

SUITES NUMÉRIQUES

2^e année du Baccalauréat - Système marocain

Sciences Mathématiques / BIOF - Cours de référence, méthodes et corrigés ultra-détaillés

Objectif. Construire une maîtrise complète des suites : définitions, suites arithmétiques et géométriques, suites arithmético-géométriques, bornes et monotonie, limites, théorèmes de comparaison, convergence monotone, suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, suites adjacentes, techniques rapides de calcul et problèmes de synthèse.

Cours de synthèse approfondi conforme aux compétences travaillées en 2^e année du Baccalauréat marocain - Sciences Mathématiques / BIOF, enrichi d'activités, de méthodes, de démonstrations et de corrigés intégralement détaillés.

Version du 28 août 2026

Table des matières

Comment utiliser ce cours	2
1 Généralités sur les suites numériques	2
1.1 Définition, notation et vocabulaire	2
1.2 Suites majorées, minorées et bornées	3
1.3 Monotonie	3
2 Suites arithmétiques et géométriques	3
2.1 Suite arithmétique	3
2.2 Suite géométrique	4
2.3 Activité 1 : deux offres de salaire	4
2.4 Suites arithmético-géométriques	5
3 Bornes et monotonie : exercices fondamentaux	5
3.1 Exercice 1 : homographie	5
3.2 Exercice 2 : racines imbriquées	6
3.3 Exercice 3 : transformer une récurrence compliquée	7
4 Limite d'une suite	7
4.1 Limites infinies	8
4.2 Limite finie	8
4.3 Preuve détaillée de l'unicité de la limite	8
4.4 Limites de référence	9
4.5 Activité 2 : fractale de Koch et croissance vers $+\infty$	9
4.6 Exercice : démontrer $\sqrt[n]{n} \rightarrow +\infty$	10
5 Opérations sur les limites et formes indéterminées	10
5.1 Règles essentielles	10
5.2 Techniques pour les suites explicites	10
6 Inégalité de Bernoulli et suites géométriques	11
7 Ordre, comparaison et théorème des gendarmes	12
7.1 Preuve détaillée d'un critère de comparaison	13
8 Convergence des suites monotones	13
8.1 Retour sur $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$	14
9 Suites de la forme $v_n = f(u_n)$	14
10 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	15
10.1 Point fixe et intervalle invariant	15
10.2 Activité 3 : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	15

10.3 Exercice d'application : $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$	16
10.4 Exercice : une suite croissante non majorée	16
10.5 Comprendre la représentation « en toile d'araignée »	17
10.6 Exemple graphique : même fonction, comportements différents	17
11 Suites adjacentes	18
11.1 Activité 4 : sommes de $1/k!$	18
11.2 Exercice de synthèse : moyenne arithmétique et produit constant	19
12 Méthodes rapides de calcul des limites	20
12.1 Quotients de polynômes	20
12.2 Radicaux	20
12.3 Sommes comportant n termes	20
12.4 Puissances exponentielles	20
13 Pièges fréquents au Baccalauréat	21
14 Exercices supplémentaires type 2Bac Maroc - corrigés	21
14.1 Exercice A : suite arithmético-géométrique	21
14.2 Exercice B : récurrence avec racine	22
14.3 Exercice C : gendarmes avec sinus	22
14.4 Exercice D : somme et encadrement	23
14.5 Exercice E : homographie et transformation en géométrie	23
14.6 Exercice F : adjacence classique	24
15 Démonstrations fondamentales à savoir refaire	24
15.1 Toute suite convergente est bornée	25
15.2 Théorème des gendarmes : preuve guidée	25
15.3 Pourquoi une suite croissante et majorée converge-t-elle ?	26
15.4 Suites adjacentes : preuve de la limite commune	26
16 La démonstration par récurrence appliquée aux suites	26
17 Problèmes de synthèse - niveau Baccalauréat	27
17.1 Problème 1 : étude complète d'une récurrence homographique	27
17.2 Problème 2 : limite d'une somme par encadrement	28
17.3 Problème 3 : suite arithmético-géométrique et somme	29
18 Fiche de synthèse finale	30
Ressources pédagogiques complémentaires	30

Comment utiliser ce cours

Le cours est organisé de façon progressive : généralités, suites arithmétiques et géométriques, bornes et monotonie, limites, opérations sur les limites, techniques de levée des formes indéterminées, critères de convergence, suites composées, suites récurrentes et suites adjacentes. Chaque activité est suivie d'une correction méthodique et chaque résultat important est accompagné de la justification utile au niveau du Baccalauréat. Les compétences travaillées correspondent aux objectifs couramment annoncés pour le chapitre des suites numériques en 2Bac Sciences Mathématiques : exploiter les suites arithmétiques et géométriques dans les récurrences, déterminer des limites par les critères de convergence et de comparaison, utiliser les suites adjacentes, étudier $f(u_n)$ et analyser les récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$.

Formulations correctes à connaître absolument

Avant de commencer, voici plusieurs points sur lesquels il faut être particulièrement rigoureux :

1. La définition d'une limite finie doit être $|u_n - \ell| < \varepsilon$ (et non une inégalité du type $> A$).
2. « Toute suite décroissante et minorée » est **convergente**, non divergente.
3. Pour une suite géométrique, la monotonie dépend à la fois de q et du signe du premier terme. Les règles simplifiées « $q \geq 1$ donc croissante » ou « $0 < q \leq 1$ donc décroissante » ne sont correctes telles quelles que si les termes sont positifs.
4. Dans une propriété d'ordre, pour conclure $a \leq \ell \leq b$, l'hypothèse correcte est $a \leq u_n \leq b$ à partir d'un certain rang.
5. Dans l'activité sur les suites adjacentes, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ n'est défini que pour $n \geq 1$; il faut donc démarrer v_n à l'indice 1.

1. Généralités sur les suites numériques

1.1. Définition, notation et vocabulaire

Définition

Une **suite numérique réelle** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note généralement

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n.$$

Le nombre u_n est le **terme de rang n** . La notation $(u_n)_{n \geq n_0}$ désigne toute la suite.

Une suite peut être donnée de deux façons principales :

- **explicitement** : $u_n = f(n)$, par exemple $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$;
- **par récurrence** : on donne un terme initial et une relation permettant de calculer le suivant, par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Réflexe n°1 : bien identifier le premier indice

Avant tout calcul, regarder si la suite commence à $n = 0$, $n = 1$ ou à un autre rang. Une erreur d'indice modifie les formules de terme général et de somme.

1.2. Suites majorées, minorées et bornées

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$, où $I \subset \mathbb{N}$.

- Elle est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in I$.
- Elle est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in I$.
- Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

1.3. Monotonie

Définition

La suite (u_n) est :

- croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ;
- décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n ;
- strictement croissante/décroissante si les inégalités sont strictes.

Quatre méthodes classiques pour étudier la monotonie

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
2. Si $u_n > 0$, étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de la fonction f sur $[n_0, +\infty[$.
4. Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser une expression factorisée de $f(x) - x$ et un intervalle invariant contenant tous les u_n .

2. Suites arithmétiques et géométriques

2.1. Suite arithmétique

Définition

(u_n) est arithmétique de raison r si

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Pour tous n, p :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

En particulier, si la suite commence à 0, $u_n = u_0 + nr$; si elle commence à 1, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Pour trois termes consécutifs a, b, c , on a $2b = a + c$. La somme de termes consécutifs vaut

$$\sum_{k=p}^n u_k = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n).$$

La monotonie est immédiate : $r > 0$ donne une suite strictement croissante, $r = 0$ une suite constante, $r < 0$ une suite strictement décroissante.

2.2. Suite géométrique

Définition

(v_n) est géométrique de raison q si

$$v_{n+1} = qv_n.$$

Alors

$$v_n = v_p q^{n-p}.$$

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^n v_k = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Pour trois termes consécutifs a, b, c , on a $b^2 = ac$. Pour la monotonie :

- si $q < 0$, les signes alternent en général : la suite n'est pas monotone (sauf cas dégénéré) ;
- si $q > 0$ et $v_p > 0$, elle est croissante pour $q > 1$, décroissante pour $0 < q < 1$;
- si $q > 0$ et $v_p < 0$, les sens sont inversés.

2.3. Activité 1 : deux offres de salaire

Activité 1 - Société A ou société B ?

Pendant 4 ans, la société $\mathcal{A}$ propose 4500 Dh le premier mois puis +75 Dh chaque mois. La société $\mathcal{B}$ propose 3500 Dh le premier mois puis +3% chaque mois. On note a_n et b_n les salaires du n -ième mois.

Corrigé détaillé

1) Quatre premiers mois.

n	1	2	3	4
a_n	4500	4575	4650	4725
b_n	3500	$3500(1.03) = 3605$	3713.15	3824.5445

2) Relations de récurrence. L'offre A ajoute une constante :

$$a_{n+1} = a_n + 75.$$

Donc (a_n) est arithmétique, de premier terme $a_1 = 4500$ et de raison 75.

L'offre B multiplie chaque mois le salaire précédent par $1 + 3/100 = 1.03$:

$$b_{n+1} = 1.03b_n.$$

Donc (b_n) est géométrique, de premier terme $b_1 = 3500$ et de raison 1.03.

3) Dixième mois.

$$a_{10} = 4500 + 9 \times 75 = 5175 \text{ Dh.}$$

$$b_{10} = 3500 \times 1.03^9 \approx 4566.71 \text{ Dh.}$$

Au dixième mois, A paie encore davantage.

4) Comparaison sur les 4 années. Quatre années correspondent à 48 mois.

$$a_{48} = 4500 + 47 \times 75 = 8025.$$

La somme reçue avec A est

$$S_A = \frac{48}{2} (4500 + 8025) = 300600 \text{ Dh.}$$

Pour B,

$$S_B = 3500 \frac{1 - 1.03^{48}}{1 - 1.03} = 3500 \frac{1.03^{48} - 1}{0.03} \approx 365429.39 \text{ Dh.}$$

Ainsi, sur la durée totale de 4 ans, **l'offre B est la plus avantageuse**, même si elle démarre plus bas. C'est l'effet cumulatif d'une croissance géométrique.

2.4. Suites arithmético-géométriques

Une suite de la forme

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 1)$$

se traite en cherchant le point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$, donc

$$\ell = \frac{b}{1-a}.$$

En posant $v_n = u_n - \ell$, on obtient

$$v_{n+1} = av_n,$$

donc une suite géométrique.

Exercice fondamental - $u_{n+1} = 2u_n - 5$

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$. On pose $v_n = u_n + \alpha$.

Corrigé détaillé

On calcule

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = 2u_n - 5 + \alpha = 2(v_n - \alpha) - 5 + \alpha = 2v_n - (\alpha + 5).$$

Pour que (v_n) soit géométrique, le terme constant doit disparaître : $\alpha + 5 = 0$, donc

$$\boxed{\alpha = -5}.$$

Alors $v_n = u_n - 5$ et $v_{n+1} = 2v_n$. Comme $v_0 = 4 - 5 = -1$,

$$\boxed{v_n = -2^n}, \quad \boxed{u_n = 5 - 2^n}.$$

Pour

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1},$$

on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (5 - 2^k) = 5n - \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \boxed{5n - (2^n - 1) = 5n - 2^n + 1}.$$

3. Bornes et monotonie : exercices fondamentaux

3.1. Exercice 1 : homographie

Exercice

$u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{7u_n - 1}{2u_n + 3}.$$

Montrer que $1 \leq u_n \leq 3$, puis étudier la monotonie.

Corrigé détaillé

Posons $f(x) = \frac{7x-1}{2x+3}$.

Étape 1 : intervalle $[1, 3]$ invariant. Pour $x \in [1, 3]$, $2x+3 > 0$. On vérifie

$$f(x) - 1 = \frac{5x-4}{2x+3} \geq \frac{1}{2x+3} > 0,$$

et

$$3 - f(x) = \frac{6x+9-7x+1}{2x+3} = \frac{10-x}{2x+3} > 0.$$

Donc $1 < f(x) < 3$. Comme $u_0 = 1 \in [1, 3]$, une récurrence donne

$$\boxed{1 \leq u_n \leq 3}.$$

Étape 2 : trouver le niveau vers lequel la suite peut se déplacer. Les points fixes vérifient

$$x = \frac{7x-1}{2x+3} \iff 2x^2 - 4x + 1 = 0,$$

d'où

$$\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme $u_0 = 1 < \beta$ et f est croissante ($f'(x) = 23/(2x+3)^2 > 0$), on a, si $u_n < \beta$,

$$u_{n+1} = f(u_n) < f(\beta) = \beta.$$

Donc $1 \leq u_n < \beta$ pour tout n .

Étape 3 : signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 4u_n - 1}{2u_n + 3} = \frac{-2(u_n - \alpha)(u_n - \beta)}{2u_n + 3}.$$

Or $u_n \in [1, \beta[$, donc $u_n - \alpha > 0$, $u_n - \beta < 0$ et le dénominateur est positif. Ainsi

$$\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}.$$

La suite est donc **strictement croissante**. Elle est de plus majorée par β ; elle convergera vers β (on le reverra plus loin).

3.2. Exercice 2 : racines imbriquées**Exercice**

$v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$. Montrer que la suite est croissante et bornée.

Corrigé détaillé

Attention : on ne peut pas dire que toute la suite est minorée par $\sqrt{2}$, puisque $v_0 = 0 < \sqrt{2}$. La formulation exacte est : $v_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$, et $v_n \geq 0$ pour $n \geq 0$.

1) Majorant 2. Initialement $v_0 = 0 \leq 2$. Si $v_n \leq 2$, alors

$$v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \leq \sqrt{4} = 2.$$

Donc, par récurrence, $0 \leq v_n \leq 2$.

2) Croissance. Les deux membres étant positifs,

$$v_{n+1} \geq v_n \iff \sqrt{2 + v_n} \geq v_n \iff 2 + v_n \geq v_n^2.$$

Or

$$2 + v_n - v_n^2 = (2 - v_n)(v_n + 1) \geq 0$$

car $0 \leq v_n \leq 2$. Ainsi (v_n) est croissante.

3) Minoration à partir du rang 1. $v_1 = \sqrt{2}$ et, puisque la suite est croissante,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \sqrt{2} \leq v_n \leq 2}.$$

3.3. Exercice 3 : transformer une récurrence compliquée

Exercice

$w_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$,

$$w_n = \sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1} + 2}.$$

On pose $v_n = w_n^n$ pour $n \geq 1$.

Corrigé détaillé

1) Premiers termes.

$$w_1 = \sqrt[1]{w_0^0 + 2} = 1 + 2 = 3,$$

$$w_2 = \sqrt{w_1 + 2} = \sqrt{5},$$

$$w_3 = \sqrt[3]{w_2^2 + 2} = \sqrt[3]{5 + 2} = \sqrt[3]{7}.$$

2) Nature de (v_n) . En élevant la relation à la puissance n :

$$w_n^n = w_{n-1}^{n-1} + 2.$$

Donc

$$v_n = v_{n-1} + 2.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de raison 2. Comme $v_1 = w_1 = 3$,

$$v_n = 3 + 2(n - 1) = \boxed{2n + 1}.$$

Ainsi

$$\boxed{w_n = (2n + 1)^{1/n}}.$$

Ce type de substitution est un réflexe important : lorsqu'une racine n -ième contient une puissance $n - 1$, élever à la puissance n peut révéler une récurrence simple.

4. Limite d'une suite

4.1. Limites infinies

Définition

On écrit $u_n \rightarrow +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

On écrit $u_n \rightarrow -\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n < -A.$$

4.2. Limite finie

Définition

On dit que u_n tend vers le réel ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Interprétation : quel que soit le « couloir » $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$, aussi étroit soit-il, tous les termes de la suite finissent par y entrer définitivement.

Théorème / Propriété

Si une suite possède une limite finie, cette limite est unique. Toute suite convergente est bornée.

4.3. Preuve détaillée de l'unicité de la limite

Corrigé détaillé

Supposons que $u_n \rightarrow \ell$ et aussi $u_n \rightarrow \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Posons

$$\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0.$$

Comme $u_n \rightarrow \ell$, il existe N_1 tel que, pour $n \geq N_1$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Comme $u_n \rightarrow \ell'$, il existe N_2 tel que, pour $n \geq N_2$,

$$|u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, l'inégalité triangulaire donne

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|,$$

ce qui est impossible. Donc $\boxed{\ell = \ell'}$.

4.4. Limites de référence

Théorème / Propriété

Pour $k, p \in \mathbb{N}^*$:

$$n \rightarrow +\infty, \quad n^k \rightarrow +\infty, \quad \sqrt[p]{n} \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{1}{n^k} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \rightarrow 0.$$

Pour une suite géométrique q^n :

$$\begin{cases} q > 1 & \Rightarrow q^n \rightarrow +\infty, \\ -1 < q < 1 & \Rightarrow q^n \rightarrow 0, \\ q = 1 & \Rightarrow q^n = 1, \\ q \leq -1 & \Rightarrow (q^n) \text{ diverge en général.} \end{cases}$$

4.5. Activité 2 : fractale de Koch et croissance vers $+\infty$

Exercice

On part d'un segment de longueur 1. À chaque étape, chaque segment est remplacé par 4 segments de longueur égale au tiers de l'ancien. On note ℓ_n la longueur totale à l'étape n .

Corrigé détaillé

1) **Inégalité de Bernoulli.** Pour $x \geq 0$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Preuve par récurrence : pour $n = 0$, $1 \geq 1$. Supposons $(1+x)^n \geq 1+nx$. Alors

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

2a) **Nombre de segments.** À l'étape 0 : 1 segment. Chaque étape multiplie le nombre par 4, donc

$$N_n = 4^n.$$

2b) **Longueur totale.** Chaque petit segment a longueur 3^{-n} . Donc

$$\ell_n = 4^n \cdot 3^{-n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

3) **Trouver un entier tel que $\ell_n > 1000$.** Il faut

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n > 1000.$$

Numériquement, $(4/3)^{24} \approx 996.62 < 1000$ et $(4/3)^{25} \approx 1328.83 > 1000$. Le plus petit entier est donc

$$n = 25.$$

4) **Définition de la divergence vers $+\infty$.** Soit $A > 0$. Puisque $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, Bernoulli donne

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}.$$

Il suffit donc de choisir N_0 tel que $1 + N_0/3 \geq A$, par exemple

$$N_0 = \lceil 3(A - 1) \rceil.$$

Alors, pour $n \geq N_0$, $\ell_n \geq A$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = +\infty.$$

4.6. Exercice : démontrer $\sqrt[p]{n} \rightarrow +\infty$

Corrigé détaillé

Soit $A > 0$. On veut $\sqrt[p]{n} > A$. Comme les deux membres sont positifs, cela équivaut à

$$n > A^p.$$

Choisissons $N = \lfloor A^p \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$, on a $n > A^p$, donc $\sqrt[p]{n} > A$. Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty.$$

5. Opérations sur les limites et formes indéterminées

5.1. Règles essentielles

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow \ell'$ sont finies, alors

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell', \quad u_n v_n \rightarrow \ell \ell',$$

et si $\ell' \neq 0$,

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{\ell'}.$$

Pour les limites infinies, les signes doivent être suivis soigneusement.

Formes indéterminées à reconnaître immédiatement

Les écritures suivantes ne donnent aucune conclusion directe :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Elles imposent une transformation : factorisation, mise au même dénominateur, rationalisation, extraction de la puissance dominante, encadrement, etc.

5.2. Techniques pour les suites explicites

Si $u_n = f(n)$ et si la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est connue, on peut utiliser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Trois limites fondamentales

Calculer :

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n}{\sqrt[3]{n^5 + n^2}}, \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{n^3 + n^2} - \sqrt{n+1} \right).$$

Corrigé détaillé1) L_1 . On extrait les puissances dominantes :

$$2n^2 + n = n^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right),$$

$$\sqrt[3]{n^5 + n^2} = n^{5/3} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

Donc

$$\frac{2n^2 + n}{\sqrt[3]{n^5 + n^2}} = n^{1/3} \frac{2 + 1/n}{\sqrt[3]{1 + 1/n^3}} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi $\boxed{L_1 = +\infty}$.2) L_2 . Posons $x = 1/n$. Alors $x \rightarrow 0^+$ et

$$n \arctan(1/n) = \frac{\arctan x}{x}.$$

La limite classique $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ donne

$$\boxed{L_2 = 1}.$$

3) L_3 . On compare les ordres de grandeur :

$$\sqrt[4]{n^3 + n^2} = n^{3/4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/4}, \quad \sqrt{n+1} = n^{1/2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/2}.$$

On factorise $n^{1/2}$:

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} \left[n^{1/4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/4} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/2} \right].$$

Le crochet tend vers $+\infty$ car son premier terme se comporte comme $n^{1/4}$ tandis que le second tend vers 1. Donc

$$\boxed{L_3 = +\infty}.$$

6. Inégalité de Bernoulli et suites géométriques**Théorème / Propriété**Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

En particulier, si $q > 1$, écrire $q = 1+x$ avec $x > 0$ donne $q^n \geq 1+nx \rightarrow +\infty$, donc $q^n \rightarrow +\infty$.Si $0 < |q| < 1$, alors $1/|q| > 1$ et $(1/|q|)^n \rightarrow +\infty$. Par inversion, $|q|^n \rightarrow 0$, puis $q^n \rightarrow 0$ car $|q^n| = |q|^n$.

Limites géométriques - applications

$$A_n = \left(-\frac{4}{7}\right)^n, \quad B_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 5^n}, \quad C_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Corrigé détaillé

1) $|-4/7| < 1$, donc

$$\boxed{A_n \rightarrow 0}.$$

2) On divise numérateur et dénominateur par 5^n :

$$B_n = \frac{(2/5)^n - (3/5)^n}{(3/5)^n - 1}.$$

Les deux puissances du numérateur tendent vers 0 et le dénominateur tend vers -1 , donc

$$\boxed{B_n \rightarrow 0}.$$

3) Somme géométrique :

$$C_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - (1/2)^n)}{1 - 1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc

$$\boxed{C_n \rightarrow 1}.$$

7. Ordre, comparaison et théorème des gendarmes

Théorème / Propriété

À partir d'un certain rang :

- si $u_n \geq a$ et $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell \geq a$;
- si $a \leq u_n \leq b$ et $u_n \rightarrow \ell$, alors $a \leq \ell \leq b$;
- si $v_n \leq u_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$;
- si $u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$;
- si $w_n \leq u_n \leq v_n$ et $w_n, v_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Trois applications de comparaison

Calculer les limites :

$$A_n = \frac{3n + \sin n}{n + 1},$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}, \quad C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n + k}}.$$

Corrigé détaillé

1)

$$A_n = \frac{3 + \sin(n)/n}{1 + 1/n}.$$

Comme $|\sin n| \leq 1$, on a $\sin n/n \rightarrow 0$. Donc

$$\boxed{A_n \rightarrow 3}.$$

2) Pour $1 \leq k \leq n$,

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n.$$

En inversant (quantités positives),

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

En sommant n termes :

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq B_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Les deux bornes tendent vers 0. Donc, par les gendarmes,

$$\boxed{B_n \rightarrow 0}.$$

3) Pour $1 \leq k \leq n$, $n + k \leq 2n$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Ainsi

$$C_n \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{C_n \rightarrow +\infty}.$$

7.1. Preuve détaillée d'un critère de comparaison

Supposons qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et que $v_n \rightarrow +\infty$. Montrons que $u_n \rightarrow +\infty$ à partir de la définition. Soit $A > 0$. Puisque $v_n \rightarrow +\infty$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $v_n > A$. Par ailleurs, il existe un rang N_0 à partir duquel $v_n \leq u_n$. Pour $n \geq \max(N_0, N_1)$,

$$u_n \geq v_n > A.$$

C'est exactement la définition de $u_n \rightarrow +\infty$. Le critère analogue vers $-\infty$ se démontre de la même manière en inversant les inégalités.

8. Convergence des suites monotones

Théorème / Propriété

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Schéma standard pour une suite récurrente

Pour prouver qu'une suite récurrente converge :

1. trouver un intervalle stable et prouver par récurrence que u_n y reste ;

2. prouver la monotonie ;
3. utiliser « monotone + bornée $\Rightarrow$ convergente » ;
4. seulement ensuite, si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, poser $u_n \rightarrow \ell$ et résoudre $\ell = f(\ell)$;
5. éliminer les solutions incompatibles avec l'intervalle ou la monotonie.

8.1. Retour sur $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$

La suite est croissante et majorée par 2, donc convergente. Si $v_n \rightarrow \ell$, la continuité de $x \mapsto \sqrt{2+x}$ donne

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Comme $\ell \geq 0$,

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0,$$

donc

$$\boxed{\ell = 2}.$$

9. Suites de la forme $v_n = f(u_n)$

Théorème / Propriété

Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors

$$f(u_n) \rightarrow f(\ell).$$

Deux limites avec composition

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \left(n \sin \frac{1}{n} \right), \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n \arctan \left(\frac{8}{n} \right)}.$$

Corrigé détaillé

1) On sait que $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$. Avec $x = 1/n$,

$$n \sin(1/n) = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \rightarrow 1.$$

La fonction $\arctan$ est continue, donc

$$\boxed{L_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}}.$$

2)

$$n \arctan(8/n) = 8 \frac{\arctan(8/n)}{8/n} \rightarrow 8.$$

La racine cubique est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{L_2 = \sqrt[3]{8} = 2}.$$

10. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

10.1. Point fixe et intervalle invariant

Théorème / Propriété

Supposons f continue sur un intervalle I , $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et (u_n) convergente. Alors sa limite $\ell \in I$ vérifie

$$\boxed{f(\ell) = \ell}.$$

Attention

Résoudre $f(x) = x$ ne prouve jamais, à lui seul, la convergence. Il faut d'abord établir que la suite converge (souvent grâce à la monotonie et aux bornes).

10.2. Activité 3 : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Exercice

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1, u_0 = 0, u_{n+1} = f(u_n).$$

Corrigé détaillé

1) Intersection avec $y = x$.

$$x = \frac{1}{2}x + 1 \iff \frac{1}{2}x = 1 \iff \boxed{x = 2}.$$

Le point d'intersection est $(2, 2)$.

2) Premiers termes.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{3}{2}, \quad u_3 = \frac{7}{4}.$$

Ils suggèrent une croissance vers 2.

3) Croissance et majoration. Montrons $u_n \leq 2$. Initialement $u_0 = 0 \leq 2$. Si $u_n \leq 2$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2.$$

Donc $u_n \leq 2$. Ensuite

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0.$$

La suite est croissante et majorée par 2, donc convergente.

4) Transformation géométrique. On pose $v_n = u_n + \alpha$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - \alpha) + 1 + \alpha = \frac{1}{2}v_n + 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Il faut $1 + \alpha/2 = 0$, donc $\boxed{\alpha = -2}$. Ainsi $v_n = u_n - 2$ et

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.$$

Comme $v_0 = -2$,

$$v_n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2^{1-n}.$$

Donc

$$\boxed{u_n = 2 - 2^{1-n} = 2(1 - 2^{-n})}.$$

Finalement

$$\boxed{u_n \rightarrow 2}.$$

10.3. Exercice d'application : $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

Exercice

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \frac{3x+2}{x+2}.$$

Corrigé détaillé

1) Variations et image de $[0, 2]$.

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

sur $[0, 2]$. Donc f y est croissante.

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 2.$$

Ainsi

$$f([0, 2]) = [1, 2] \subset [0, 2].$$

2a) Invariance. $u_0 = 1 \in [0, 2]$. Si $u_n \in [0, 2]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 2]$. Donc

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

2b) Monotonie.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}.$$

Sur $[0, 2]$, les trois facteurs utiles sont non négatifs ~~donc~~ le dénominateur est positif; donc $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite est croissante et majorée par 2, donc convergente.

2c) Limite. Soit ℓ sa limite. Alors

$$\ell = \frac{3\ell + 2}{\ell + 2} \iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Comme $\ell \in [0, 2]$,

$$\ell = 2.$$

10.4. Exercice : une suite croissante non majorée

Exercice

$u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1.$$

Montrer que (u_n) est croissante, non majorée, puis déterminer sa limite.

Corrigé détaillé

1) Croissance.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0.$$

Donc la suite est strictement croissante.

2) Non-majoration par l'absurde. Supposons (u_n) majorée. Comme elle est croissante, elle serait convergente vers un réel ℓ . En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1,$$

on obtiendrait

$$\ell = \ell^2 + \ell + 1 \iff \ell^2 + 1 = 0,$$

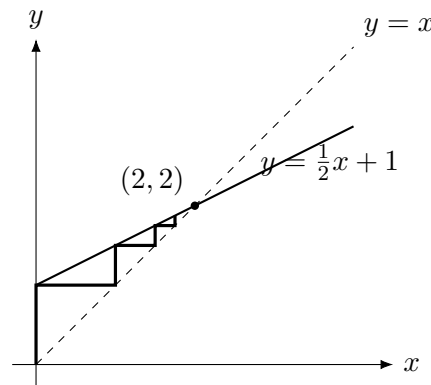
impossible dans $\mathbb{R}$. Donc (u_n) n'est pas majorée.

3) Limite. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Ainsi

$$\boxed{u_n \rightarrow +\infty}.$$

10.5. Comprendre la représentation « en toile d'araignée »

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut représenter graphiquement les itérations entre la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Le mouvement vertical envoie u_n vers $f(u_n) = u_{n+1}$; le mouvement horizontal reporte cette ordonnée sur l'axe des abscisses via la droite $y = x$. Un point fixe est précisément une intersection de C_f et $y = x$.



10.6. Exemple graphique : même fonction, comportements différents

Un point essentiel apparaît avec $f(x) = x^2$.

Cas 1 : $u_0 = 0.8$ et $u_{n+1} = u_n^2$. Comme $0 < u_0 < 1$, si $0 < u_n < 1$, alors $0 < u_n^2 < u_n < 1$. Par récurrence,

$$0 < u_{n+1} < u_n < 1.$$

La suite est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite $\ell \in [0, 1]$ vérifie $\ell = \ell^2$, donc $\ell \in \{0, 1\}$. Comme $u_n \leq u_0 = 0.8 < 1$, on ne peut pas avoir $\ell = 1$; ainsi

$$\boxed{u_n \rightarrow 0}.$$

D'ailleurs $u_n = (0.8)^{2^n}$.

Cas 2 : $v_0 = 1.3$ et $v_{n+1} = v_n^2$. Si $v_n > 1$, alors $v_{n+1} = v_n^2 > v_n > 1$, donc la suite est strictement croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers $L \geq 1.3$ vérifiant $L = L^2$, donc $L \in \{0, 1\}$, contradiction. Elle est donc croissante non majorée et

$$\boxed{v_n \rightarrow +\infty}.$$

Cet exemple prouve que la monotonie de la fonction f ne détermine pas à elle seule le comportement de la suite : $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$, mais selon le terme initial la suite peut décroître vers 0 ou croître vers $+\infty$.

11. Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

- l'une est croissante et l'autre décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Alors elles convergent et ont la même limite.

Théorème / Propriété

Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$, alors pour tout n ,

$$u_n \leq v_n.$$

Preuve propre. Supposons qu'il existe p tel que $u_p > v_p$. Pour tout $n \geq p$, par monotonie,

$$u_n \geq u_p > v_p \geq v_n.$$

Donc

$$u_n - v_n \geq u_p - v_p > 0,$$

ce qui empêche $u_n - v_n$ de tendre vers 0. Contradiction. Donc $u_n \leq v_n$.

11.1. Activité 4 : sommes de $1/k!$

Exercice

Pour $n \geq 0$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

et, pour $n \geq 1$,

$$v_n = u_n + \frac{1}{n n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Corrigé détaillé

1) (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

2) (v_n) est décroissante pour $n \geq 1$. Calculons :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!}.$$

Mettons au dénominateur $(n+1)^2 n!$:

$$\frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{n n!}.$$

Factorisons directement $1/n!$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right).$$

Or

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

et

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

3) Écart.

$$v_n - u_n = \frac{1}{n n!} > 0.$$

Comme $n! \geq 1$ et même $n n! \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n n!} \rightarrow 0.$$

Les suites sont donc adjacentes ; elles convergent vers une même limite. (Cette limite est le nombre e , mais l'identification à e dépasse ce qui est nécessaire ici.)

11.2. Exercice de synthèse : moyenne arithmétique et produit constant

Exercice

On suppose $0 < a < b < 2a$, $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout n ,

$$u_n v_n = ab, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) .

Corrigé détaillé

La relation $u_n v_n = ab$ permet d'écrire

$$u_{n+1} = \frac{ab}{v_{n+1}} = \frac{2ab}{u_n + v_n}.$$

1) Prouver $0 < u_n < v_n$. C'est vrai au rang 0. Supposons $0 < u_n < v_n$. Alors $v_{n+1} = (u_n + v_n)/2 > 0$ et

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1} v_{n+1} = v_{n+1}^2 - ab.$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique (AM-GM),

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{ab},$$

car $u_n \neq v_n$. Donc $v_{n+1}^2 > ab = u_{n+1} v_{n+1}$ et, puisque $v_{n+1} > 0$, $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$.

2) Monotonies. Puisque $u_n < v_n$,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < v_n,$$

donc (v_n) est décroissante. De plus

$$u_{n+1} = \frac{ab}{v_{n+1}} > \frac{ab}{v_n} = u_n,$$

donc (u_n) est croissante.

3a) Contraction de l'écart. On calcule

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

Comme $u_n + v_n > v_n - u_n > 0$,

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

3b) Limite de l'écart. Par récurrence,

$$0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}(b - a),$$

et le membre de droite tend vers 0. Donc

$$\boxed{v_n - u_n \rightarrow 0}.$$

Les suites sont adjacentes.

4) Limite commune. Notons L la limite commune. Comme $u_n v_n = ab$ pour tout n , en passant à la limite :

$$L^2 = ab.$$

Les suites sont positives, donc $L > 0$ et

$$\boxed{L = \sqrt{ab}}.$$

Ainsi

$$\boxed{u_n \rightarrow \sqrt{ab} \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow \sqrt{ab}}.$$

12. Méthodes rapides de calcul des limites

12.1. Quotients de polynômes

Pour

$$u_n = \frac{a_p n^p + \dots}{b_q n^q + \dots},$$

on factorise n^p au numérateur et n^q au dénominateur. Le comportement dépend de $p - q$:

- $p < q$: limite 0 ;
- $p = q$: limite a_p/b_q ;
- $p > q$: croissance en puissance de n , avec signe à déterminer.

12.2. Radicaux

Réflexes : extraire la puissance dominante ou multiplier par le conjugué pour une différence de racines carrées.

12.3. Sommes comportant n termes

Encadrer chaque terme par un minimum et un maximum faciles, puis multiplier par le nombre de termes. Par exemple :

$$\frac{n}{\max d_{n,k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_{n,k}} \leq \frac{n}{\min d_{n,k}}.$$

12.4. Puissances exponentielles

Diviser par la plus grande base : dans une expression $2^n + 3^n - 5^n$, la base 5 domine en valeur absolue.

13. Pièges fréquents au Baccalauréat

Les erreurs qui coûtent des points

1. Résoudre $f(\ell) = \ell$ avant d'avoir prouvé la convergence.
2. Écrire « la suite est croissante car f est croissante ». C'est faux en général.
3. Oublier de prouver que le dénominateur reste non nul ou que la racine est définie.
4. Utiliser une inégalité en inversant sans tenir compte du signe.
5. Déclarer une forme ∞/∞ égale à 1 : c'est une forme indéterminée.
6. Confondre « bornée » et « convergente ». $(-1)^n$ est bornée mais divergente.
7. Confondre « divergente » avec « tend vers ∞ ». Une suite peut diverger par oscillation.
8. Pour une géométrie q^n , oublier le cas $q < 0$.

14. Exercices supplémentaires type 2Bac Maroc - corrigés

14.1. Exercice A : suite arithmético-géométrique

Exercice

$$u_0 = 7 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2.$$

1. Déterminer le point fixe ℓ .
2. Poser $v_n = u_n - \ell$ et expliciter u_n .
3. Étudier la monotonie et la limite.
4. Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

Corrigé détaillé

Le point fixe vérifie $\ell = \frac{3}{4}\ell + 2$, donc $\ell = 8$. Posons $v_n = u_n - 8$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n.$$

Comme $v_0 = -1$,

$$v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad \boxed{u_n = 8 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Puisque $(3/4)^n$ décroît vers 0, $-(3/4)^n$ croît vers 0, donc (u_n) est croissante et

$$\boxed{u_n \rightarrow 8}.$$

Enfin

$$\sum_{k=0}^n u_k = 8(n+1) - \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = 8(n+1) - \frac{1 - (3/4)^{n+1}}{1/4}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n u_k = 8(n+1) - 4 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}.$$

14.2. Exercice B : récurrence avec racine

Exercice

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que $2 \leq u_n \leq 4$.
2. Étudier la monotonie.
3. Déterminer la limite.

Corrigé détaillé

Si $2 \leq u_n \leq 4$, alors $10 \leq 3u_n + 4 \leq 16$, donc

$$\sqrt{10} > 2, \quad u_{n+1} \leq 4.$$

Comme $u_0 = 3 \in [2, 4]$, l'intervalle est invariant.

Pour la monotonie, comme $u_n \geq 0$,

$$u_{n+1} \geq u_n \iff 3u_n + 4 \geq u_n^2 \iff (u_n - 4)(u_n + 1) \leq 0.$$

C'est vrai sur $[2, 4]$. La suite est croissante et majorée par 4, donc convergente. Sa limite $\ell \in [2, 4]$ vérifie

$$\ell = \sqrt{3\ell + 4} \iff \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \iff (\ell - 4)(\ell + 1) = 0.$$

Ainsi $\boxed{\ell = 4}$.

14.3. Exercice C : gendarmes avec sinus

Exercice

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin(n^2)}{2n + \cos n}.$$

Corrigé détaillé

On divise par n :

$$\frac{1 + \sin(n^2)/n}{2 + \cos n/n}.$$

Comme $|\sin(n^2)| \leq 1$ et $|\cos n| \leq 1$,

$$\frac{\sin(n^2)}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{\cos n}{n} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sin(n^2)}{2n + \cos n} = \frac{1}{2}}.$$

14.4. Exercice D : somme et encadrement

Exercice

Déterminer la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + 2k}.$$

Corrigé détaillé

Pour $1 \leq k \leq n$:

$$n^2 + 2 \leq n^2 + 2k \leq n^2 + 2n.$$

Donc

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + 2k} \leq \frac{1}{n^2 + 2}.$$

En sommant :

$$\frac{n}{n^2 + 2n} \leq S_n \leq \frac{n}{n^2 + 2}.$$

Les deux bornes tendent vers 0, donc $\boxed{S_n \rightarrow 0}$.

14.5. Exercice E : homographie et transformation en géométrie

Exercice

$u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}.$$

1. Vérifier que $1 < u_n \leq 2$ pour tout n .
2. Poser $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire une expression de u_n et sa limite.

Corrigé détaillé

Posons $f(x) = \frac{3x + 1}{x + 3}$. Sur $[1, 2]$, le dénominateur est positif. On a

$$f(x) - 1 = \frac{2(x - 1)}{x + 3} \geq 0,$$

et

$$2 - f(x) = \frac{2x + 6 - 3x - 1}{x + 3} = \frac{5 - x}{x + 3} > 0.$$

Ainsi $f([1, 2]) \subset [1, 2]$. Comme $u_0 = 2$, une récurrence donne $1 \leq u_n \leq 2$; et comme $u_1 = 7/5 > 1$, on obtient $1 < u_n \leq 2$ pour $n \geq 1$.

Essai de comprendre ce qui ne va pas logiquement et refait la démonstration rigoureuse

Calculons

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}.$$

Or

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 3}, \quad u_{n+1} + 1 = \frac{4(u_n + 1)}{u_n + 3}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{2} v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $1/2$. Comme

$$v_0 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3},$$

on a

$$v_n = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Réolvons $v_n = (u_n - 1)/(u_n + 1)$ en u_n :

$$v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff u_n(1 - v_n) = 1 + v_n,$$

donc

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \frac{3 \cdot 2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 1}.$$

Fais la démonstration étape par étape pour trouver l'expression explicite de U_n

Puisque $v_n \rightarrow 0$,

$$u_n \rightarrow 1.$$

14.6. Exercice F : adjacence classique

Exercice

Pour $n \geq 1$, poser

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Étudier la monotonie de (u_n) et (v_n) et montrer qu'elles sont adjacentes.

Corrigé détaillé

$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2 > 0$, donc (u_n) croît. Ensuite

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Or

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)},$$

donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Ainsi (v_n) décroît. Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Les suites sont adjacentes et ont la même limite.

15. Démonstrations fondamentales à savoir refaire

15.1. Toute suite convergente est bornée

Théorème / Propriété

Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors la suite (u_n) est bornée.

Corrigé détaillé

La définition de la convergence est valable pour tout $\varepsilon > 0$. Choisissons le nombre très simple $\varepsilon = 1$. Il existe alors un rang N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < 1.$$

Cette inégalité équivaut à

$$-1 < u_n - \ell < 1,$$

donc

$$\ell - 1 < u_n < \ell + 1 \quad (n \geq N).$$

Les termes situés après le rang N sont donc tous enfermés dans l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$. Il ne reste qu'un nombre fini de termes : $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$. Un ensemble fini de réels possède un minimum et un maximum. En prenant

$$m = \min(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell - 1), \quad M = \max(u_0, \dots, u_{N-1}, \ell + 1),$$

on obtient

$$m \leq u_n \leq M \quad \text{pour tout } n.$$

La suite est donc bornée.

15.2. Théorème des gendarmes : preuve guidée

Théorème / Propriété

Si, à partir d'un certain rang,

$$a_n \leq u_n \leq b_n,$$

et si $a_n \rightarrow \ell$ et $b_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

Corrigé détaillé

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \rightarrow \ell$, il existe N_1 tel que

$$n \geq N_1 \implies \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon.$$

Comme $b_n \rightarrow \ell$, il existe N_2 tel que

$$n \geq N_2 \implies \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon.$$

Enfin, il existe N_0 à partir duquel $a_n \leq u_n \leq b_n$. Pour

$$n \geq N = \max(N_0, N_1, N_2),$$

on a simultanément

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < \ell + \varepsilon.$$

Ainsi

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \iff |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

C'est exactement la définition de $u_n \rightarrow \ell$.

15.3. Pourquoi une suite croissante et majorée converge-t-elle ?

Idée mathématique

Une suite croissante ne peut jamais revenir en arrière. Si elle possède en plus un plafond, ses termes se rapprochent du plus petit plafond possible, appelé la borne supérieure. Au niveau du Baccalauréat, on utilise ce résultat comme théorème de convergence monotone.

Théorème / Propriété

Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

La réciproque est fausse : une suite convergente n'est pas nécessairement monotone. Par exemple

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \rightarrow 0$$

mais ses termes alternent de signe.

15.4. Suites adjacentes : preuve de la limite commune

Théorème / Propriété

Supposons (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$. Alors les deux suites convergent vers la même limite.

Corrigé détaillé

On commence par constater que $u_n \leq v_n$ pour tout n dans la situation classique d'adjacence. Comme (u_n) est croissante et $u_n \leq v_n \leq v_0$, elle est majorée par v_0 : elle converge donc vers un réel ℓ . De même, (v_n) est décroissante et $v_n \geq u_n \geq u_0$, donc elle est minorée par u_0 : elle converge vers un réel ℓ' . Enfin

$$v_n - u_n \rightarrow \ell' - \ell.$$

Mais l'hypothèse donne aussi $v_n - u_n \rightarrow 0$. Par unicité de la limite,

$$\ell' - \ell = 0,$$

d'où

$$\boxed{\ell' = \ell.}$$

16. La démonstration par récurrence appliquée aux suites

Schéma obligatoire en trois étapes

Pour démontrer une propriété $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie à un rang $n \geq n_0$ et démontrer $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : invoquer le principe de récurrence.

Ne jamais écrire seulement « par récurrence c'est vrai » : l'hypothèse de récurrence et son utilisation doivent apparaître.

Exemple complet - encadrement d'une suite récurrente

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer par récurrence que

$$1 \leq u_n \leq 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Corrigé détaillé

Initialisation. $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Hérédité. Supposons qu'à un rang n fixé,

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

En ajoutant 2,

$$3 \leq 2 + u_n \leq 4.$$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2.$$

Or $\sqrt{3} > 1$, ainsi

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.}$$

17. Problèmes de synthèse - niveau Baccalauréat**17.1. Problème 1 : étude complète d'une récurrence homographique****Exercice**

On définit

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n .
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire qu'elle converge.
4. Déterminer sa limite.

Corrigé détaillé

Posons $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$.

1) Invariance de $[0, 1]$. Si $x \in [0, 1]$, alors $x + 4 > 0$. De plus $2x + 3 > 0$, donc $f(x) > 0$. Pour la borne supérieure,

$$f(x) \leq 1 \iff 2x + 3 \leq x + 4 \iff x \leq 1,$$

ce qui est vrai. Ainsi $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Comme $u_0 = 0 \in [0, 1]$, une récurrence donne

$$\boxed{0 \leq u_n \leq 1.}$$

2) Monotonie. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

On factorise le numérateur :

$$-u_n^2 - 2u_n + 3 = (1 - u_n)(u_n + 3).$$

Sur $[0, 1]$, les trois facteurs $1 - u_n$, $u_n + 3$ et $u_n + 4$ ont les signes $+, +, +$. Par conséquent

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Donc (u_n) est croissante.

3) Convergence. Elle est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

4) Limite. Notons ℓ sa limite. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\ell = \frac{2\ell + 3}{\ell + 4}.$$

Ainsi

$$\ell^2 + 4\ell = 2\ell + 3 \iff \ell^2 + 2\ell - 3 = 0 \iff (\ell - 1)(\ell + 3) = 0.$$

Comme $\ell \in [0, 1]$, seule la solution 1 convient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

17.2. Problème 2 : limite d'une somme par encadrement**Exercice**

Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ en détaillant chaque inégalité.

Corrigé détaillé

Pour $1 \leq k \leq n$, on a $k^2 \geq 1$, donc

$$n^2 + k^2 \geq n^2 + 1.$$

Les dénominateurs étant positifs, l'inversion renverse l'inégalité :

$$0 < \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

En additionnant ces n inégalités,

$$0 < S_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Or

$$\frac{n}{n^2 + 1} = \frac{1/n}{1 + 1/n^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{S_n \rightarrow 0.}$$

17.3. Problème 3 : suite arithmético-géométrique et somme

Exercice

Soit $u_0 = 10$ et

$$u_{n+1} = 0.8u_n + 6.$$

1. Déterminer le point fixe ℓ .
2. Montrer que $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de u_n .
5. Calculer $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Corrigé détaillé

Le point fixe vérifie

$$\ell = 0.8\ell + 6,$$

donc $0.2\ell = 6$ et

$$\ell = 30.$$

Posons $v_n = u_n - 30$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 30 = 0.8u_n + 6 - 30 = 0.8(u_n - 30) = 0.8v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0.8 = 4/5$. Son premier terme vaut

$$v_0 = 10 - 30 = -20.$$

D'où

$$v_n = -20 \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

et finalement

$$u_n = 30 - 20 \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Comme $|4/5| < 1$,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \rightarrow 0,$$

donc

$$u_n \rightarrow 30.$$

Enfin

$$T_n = \sum_{k=0}^n \left[30 - 20 \left(\frac{4}{5}\right)^k \right] = 30(n+1) - 20 \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

La somme géométrique vaut

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1 - (4/5)^{n+1}}{1 - 4/5} = 5 \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \right].$$

Ainsi

$$T_n = 30(n+1) - 100 + 100 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

18. Fiche de synthèse finale

Situation	Réflexe à appliquer
Suite arithmétique	$u_{n+1} - u_n = r$, puis $u_n = u_p + (n - p)r$; somme = nombre de termes $\times$ moyenne des extrêmes.
Suite géométrique $u_{n+1} = au_n + b$	$u_{n+1}/u_n = q$; terme $u_n = u_p q^{n-p}$; somme géométrique. Chercher le point fixe $\ell = b/(1 - a)$, puis poser $v_n = u_n - \ell$.
Monotonie	Étudier $u_{n+1} - u_n$, un quotient, ou $f(x) - x$ sur un intervalle invariant.
Suite récurrente	Invariance $\rightarrow$ monotonie $\rightarrow$ bornes $\rightarrow$ convergence $\rightarrow$ équation du point fixe.
Limite explicite	Puissance dominante, factorisation, conjugué, division par la plus grande exponentielle.
Somme à n termes $\sin$, $\cos$	Utiliser $ \sin x \leq 1$ et $ \cos x \leq 1$, puis encadrer la suite et appliquer le théorème des gendarmes.
Suite géométrique q^n	$ q < 1 \Rightarrow 0$; $q > 1 \Rightarrow +\infty$; $q \leq -1$: attention aux oscillations.
Suites adjacentes	L'une croît, l'autre décroît, et leur différence tend vers 0.

Ressources pédagogiques complémentaires

Pour vérifier l'adéquation du contenu au niveau 2Bac Sciences Mathématiques et enrichir les méthodes d'entraînement, on peut consulter notamment :

-  — AlloSchool, « Mathématiques 2ème BAC Sciences Mathématiques A BIOF », chapitre « Suites numériques » : cours, exercices et problème de synthèse.
<https://www.alloschool.com/course/mathematiques-2eme-bac-sciences-mathematiques-a-biof>
-  — Moutamadris, « Résumé et exercices Suites numériques 2Bac SM BIOF » : compétences du chapitre, cours, résumés et exercices.
<https://moutamadris.ma/resume-et-exercices-suites-numeriques-2bac-sm-biof/>
-  — Maths et Tiques (Yvan Monka), « Terminale – Les suites » : cours complet, méthodes, démonstrations, exercices et vidéos pédagogiques pour approfondir les suites numériques.
<https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale>
-  — Sésamath.ch, ressources pour l'enseignement post-obligatoire et la maturité gymnasiale : manuels, exercices et compléments numériques de mathématiques, avec contenus d'approfondissement.
<https://sesamath.ch/post-obligatoire>
-  — Khan Academy, « Sequences and Series » : cours interactifs, vidéos, exercices autocorrigés, quiz et problèmes sur les suites arithmétiques et géométriques, les récurrences et les sommes.
<https://www.khanacademy.org/math/algebra2/sequences-and-series>
-  — Math et Magie, « Suites numériques – Cours et exercices corrigés » : fiches de cours, méthodes et nombreux exercices avec corrigés détaillés.
<https://www.math-et-magie.com/2eme-bac/cours-suites-numeriques.html>
-  — Alloprof, « Suites et séries » : explications claires, vidéos, exercices interactifs et résumés pour maîtriser les suites arithmétiques, géométriques et les limites.
<https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/suites-et-series-m1368>

À retenir : dans un problème de suites, la réussite vient moins d'une formule isolée que d'un enchaînement rigoureux : domaine et invariance, signe, monotonie, bornes, convergence, puis identification de la limite.