Exercice 8

Théorème de Rolle et limites logarithmiques

Énoncé. Pour $x > 0$ fixé, on considère la fonction φ définie sur $[0, x]$ par

$$\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x).$$

On souhaite appliquer le théorème de Rolle pour étudier la limite de $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

1. Vérification des conditions du théorème de Rolle

Rappel. Si une fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a) = g(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Première condition : continuité. Puisque $x > 0$, tout $t \in [0, x]$ vérifie $1+t \geq 1 > 0$. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est donc continue sur $[0, x]$. Les fonctions $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$ sont continues, et x^2 ainsi que $\ln(1+x) - x$ sont des constantes lorsque l'on dérive par rapport à t . Par somme et produit, φ est continue sur $[0, x]$.

Deuxième condition : dérivabilité. Les mêmes fonctions sont dérivables sur $]0, x[$; par conséquent φ est dérivable.

Troisième condition : égalité des valeurs aux extrémités. Calculons soigneusement :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= x^2(\ln 1 - 0) - 0^2(\ln(1+x) - x) = 0, \\ \varphi(x) &= x^2(\ln(1+x) - x) - x^2(\ln(1+x) - x) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$.

Conclusion. Les trois hypothèses de Rolle sont satisfaites sur $[0, x]$. Il existe donc $c \in]0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

2. Expression obtenue grâce au théorème de Rolle

Calculons la dérivée de φ . La variable est t ; x est fixé. On sait que

$$\frac{d}{dt} \ln(1+t) = \frac{1}{1+t}, \quad \frac{d}{dt} t = 1, \quad \frac{d}{dt} t^2 = 2t.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= x^2 \left(\frac{1}{1+t} - 1 \right) - 2t(\ln(1+x) - x) \\ &= x^2 \left(\frac{1 - (1+t)}{1+t} \right) - 2t(\ln(1+x) - x) \\ &= -\frac{x^2 t}{1+t} - 2t(\ln(1+x) - x).\end{aligned}$$

Le théorème de Rolle fournit $c \in]0, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, soit

$$-\frac{x^2 c}{1+c} - 2c(\ln(1+x) - x) = 0.$$

Comme $0 < c < x$, on a $c > 0$ et l'on peut diviser par c :

$$-\frac{x^2}{1+c} - 2(\ln(1+x) - x) = 0,$$

$$2(\ln(1+x) - x) = -\frac{x^2}{1+c}.$$

Enfin $x > 0$, donc $x^2 \neq 0$ et l'on divise par $2x^2$.

Il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2(1+c)}.$$

Point important : le réel c dépend de x . On pourrait l'écrire c_x pour le rappeler ; la seule information nécessaire est $0 < c_x < x$.

3. Limite lorsque $x \rightarrow 0^+$

Pour chaque $x > 0$, le réel c_x obtenu ci-dessus satisfait

$$0 < c_x < x.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, les deux bornes 0 et x tendent vers 0. Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} c_x = 0.$$

Or la fonction $u \mapsto -\frac{1}{2(1+u)}$ est continue en 0 (son dénominateur vaut $2 \neq 0$). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2(1+c_x)} \right) \\ &= -\frac{1}{2(1+0)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4. Limite lorsque $x \rightarrow 0^-$

Attention au domaine. Pour que $\ln(1+x)$ existe, il faut $1+x > 0$, c'est-à-dire $x > -1$. On considère donc $-1 < x < 0$.

Idée : reprendre exactement la construction précédente, mais sur l'intervalle $[x, 0]$ puisque $x < 0$.

Fixons $x \in]-1, 0[$ et définissons, pour $t \in [x, 0]$,

$$\varphi_x(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x).$$

Sur $[x, 0]$, on a $1+t \geq 1+x > 0$. La fonction φ_x est donc continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$. De plus,

$$\varphi_x(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_x(0) = 0.$$

Le théorème de Rolle assure l'existence de $c_x \in]x, 0[$ tel que $\varphi'_x(c_x) = 0$. Le calcul de la question 2 reste valable, puisque $c_x \neq 0$ et $x \neq 0$:

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2(1+c_x)}.$$

Comme $x < c_x < 0$ et que $x \rightarrow 0^-$, le théorème des gendarmes entraîne $c_x \rightarrow 0$. Par continuité de $u \mapsto -1/[2(1+u)]$ en 0, on conclut :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Bilan

Les limites à droite et à gauche sont égales. La limite bilatérale existe donc et vaut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Méthode à retenir. Construire une fonction qui prend la même valeur aux deux extrémités ; appliquer Rolle ; exploiter le point intermédiaire c_x et son encadrement pour calculer la limite.