

1) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité corrigée – démonstrations détaillées

Énoncé

Activité : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 1- Calculer les 3 premiers termes.
- 2- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$.
- 3- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$.

Question 1 – Calcul des 3 premiers termes

La suite commence à l'indice 0. Les trois premiers termes sont donc u_0 , u_1 et u_2 .

On connaît directement :

$$u_0 = 0.$$

Pour calculer u_1 , on utilise la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$u_{0+1} = \sqrt{u_0 + 2}.$$

Donc

$$u_1 = \sqrt{0 + 2} = \sqrt{2}.$$

Pour calculer u_2 , on utilise la relation de récurrence avec $n = 1$:

$$u_{1+1} = \sqrt{u_1 + 2}.$$

Comme $u_1 = \sqrt{2}$, on obtient

$$u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Ainsi, les trois premiers termes sont

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Comme u_0 est donné, forcément on veut qu'on puisse aller à u_3

À titre indicatif,

$$u_0 = 0, \quad u_1 \approx 1,414, \quad u_2 \approx 1,848.$$

Question 2 – Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$

Nous allons effectuer une démonstration par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons la propriété

$$P(n) : u_n \geq 0.$$

1. Initialisation

Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = 0.$$

Par conséquent,

$$u_0 \geq 0.$$

Donc la propriété $P(0)$ est vraie.

2. Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire supposons que

$$u_n \geq 0.$$

Nous devons montrer que

$$u_{n+1} \geq 0.$$

D'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

L'hypothèse de récurrence donne $u_n \geq 0$. En ajoutant 2 aux deux membres, on obtient

$$u_n + 2 \geq 2 > 0.$$

Le nombre $u_n + 2$ est donc positif, et sa racine carrée est bien définie. Or, par définition, la racine carrée d'un nombre positif ou nul est toujours positive ou nulle. Ainsi,

$$\sqrt{u_n + 2} \geq 0.$$

Donc

$$u_{n+1} \geq 0.$$

Ainsi, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: la propriété est héréditaire.

3. Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n.}$$

Remarque utile. À partir du rang 1, on a même $u_n > 0$, car $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2}$ et $u_{n-1} + 2 \geq 2 > 0$.

Question 3 – Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$

Nous allons de nouveau raisonner par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$Q(n) : \quad u_n \leq 2.$$

1. Initialisation

Pour $n = 0$, on sait que

$$u_0 = 0.$$

Comme

$$0 \leq 2,$$

on obtient

$$u_0 \leq 2.$$

Donc la propriété $Q(0)$ est vraie.

2. Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $Q(n)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_n \leq 2.$$

Nous voulons prouver que

$$u_{n+1} \leq 2.$$

À partir de l'hypothèse $u_n \leq 2$, on ajoute 2 aux deux membres :

$$u_n + 2 \leq 4.$$

D'après la question 2, $u_n \geq 0$, donc

$$u_n + 2 \geq 2 > 0.$$

Les deux membres de l'inégalité $u_n + 2 \leq 4$ sont donc positifs ou nuls. La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$, on peut prendre la racine carrée des deux membres en conservant le sens de l'inégalité :

$$\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}.$$

Or

$$\sqrt{4} = 2$$

et, par définition de la suite,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} \leq 2.$$

Ainsi, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$: la propriété est héréditaire.

3. Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2.}$$

Bilan de l'activité

Les questions 2 et 3 donnent simultanément

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2.}$$

La suite (u_n) est donc :

- **minorée** par 0 ;
- **majorée** par 2 ;
- par conséquent, **bornée**.

Rappeler surtout que Un est bornée ne veut pas dire forcément qu'elle converge!!!

Exemple – Suite minorée, majorée et bornée

Correction complète et détaillée

Énoncé

Exemple : soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 1) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0.
- 2) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.
- 3) Que peut-on déduire ?

Préliminaire : comprendre la suite

Pour tout entier naturel non nul n , on a

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Comme $n+1 > n$, on s'attend à ce que $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, donc à ce que v_n soit positif. Pour obtenir une majoration simple, la forme avec une différence de deux racines carrées n'est cependant pas la plus pratique.

Idée essentielle

On utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Au numérateur, on reconnaît l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Cette écriture sera particulièrement utile pour la question 2.

1) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0

Définition à utiliser

Dire qu'une suite (v_n) est **minorée par** 0 signifie que tous ses termes sont supérieurs ou égaux à 0 :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n \geq 0.$$

Soit donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme

$$n+1 > n \geq 0,$$

et comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}.$$

En soustrayant $\sqrt{n}$ aux deux membres,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0.$$

Or

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Par conséquent,

$$v_n > 0,$$

et donc, a fortiori,

$$v_n \geq 0.$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0.}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est **minorée par 0**.

Remarque. On a même montré une propriété un peu plus forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n > 0.$$

Aucun terme de la suite n'est donc égal à 0.

2) Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

Définition à utiliser

Dire que la suite est **majorée par** $\frac{1}{2}$ signifie qu'il faut établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \frac{1}{2}.$$

À partir de la forme rationalisée obtenue plus haut,

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Puisque $n \geq 1$, on a

$$\sqrt{n} \geq 1.$$

De plus, $n+1 \geq n$, donc

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}.$$

En additionnant cette dernière inégalité avec $\sqrt{n}$, on obtient

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}.$$

Comme $\sqrt{n} \geq 1$,

$$2\sqrt{n} \geq 2.$$

Ainsi,

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2.$$

Les deux membres étant strictement positifs, prendre les inverses renverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}.$$

Or

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Donc

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est **majorée par** $\frac{1}{2}$.

Autre vérification directe

On peut également remarquer que, pour $n \geq 1$,

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{2} + 1 > 2,$$

ce qui donne même

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2}.$$

La majoration demandée $v_n \leq \frac{1}{2}$ est donc bien vérifiée.

3) Que peut-on déduire ?

D'après la question 1,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_n.$$

D'après la question 2,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \frac{1}{2}.$$

En regroupant les deux résultats,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}.$$

Une suite qui possède à la fois un minorant et un majorant est appelée une **suite bornée**. Ici, 0 est un minorant et $\frac{1}{2}$ est un majorant.

Conclusion

On peut donc déduire que

$(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée.

Plus précisément,

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bilan de la démonstration

La transformation centrale est

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Elle permet de voir immédiatement que v_n est positif et facilite la comparaison avec $\frac{1}{2}$. On a finalement établi

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

donc la suite est à la fois minorée, majorée et par conséquent bornée.

Exercice 1 – Suite bornée

Énoncé

Exercice 1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque de vocabulaire. L'énoncé emploie le mot « récurrente ». La formule donnée définit en réalité directement u_n en fonction de n ; il s'agit donc d'une définition explicite. Nous conservons néanmoins l'énoncé tel qu'il apparaît sur l'image.

Correction détaillée

Pour montrer qu'une suite (u_n) est **bornée**, il suffit de trouver deux nombres réels m et M tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Autrement dit, il faut montrer que la suite est à la fois **minorée** et **majorée**.

Ici,

$$u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}}.$$

Nous allons encadrer séparément le numérateur et le dénominateur.

1. Encadrement du numérateur $2 + \cos n$

Pour tout réel x , on sait que

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Cette propriété est donc vraie en particulier pour $x = n$, avec $n \in \mathbb{N}$:

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

En ajoutant 2 aux trois membres, on obtient

$$1 \leq 2 + \cos n \leq 3.$$

Ainsi,

$$\boxed{1 \leq 2 + \cos n \leq 3.} \quad (1)$$

En particulier, le numérateur est toujours strictement positif.

2. Encadrement du dénominateur $3 - \sin \sqrt{n}$

Pour tout réel x , on sait également que

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$, donc $\sqrt{n}$ est bien défini. En prenant $x = \sqrt{n}$, on obtient

$$-1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1.$$

Multiplions cette inégalité par -1 . Le sens des inégalités s'inverse :

$$1 \geq -\sin \sqrt{n} \geq -1.$$

En la remettant dans l'ordre croissant :

$$-1 \leq -\sin \sqrt{n} \leq 1.$$

Puis, en ajoutant 3 aux trois membres :

$$2 \leq 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{2 \leq 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4.} \quad (2)$$

En particulier,

$$3 - \sin \sqrt{n} \geq 2 > 0.$$

Le dénominateur ne s'annule donc jamais ; u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Recherche d'un minorant de u_n

D'après (1),

$$2 + \cos n \geq 1,$$

et d'après (2),

$$3 - \sin \sqrt{n} \leq 4.$$

De plus, le dénominateur est strictement positif. On peut procéder rigoureusement en deux étapes.

Comme $2 + \cos n \geq 1$ et $3 - \sin \sqrt{n} > 0$,

$$\frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \geq \frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}}.$$

D'autre part,

$$0 < 3 - \sin \sqrt{n} \leq 4.$$

Pour des nombres strictement positifs, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité ; ainsi

$$\frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}} \geq \frac{1}{4}.$$

Par transitivité,

$$u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \geq \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\boxed{u_n \geq \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.} \quad (3)$$

La suite est donc **minorée par** $\frac{1}{4}$.

4. Recherche d'un majorant de u_n

D'après (1),

$$2 + \cos n \leq 3,$$

et d'après (2),

$$3 - \sin \sqrt{n} \geq 2 > 0.$$

Comme le dénominateur est positif,

$$\frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{3}{3 - \sin \sqrt{n}}.$$

Puis, puisque

$$3 - \sin \sqrt{n} \geq 2 > 0,$$

on a, en prenant les inverses,

$$\frac{1}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}.$$

En multipliant par $3 > 0$,

$$\frac{3}{3 - \sin \sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}.$$

Par conséquent,

$$u_n \leq \frac{3}{2}.$$

Donc

$$\boxed{u_n \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.} \quad (4)$$

La suite est donc **majorée par** $\frac{3}{2}$.

5. Conclusion

En réunissant (3) et (4), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}}.$$

La suite possède donc un minorant, $\frac{1}{4}$, et un majorant, $\frac{3}{2}$. Par définition,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}.}$$

On comprend qu'il faut maîtriser à la perfection les règles de l'ordre

Méthode à retenir

Lorsqu'une suite est donnée sous la forme d'un quotient contenant des sinus et des cosinus, on commence souvent par utiliser les encadrements fondamentaux

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

On encadre ensuite séparément le numérateur et le dénominateur. Il faut surtout vérifier que le dénominateur reste strictement positif avant de comparer des quotients ou de prendre des inverses.

On comprend qu'il faut maîtriser à la perfection les règles de l'ordre

Exemple - Montrer qu'une suite est bornée

Énoncé - reprise fidèle

Exemple : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque de vocabulaire. L'énoncé emploie le mot « récurrente ». Cependant, la formule donnée exprime directement u_n en fonction de n ; il s'agit donc, au sens strict, d'une **suite définie explicitement**. Nous conservons néanmoins l'énoncé tel qu'il apparaît sur l'image.

Correction très détaillée

1. Ce qu'il faut démontrer

Dire qu'une suite (u_n) est **bornée** signifie qu'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Autrement dit, il faut trouver :

- un **minorant** m de la suite ;
- un **majorant** M de la suite.

Ici,

$$u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n}.$$

La présence du sinus donne immédiatement l'idée d'utiliser l'encadrement fondamental

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2. Encadrement du facteur $\sin \sqrt{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$, donc $\sqrt{n}$ existe et appartient à $[0, +\infty[$. En particulier, $\sqrt{n}$ est un réel.

Or, pour tout réel x ,

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

En prenant $x = \sqrt{n}$, on obtient

$$-1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1.$$

Ce résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Étude du facteur $(-1)^n$

Pour tout entier naturel n ,

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{(-1)^n \in \{-1, 1\}}.$$

En particulier,

$$\boxed{|(-1)^n| = 1.}$$

4. Méthode la plus directe : utiliser la valeur absolue

Partons de

$$u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n}.$$

Prenons la valeur absolue :

$$|u_n| = |(-1)^n \sin \sqrt{n}|.$$

En utilisant la propriété

$$|ab| = |a| |b|,$$

on obtient

$$|u_n| = |(-1)^n| |\sin \sqrt{n}|.$$

Or

$$|(-1)^n| = 1,$$

donc

$$|u_n| = |\sin \sqrt{n}|.$$

Comme toute valeur du sinus est comprise entre -1 et 1 ,

$$|\sin \sqrt{n}| \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{|u_n| \leq 1.}$$

Rappelons maintenant l'équivalence fondamentale :

$$|x| \leq a \quad (a \geq 0) \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Avec $x = u_n$ et $a = 1$, on obtient

$$\boxed{-1 \leq u_n \leq 1.}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq u_n \leq 1.}$$

Ainsi :

- -1 est un **minorant** de la suite ;
- 1 est un **majorant** de la suite.

On a trouvé deux nombres réels fixes -1 et 1 tels que

$$-1 \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée**.

5. Seconde démonstration : distinguer la parité de n

Cette méthode est plus longue, mais elle permet de voir précisément le rôle de $(-1)^n$.

Premier cas : n est pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Ainsi,

$$(-1)^n = (-1)^{2k} = 1.$$

Donc

$$u_n = \sin \sqrt{n}.$$

Comme

$$-1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1,$$

on obtient

$$-1 \leq u_n \leq 1.$$

Deuxième cas : n est impair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi,

$$(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1.$$

Donc

$$u_n = -\sin \sqrt{n}.$$

Or

$$-1 \leq \sin \sqrt{n} \leq 1.$$

En multipliant cette double inégalité par -1 , on inverse les deux signes :

$$1 \geq -\sin \sqrt{n} \geq -1.$$

En remettant les bornes dans l'ordre croissant,

$$-1 \leq -\sin \sqrt{n} \leq 1.$$

Donc, là encore,

$$-1 \leq u_n \leq 1.$$

Dans les deux cas, pair ou impair,

$$\boxed{-1 \leq u_n \leq 1.}$$

Vérification sur quelques premiers termes

Cette vérification n'est pas une démonstration, mais elle permet de contrôler que l'encadrement obtenu est cohérent.

$$u_0 = (-1)^0 \sin \sqrt{0} = 1 \times 0 = 0.$$

$$u_1 = (-1)^1 \sin \sqrt{1} = -\sin 1.$$

Comme $0 < \sin 1 < 1$, on a bien

$$-1 < u_1 < 0.$$

$$u_2 = (-1)^2 \sin \sqrt{2} = \sin \sqrt{2},$$

et donc

$$0 < u_2 < 1.$$

$$u_3 = (-1)^3 \sin \sqrt{3} = -\sin \sqrt{3},$$

qui appartient également à $[-1, 1]$.

Ces exemples illustrent le fait que le facteur $(-1)^n$ peut changer le signe du sinus, mais ne change jamais sa valeur absolue.

Méthode à retenir

Lorsqu'une suite contient un facteur trigonométrique comme $\sin(\cdot)$ ou $\cos(\cdot)$, il faut penser immédiatement aux encadrements

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Lorsqu'un autre facteur vaut toujours 1 ou -1 , comme $(-1)^n$, la valeur absolue est souvent le moyen le plus rapide :

$$|(-1)^n| = 1.$$

Ici,

$$|u_n| = |(-1)^n| |\sin \sqrt{n}| = |\sin \sqrt{n}| \leq 1,$$

d'où immédiatement

$$-1 \leq u_n \leq 1.$$

Conclusion finale

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq u_n \leq 1}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc **minorée par -1 , majorée par 1** , et par conséquent **bornée**.

2) Monotonie d'une suite.

Activité 2 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer par récurrence que

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Correction détaillée

Nous voulons démontrer que chaque terme de la suite est inférieur ou égal au terme qui le suit. Autrement dit, nous voulons établir la propriété

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}}.$$

Une fois cette propriété démontrée, nous pourrions conclure que la suite (u_n) est **croissante**.

Remarque préalable sur le domaine de la racine carrée. La relation de récurrence contient une racine carrée. Il est donc utile de vérifier que les quantités rencontrées sont bien positives. On a $u_0 = 1 > 0$. De plus, dès qu'un terme u_{n+1} est défini par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2},$$

il est automatiquement positif ou nul. Ainsi tous les termes de la suite sont positifs ou nuls et, en particulier,

$$u_n + 2 \geq 2 > 0.$$

Les racines carrées utilisées ci-dessous sont donc bien définies.

1. Mise en place de la récurrence

Pour tout entier naturel n , considérons la propriété

$$P(n) : \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Nous allons démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en suivant les trois étapes classiques :

- 1) initialisation ;
- 2) hérédité ;
- 3) conclusion par le principe de récurrence.

2. Initialisation

Pour $n = 0$, la propriété $P(0)$ s'écrit

$$u_0 \leq u_1.$$

On connaît

$$u_0 = 1.$$

Calculons u_1 à l'aide de la relation de récurrence :

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 2}.$$

Comme $u_0 = 1$,

$$u_1 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}.$$

Il faut donc vérifier que

$$1 \leq \sqrt{3}.$$

Les deux membres sont positifs. Nous pouvons donc comparer leurs carrés :

$$1^2 = 1 \leq 3 = (\sqrt{3})^2.$$

Par conséquent,

$$1 \leq \sqrt{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_0 \leq u_1}.$$

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

3. Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons que

$$\boxed{u_n \leq u_{n+1}}.$$

C'est l'**hypothèse de récurrence**.

Nous devons montrer qu'elle est alors vraie au rang suivant, c'est-à-dire que

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_{n+2}}.$$

Partons de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

En ajoutant 2 aux deux membres, le sens de l'inégalité est conservé :

$$u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2.$$

Or les deux membres sont positifs. La fonction racine carrée

Comment on sait avec certitude que ces deux membres sont positifs

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

est croissante sur $[0, +\infty[$. Nous pouvons donc prendre la racine carrée des deux membres sans changer le sens de l'inégalité :

$$\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}.$$

Mais, d'après la relation de récurrence,

$$\sqrt{u_n + 2} = u_{n+1}$$

et, en remplaçant n par $n + 1$,

$$\sqrt{u_{n+1} + 2} = u_{n+2}.$$

L'inégalité précédente devient donc

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_{n+2}}.$$

Nous avons ainsi montré que

$$P(n) \implies P(n + 1).$$

La propriété est donc **héréditaire**.

4. Conclusion par récurrence

Nous avons vérifié que :

- $P(0)$ est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc **croissante**.

5. Vérification sur les premiers termes

Pour mieux visualiser le résultat, calculons quelques termes :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= \sqrt{3} \approx 1,732, \\ u_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1,932, \\ u_3 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 1,983. \end{aligned}$$

On observe bien, sur ces premiers termes,

$$1 < 1,732 < 1,932 < 1,983 < \dots$$

ce qui est cohérent avec la démonstration précédente. Cette observation numérique ne remplace toutefois pas la preuve par récurrence.

6. Idée essentielle à retenir

Pour une suite définie sous la forme

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

si l'on veut démontrer par récurrence que

$$u_n \leq u_{n+1},$$

il est souvent utile d'étudier la monotonie de la fonction f . Ici,

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

est croissante sur son domaine. Ainsi, l'inégalité

$$u_n \leq u_{n+1}$$

entraîne immédiatement

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

C'est précisément le mécanisme qui permet d'établir l'hérédité.

Exemple 1 – Monotonie d'une suite définie par une somme

Exemple 1 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction détaillée

Pour étudier la monotonie d'une suite, on cherche à comparer deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} . Une méthode particulièrement efficace consiste à étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n.$$

Rappelons :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 & \implies \text{la suite est strictement croissante,} \\ u_{n+1} - u_n \geq 0 & \implies \text{la suite est croissante,} \\ u_{n+1} - u_n < 0 & \implies \text{la suite est strictement décroissante.} \end{cases}$$

Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

Écrivons maintenant u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

Développons les deux sommes afin de voir clairement ce qui change entre u_n et u_{n+1} :

$$u_n = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n},$$

et

$$u_{n+1} = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

On constate que u_{n+1} contient exactement tous les termes de u_n , auxquels s'ajoute le nouveau terme

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Soustrayons u_n aux deux membres :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

Étudions soigneusement le signe de ce quotient.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \geq 1$, donc

$$n+1 \geq 2 > 0.$$

D'autre part,

$$2^{n+1} > 0$$

pour tout entier naturel n .

Le numérateur et le dénominateur sont donc tous les deux strictement positifs. Par conséquent,

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} > 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui équivaut à

$$u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par définition, puisque $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}$$

Vérification sur les premiers termes

Cette vérification n'est pas une démonstration générale, mais elle permet de visualiser le résultat obtenu.

Pour $n = 1$:

$$u_1 = \frac{2^1}{1} = 2.$$

Pour $n = 2$:

$$u_2 = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} = 2 + 2 = 4.$$

Pour $n = 3$:

$$u_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67.$$

Pour $n = 4$:

$$u_4 = \frac{20}{3} + \frac{16}{4} = \frac{20}{3} + 4 = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$

On observe donc bien :

$$2 < 4 < \frac{20}{3} < \frac{32}{3} < \dots$$

ce qui est cohérent avec la démonstration.

Méthode à retenir

Lorsqu'une suite est définie par une somme de la forme

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

on a immédiatement

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = u_n + a_{n+1}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = a_{n+1}.$$

Il suffit alors d'étudier le signe du terme a_{n+1} .

Dans cet exercice,

$$a_k = \frac{2^k}{k},$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0.$$

C'est pourquoi la suite est strictement croissante.

Bilan final

Nous avons établi successivement :

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} = u_n + \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

D'où

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} > 0.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < u_{n+1}$$

et donc

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}$$

Exemple 2 – Étude de la monotonie d'une suite définie par une somme

Énoncé (repris fidèlement). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sur l'image, la suite est d'abord indexée par $\mathbb{N}^*$, tandis que la dernière ligne affiche $\mathbb{N}$. Comme la formule est donnée pour $n \geq 1$, l'étude porte naturellement sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cette petite différence d'indice est conservée dans la transcription de l'énoncé ci-dessus.

1. Objectif et méthode

Étudier la monotonie signifie déterminer si la suite est croissante, décroissante, strictement croissante, strictement décroissante, ou si elle n'a pas de monotonie globale.

Pour une suite numérique (u_n) , une méthode classique consiste à étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n.$$

En effet :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n \geq 0 & \implies u_{n+1} \geq u_n, \\ u_{n+1} - u_n > 0 & \implies u_{n+1} > u_n. \end{cases}$$

Dans notre cas, il faut être attentif : le paramètre n apparaît à la fois dans la borne supérieure de la somme et dans le dénominateur $n+k$. Il est donc utile de réécrire la somme avant de calculer la différence.

2. Réécriture de u_n

On part de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Développons les termes :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}.$$

Comme $n+n=2n$, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

En changeant d'indice, cela s'écrit aussi

$$u_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}.$$

3. Expression de u_{n+1}

Remplaçons n par $n + 1$:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1) + k}.$$

En développant :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Donc

$$u_{n+1} = \sum_{j=n+2}^{2n+2} \frac{1}{j}.$$

4. Calcul détaillé de $u_{n+1} - u_n$

Écrivons les deux sommes l'une sous l'autre :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Tous les termes communs

$$\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \dots, \frac{1}{2n}$$

s'annulent dans la différence. Il reste donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$2n+2 = 2(n+1),$$

donc

$$\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Mettons tout au même dénominateur. Un dénominateur commun commode est

$$2(n+1)(2n+1).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)(2n+1)},$$

$$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2(n+1)(2n+1)},$$

et

$$\frac{1}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n+2 + 2n+1 - 4n-2}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu la formule essentielle :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}}.$$

5. Étude du signe

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2n + 1 > 0.$$

Par conséquent,

$$2(n + 1)(2n + 1) > 0.$$

Le numérateur étant égal à $1 > 0$, on en déduit

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc

$$u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Conclusion :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

6. Vérification sur les premiers termes

Cette vérification ne remplace pas la démonstration, mais elle permet de contrôler le résultat.

Pour $n = 1$:

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}.$$

Pour $n = 2$:

$$u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0,5833.$$

Pour $n = 3$:

$$u_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60} \approx 0,6167.$$

Pour $n = 4$:

$$u_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \approx 0,6345.$$

On observe bien

$$0,5 < 0,5833 < 0,6167 < 0,6345 < \dots,$$

ce qui est cohérent avec la croissance stricte démontrée précédemment.

7. Astuce à retenir

Pour une somme dont les bornes dépendent de n , il est souvent efficace de :

- 1) écrire explicitement les premiers et les derniers termes de u_n ;
- 2) écrire de même u_{n+1} ;
- 3) calculer $u_{n+1} - u_n$;
- 4) faire apparaître les termes qui s'annulent ;
- 5) étudier le signe de ce qui reste.

Ici, cette stratégie donne directement

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} > u_n}$$

Donc la suite (u_n) est **strictement croissante**.

Exercice 2 – Suite récurrente : bornes et monotonie

Énoncé – transcription fidèle

Exercice 2 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 3. \end{cases}$$

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 2.
- 2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 4.
- 3) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction détaillée

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}.$$

Pour manipuler cette fraction sans changer abusivement le sens des inégalités, il est important de contrôler le signe de $u_n + 2$. Les questions 1 et 2 vont justement montrer que

$$2 \leq u_n \leq 4,$$

donc, en particulier,

$$u_n + 2 \geq 4 > 0.$$

Le dénominateur sera donc toujours strictement positif.

1) Montrer que la suite est minorée par 2

Nous voulons démontrer

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 2.}$$

Nous procédons par récurrence.

Propriété. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$P(n) : \quad u_n \geq 2.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on sait que

$$u_0 = 3.$$

Or

$$3 \geq 2.$$

Donc

$$\boxed{u_0 \geq 2},$$

et $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$u_n \geq 2.$$

Nous devons montrer que

$$u_{n+1} \geq 2.$$

Calculons la différence $u_{n+1} - 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 \\ &= \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{8u_n - 8 - 2u_n - 4}{u_n + 2} \\ &= \frac{6u_n - 12}{u_n + 2} \\ &= \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$u_n - 2 \geq 0.$$

De plus, puisque $u_n \geq 2$,

$$u_n + 2 \geq 4 > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \geq 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - 2 \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{n+1} \geq 2}.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 2.}$$

La suite (u_n) est donc **minorée par 2**.

2) Montrer que la suite est majorée par 4

Nous voulons maintenant démontrer

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 4.}$$

Là encore, nous procédons par récurrence.

Propriété. Posons

$$Q(n) : \quad u_n \leq 4.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 3 \leq 4.$$

Donc $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$u_n \leq 4.$$

Nous devons montrer

$$u_{n+1} \leq 4.$$

Calculons $u_{n+1} - 4$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - 4 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 4 \\&= \frac{8(u_n - 1) - 4(u_n + 2)}{u_n + 2} \\&= \frac{8u_n - 8 - 4u_n - 8}{u_n + 2} \\&= \frac{4u_n - 16}{u_n + 2} \\&= \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}.\end{aligned}$$

D'après la question 1, valable pour tout rang,

$$u_n \geq 2,$$

donc

$$u_n + 2 \geq 4 > 0.$$

Et l'hypothèse $u_n \leq 4$ donne

$$u_n - 4 \leq 0.$$

Le numérateur est donc négatif ou nul et le dénominateur strictement positif. Ainsi,

$$\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} \leq 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - 4 \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{n+1} \leq 4}.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 4.}$$

La suite (u_n) est donc **majorée par 4**.

Les deux premières questions donnent immédiatement l'encadrement fondamental

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_n \leq 4.}$$

Ainsi, la suite est bornée.

3) Étudier la monotonie de la suite

Pour étudier la monotonie, calculons la différence

$$u_{n+1} - u_n.$$

À partir de la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Factorisons le numérateur :

$$-u_n^2 + 6u_n - 8 = -(u_n^2 - 6u_n + 8) = -(u_n - 2)(u_n - 4).$$

On peut aussi écrire

$$-(u_n - 2)(u_n - 4) = (u_n - 2)(4 - u_n).$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)(4 - u_n)}{u_n + 2}.$$

Or, d'après les questions 1 et 2,

$$2 \leq u_n \leq 4.$$

Donc

$$u_n - 2 \geq 0, \quad 4 - u_n \geq 0, \quad u_n + 2 \geq 4 > 0.$$

Le numérateur $(u_n - 2)(4 - u_n)$ est donc positif ou nul et le dénominateur est strictement positif. Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

Complément : la croissance est en fait stricte

On peut préciser davantage le résultat. Le terme initial vérifie

$$2 < u_0 = 3 < 4.$$

Supposons que $2 < u_n < 4$. Alors

$$u_n - 2 > 0, \quad 4 - u_n > 0, \quad u_n + 2 > 0,$$

Vérifie le avec rigueur en refaisant la récurrence avec un encadrement strict

et donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)(4 - u_n)}{u_n + 2} > 0.$$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$. En particulier, à partir de $u_0 = 3$, les termes restent dans l'intervalle $(2, 4)$ et l'inégalité est stricte à chaque rang. On peut donc affirmer plus précisément :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}$$

Vérification sur les premiers termes

Cette vérification ne remplace pas la démonstration, mais elle permet de contrôler le résultat :

$$\begin{aligned}u_0 &= 3, \\u_1 &= \frac{8(3-1)}{3+2} = \frac{16}{5} = 3,2, \\u_2 &= \frac{8\left(\frac{16}{5}-1\right)}{\frac{16}{5}+2} = \frac{8 \cdot \frac{11}{5}}{\frac{26}{5}} = \frac{88}{26} = \frac{44}{13} \approx 3,385,\end{aligned}$$

et l'on observe bien

$$3 < 3,2 < 3,385 < \dots < 4.$$

Bilan général

Nous avons démontré successivement :

$$2 \leq u_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, la suite est **bornée** et **croissante** (même strictement croissante).

Méthode à retenir. Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, les bornes peuvent souvent être prouvées par récurrence en étudiant $f(x) - m$ et $f(x) - M$. Pour la monotonie, on étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$ et on exploite les bornes déjà établies.

Exemple 1 – Suite géométrique et somme de termes

Exemple 1 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense
Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répondit-il, donne-moi seulement 1 centime le 1^{er} juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement Et donne moi la somme J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.
Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.
Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Remarque de transcription : le texte ci-dessus conserve le contenu de l'image, y compris la formulation « donne moi » et la ponctuation telle qu'elle apparaît. La résolution ci-dessous ne modifie évidemment pas les données du problème.

1. Traduction du problème en langage de suites

Le 1^{er} juin, le fils reçoit

1 centime.

Le 2 juin, il reçoit

2 centimes.

Le 3 juin, il reçoit

4 centimes.

Chaque jour, la somme reçue est donc le **double** de celle reçue la veille.

On note u_n la somme, en centimes, reçue le n -ième jour de juin, pour $1 \leq n \leq 20$. Alors

$$u_1 = 1$$

et

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n} \quad (1 \leq n \leq 19).$$

La suite (u_n) est donc une **suite géométrique** de premier terme

$$u_1 = 1$$

et de raison

$$q = 2.$$

2. Expression du terme général

Pour une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q , on a

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Ici, $u_1 = 1$ et $q = 2$. Donc

$$u_n = 1 \times 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$u_n = 2^{n-1} \quad (1 \leq n \leq 20).$$

Vérifions sur les premiers jours :

$$u_1 = 2^0 = 1,$$

$$u_2 = 2^1 = 2,$$

$$u_3 = 2^2 = 4,$$

$$u_4 = 2^3 = 8.$$

Cela correspond bien à l'énoncé.

3. Somme reçue du 1^{er} au 20 juin inclus

Le fils demande à son père de lui donner, à la fin, la **somme de toutes les sommes quotidiennes** reçues du 1^{er} au 20 juin.

La somme totale est donc

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}.$$

En utilisant $u_n = 2^{n-1}$,

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{19}.$$

Il s'agit d'une somme géométrique de raison 2 comportant exactement 20 termes.

La formule générale est

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Avec $q = 2$ et $N = 20$, on obtient

$$S = \frac{2^{20} - 1}{2 - 1}.$$

Comme

$$2 - 1 = 1,$$

alors

$$S = 2^{20} - 1.$$

Or

$$2^{20} = 1\,048\,576.$$

Donc

$$S = 1\,048\,575 \text{ centimes}.$$

Démonstration de la formule de somme dans ce cas

On peut aussi retrouver le résultat sans utiliser directement la formule. Écrivons

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{19}.$$

Multiplions par 2 :

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{19} + 2^{20}.$$

Soustrayons la première égalité de la seconde :

$$2S - S = (2 + 4 + \dots + 2^{20}) - (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{19}).$$

Tous les termes communs s'annulent ; il reste seulement

$$S = 2^{20} - 1.$$

Donc, de nouveau,

$$S = 1\,048\,575 \text{ centimes}.$$

4. Conversion en unité monétaire principale

Si l'unité monétaire utilisée vérifie

$$100 \text{ centimes} = 1 \text{ unité monétaire},$$

alors

$$1\,048\,575 \text{ centimes} = \frac{1\,048\,575}{100} = 10\,485,75 \text{ unités monétaires}.$$

Autrement dit,

$$10\,485 \text{ unités monétaires et } 75 \text{ centimes}.$$

5. Pourquoi le père s'est-il trompé ?

Au début, les montants paraissent très faibles :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

Mais le doublement quotidien produit une **croissance géométrique**, donc extrêmement rapide.

Par exemple, le montant reçu le seul 20 juin vaut

$$u_{20} = 2^{19} = 524\,288 \text{ centimes}.$$

Ce seul dernier versement représente déjà plus de la moitié de la somme totale.

En effet,

$$S = 1\,048\,575$$

et

$$2u_{20} = 1\,048\,576 = S + 1.$$

Cela montre à quel point le doublement successif devient important après quelques jours.

6. Vérification jour par jour

Pour bien voir le mécanisme, voici quelques valeurs :

Date	Somme reçue ce jour (centimes)
1er juin	$1 = 2^0$
2 juin	$2 = 2^1$
3 juin	$4 = 2^2$
4 juin	$8 = 2^3$
5 juin	$16 = 2^4$
10 juin	$512 = 2^9$
15 juin	$16\,384 = 2^{14}$
20 juin	$524\,288 = 2^{19}$

La somme cumulée après n jours est

$$S_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Ainsi, après 20 jours,

$$S_{20} = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Réponse finale :

Le fils recevra au total 1 048 575 centimes.

Si 100 centimes valent une unité monétaire, cela correspond à

10 485,75 unités monétaires.

Méthode à retenir

Lorsqu'une quantité est multipliée chaque jour par un même nombre q , les montants forment une suite géométrique. Si le premier terme vaut u_1 et si l'on additionne les N premiers termes, alors

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

et, pour $q \neq 1$,

$$S_N = u_1 \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Dans ce problème :

$$u_1 = 1, \quad q = 2, \quad N = 20,$$

d'où

$$S_{20} = 1 \times \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 1\,048\,575.$$

Exemple 2 - Somme géométrique

Énoncé

Exemple 2 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Remarque de notation : l'image écrit la borne supérieure sous la forme $k = n - 1$. Dans la notation usuelle d'une somme, on écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Les deux écritures décrivent ici la même somme : les puissances vont de $k = 0$ à $k = n - 1$.

1. Identifier la nature de la somme

La somme est

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Ses termes successifs sont

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \cdots$$

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{2}$. Il s'agit donc de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme

$$a_0 = 1$$

et de raison

$$q = \frac{1}{2}.$$

Pourquoi y a-t-il exactement n termes ? Les exposants sont

$$0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

ce qui représente bien n entiers.

2. Utilisation de la formule de la somme géométrique

Pour $q \neq 1$, on connaît la formule

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ici,

$$q = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}.$$

Diviser par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par 2 :

$$S_n = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

On développe :

$$S_n = 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Mais

$$2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par conséquent,

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

On peut aussi écrire, de façon équivalente,

$$S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

3. Démonstration de la formule sans l'apprendre par cœur

Partons de

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Soustrayons maintenant la deuxième égalité de la première :

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent deux à deux :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il reste seulement

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}S_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

En multipliant les deux membres par 2 :

$$S_n = 2 - \frac{2}{2^n}.$$

D'où

$$\boxed{S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Cette méthode explique directement l'origine de la formule de la somme d'une suite géométrique.

4. Vérification sur quelques valeurs de n

Pour $n = 1$:

$$S_1 = 1.$$

La formule donne

$$2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1.$$

Elle est correcte.

Pour $n = 2$:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

La formule donne

$$2 - \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Elle est encore correcte.

Pour $n = 3$:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

La formule donne

$$2 - \frac{1}{2^2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

5. Méthode générale à retenir

Pour une somme géométrique

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}, \quad q \neq 1,$$

on a

$$S = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ici, $a = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, donc

$$S_n = \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion

La somme demandée, exprimée en fonction de n , est donc

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

Exercice 3 - Suite récurrente et suite auxiliaire

Énoncé (reprise fidèle)

Exercice 3 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27} (12u_{n+1} - u_n) & \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 2; & u_1 = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) écrire v_n et u_n en fonction de n .

c) calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Correction détaillée

1) Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

La suite est donnée par une relation de récurrence d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = \frac{1}{27} (12u_{n+1} - u_n).$$

La relation demandée est, elle, une relation entre deux termes consécutifs. Nous allons la démontrer par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) : \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

Initialisation au rang $n = 0$.

Le membre de gauche vaut

$$u_1 = \frac{4}{9}.$$

Le membre de droite vaut

$$\frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{1}{9} \times 2 + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Ainsi,

$$u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^2},$$

donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

Nous devons montrer

$$u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}.$$

Partons de l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

Multiplions par 9 :

$$9u_{n+1} = u_n + \frac{18}{3^{n+2}}.$$

On en déduit

$$u_n = 9u_{n+1} - \frac{18}{3^{n+2}}.$$

Utilisons maintenant la relation de récurrence initiale :

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n).$$

En remplaçant u_n par l'expression précédente,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{27} \left(12u_{n+1} - \left(9u_{n+1} - \frac{18}{3^{n+2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{27} \left(3u_{n+1} + \frac{18}{3^{n+2}} \right) \\ &= \frac{3}{27}u_{n+1} + \frac{18}{27 \cdot 3^{n+2}} \\ &= \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3 \cdot 3^{n+2}} \\ &= \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}. \end{aligned}$$

Nous avons bien obtenu $P(n+1)$.

Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

2a) Montrer que (v_n) est géométrique

On sait que

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n}.$$

Pour faire apparaître une relation entre v_{n+1} et v_n , calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

D'après la question 1,

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Or

$$\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{3}{3^{n+2}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{3}{3^{n+2}} \\ &= \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{9}v_n = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{9 \cdot 3^n} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$\boxed{q = \frac{1}{9}}.$$

Calculons son premier terme :

$$v_0 = u_0 - \frac{1}{3^0} = 2 - 1 = 1.$$

Donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de premier terme } v_0 = 1 \text{ et de raison } q = \frac{1}{9}.}$$

2b) Écrire v_n et u_n en fonction de n

Pour une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q ,

$$v_n = v_0 q^n.$$

Ici, $v_0 = 1$ et $q = \frac{1}{9}$. Par conséquent,

$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Donc

$$v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9^n}.$$

Or, par définition,

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n}.$$

Ainsi,

$$u_n = v_n + \frac{1}{3^n}.$$

En remplaçant v_n ,

$$u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}.$$

Vérification avec les données initiales.

Pour $n = 0$,

$$u_0 = \frac{1}{9^0} + \frac{1}{3^0} = 1 + 1 = 2,$$

ce qui est correct.

Pour $n = 1$,

$$u_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9},$$

ce qui est également correct.

2c) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

D'après la question précédente,

$$u_k = \frac{1}{9^k} + \frac{1}{3^k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{9^k} + \frac{1}{3^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{9} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k. \end{aligned}$$

Nous avons donc la somme de deux sommes géométriques.

Première somme.

Pour $q = \frac{1}{9}$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{9} \right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{9} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{9} \right)^{n+1}}{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{9^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Deuxième somme.

Pour $q = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

En additionnant,

$$S_n = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{9^{n+1}} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right).$$

On peut aussi développer cette expression :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{8 \cdot 9^{n+1}} - \frac{3}{2 \cdot 3^{n+1}} \\ &= \frac{9+12}{8} - \frac{1}{8 \cdot 9^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{21}{8} - \frac{1}{8 \cdot 9^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Les deux formes sont équivalentes.

Bilan final

Nous avons obtenu successivement :

$$u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n, \quad v_0 = 1$$

$$v_n = \frac{1}{9^n}$$

$$u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}$$

et enfin

$$S_n = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{9^{n+1}}\right) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Exercice 4 – Suite récurrente : encadrement et monotonie

Énoncé

Exercice 4 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} & \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 \in]-1; 0[. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

3) Montrer que

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et en déduire que

$$u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que $-1 < u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On veut démontrer par récurrence la propriété

$$P(n) : \quad -1 < u_n < 0.$$

Initialisation

Par hypothèse,

$$u_0 \in]-1; 0[.$$

Cela signifie exactement

$$-1 < u_0 < 0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$-1 < u_n < 0.$$

Nous devons montrer

$$-1 < u_{n+1} < 0.$$

À partir de $-1 < u_n < 0$, ajoutons 2 aux trois membres :

$$1 < u_n + 2 < 2.$$

En particulier,

$$u_n + 2 > 1 > 0,$$

donc $\sqrt{u_n + 2}$ existe et est strictement positif. De plus,

$$\sqrt{u_n + 2} > 1.$$

D'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}}.$$

Le numérateur u_n est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif. Par conséquent,

$$\boxed{u_{n+1} < 0}.$$

Il reste à prouver que $u_{n+1} > -1$. Comme $u_n < 0$ et $\sqrt{u_n + 2} > 1$, diviser le nombre négatif u_n par un nombre strictement supérieur à 1 le rapproche de 0. Ainsi

$$\frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} > u_n. \quad \text{Démontrer pour voir en plus clair}$$

Donc

$$u_{n+1} > u_n.$$

Or, par l'hypothèse de récurrence,

$$u_n > -1.$$

On obtient alors

$$u_{n+1} > u_n > -1,$$

d'où

$$\boxed{u_{n+1} > -1}.$$

Finalement,

$$-1 < u_{n+1} < 0.$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 < u_n < 0.}$$

Cette question garantit également que $u_n + 2 > 1$ pour tout n , donc le dénominateur $\sqrt{u_n + 2}$ est toujours bien défini et non nul.

2) Montrer que (u_n) est strictement croissante

Pour étudier la monotonie, calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} - u_n \\ &= u_n \left(\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

D'après la question 1,

$$-1 < u_n < 0,$$

donc

$$\boxed{u_n < 0}.$$

Toujours d'après la question 1,

$$u_n > -1,$$

donc

$$u_n + 2 > 1.$$

Par croissance de la racine carrée sur $[0, +\infty[$,

$$\sqrt{u_n + 2} > 1.$$

Comme les deux membres sont strictement positifs, le passage aux inverses renverse l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} < 1.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} - 1 < 0}.$$

Dans

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} - 1 \right),$$

les deux facteurs sont donc strictement négatifs. Leur produit est strictement positif :

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

Remarque utile. La question 1 fournit exactement les deux signes nécessaires : $u_n < 0$ et $u_n + 2 > 1$. C'est pourquoi le calcul de $u_{n+1} - u_n$ donne immédiatement le sens de variation.

3) Première inégalité

On doit montrer

$$\boxed{u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}}}.$$

D'après la question 2, la suite est strictement croissante. Comme $n \geq 0$, on a donc

$$u_n \geq u_0.$$

En ajoutant 2,

$$u_n + 2 \geq u_0 + 2.$$

D'après $u_0 \in]-1; 0[$, on a $u_0 + 2 > 1 > 0$. La fonction racine carrée étant croissante,

$$\sqrt{u_n + 2} \geq \sqrt{u_0 + 2} > 0.$$

Le passage aux inverses donne

$$\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_0 + 2}}.$$

Mais, d'après la question 1,

$$u_n < 0.$$

En multipliant l'inégalité précédente par le nombre négatif u_n , le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}}.$$

Or

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}}.$$

Déduction : une minoration explicite de u_n

Posons

$$c = \sqrt{u_0 + 2}.$$

Puisque $u_0 \in]-1; 0[$,

$$1 < u_0 + 2 < 2,$$

donc

$$1 < c < \sqrt{2}.$$

En particulier,

$$c > 0.$$

L'inégalité précédente devient

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{c}.$$

Nous allons en déduire par récurrence que

$$\boxed{u_n \geq \frac{u_0}{c^n}}.$$

Posons

$$Q(n) : \quad u_n \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$\frac{u_0}{c^0} = u_0.$$

Donc

$$u_0 \geq u_0,$$

avec égalité. Ainsi $Q(0)$ est vraie.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

D'après la première partie de la question 3,

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{c}.$$

Comme $c > 0$, on peut diviser l'hypothèse de récurrence par c sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{u_n}{c} \geq \frac{u_0}{c^{n+1}}.$$

Par transitivité,

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{c} \geq \frac{u_0}{c^{n+1}}.$$

Donc

$$u_{n+1} \geq \frac{u_0}{c^{n+1}}.$$

Ainsi $Q(n+1)$ est vraie.

Conclusion

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

En remplaçant c par $\sqrt{u_0 + 2}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n}.$$

Bilan général

Nous avons établi successivement :

$$-1 < u_n < 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$u_{n+1} > u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

et enfin

$$u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Point délicat à retenir. Lorsqu'on multiplie une inégalité par un nombre négatif, son sens s'inverse. C'est précisément ce qui intervient dans la question 3, car $u_n < 0$.

Exercice 4 - Dernière question, autrement

On considère la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}}, \quad u_0 \in]-1, 0[.$$

Des questions précédentes, on sait que

$$\boxed{-1 < u_n < 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

et que la suite (u_n) est strictement croissante. Il faut montrer

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}}$$

puis en déduire

$$\boxed{u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n}}.$$

1. Première inégalité

Puisque (u_n) est croissante,

$$u_n \geq u_0.$$

En ajoutant 2,

$$u_n + 2 \geq u_0 + 2.$$

Comme $u_0 > -1$, on a $u_0 + 2 > 1 > 0$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc

$$\sqrt{u_n + 2} \geq \sqrt{u_0 + 2} > 0.$$

En prenant les inverses de deux nombres strictement positifs, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{u_n + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_0 + 2}}.$$

Or, d'après la question 1, $u_n < 0$. En multipliant l'inégalité précédente par le nombre négatif u_n , le sens de l'inégalité s'inverse encore :

$$\frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}}.$$

Mais

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_0 + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

2. Dédution sans récurrence : méthode du produit

Cette fois, on ne fait pas de récurrence. On développe directement la relation de définition par substitutions successives.

Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1} + 2}}.$$

En remplaçant u_{n-1} par son expression,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{u_{n-1} + 2}} \frac{u_{n-2}}{\sqrt{u_{n-2} + 2}}.$$

En poursuivant jusqu'à u_0 , on obtient l'identité exacte

$$u_n = \frac{u_0}{\prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{u_k + 2}}.$$

Comme la suite est croissante,

$$u_k \geq u_0 \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Donc

$$u_k + 2 \geq u_0 + 2,$$

puis

$$\sqrt{u_k + 2} \geq \sqrt{u_0 + 2} > 0.$$

Il y a exactement n facteurs dans le produit, d'où

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{u_k + 2} \geq (\sqrt{u_0 + 2})^n.$$

Posons

$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{u_k + 2}, \quad B = (\sqrt{u_0 + 2})^n.$$

Alors $A \geq B > 0$. Donc

$$\frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}.$$

Mais $u_0 < 0$. En multipliant par u_0 , le sens s'inverse :

$$\frac{u_0}{A} \geq \frac{u_0}{B}.$$

Or $u_n = u_0/A$. Par conséquent,

$$u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Point essentiel : la présence de $u_0 < 0$ explique le sens final de l'inégalité. Pour un numérateur négatif, diviser par un dénominateur positif plus grand donne un nombre *plus grand* (moins négatif).

3. Une autre lecture très rapide : inégalités en chaîne

Si l'on pose

$$c = \sqrt{u_0 + 2},$$

alors $c > 0$ et la première partie donne

$$u_{k+1} \geq \frac{u_k}{c} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour $n \geq 1$, on applique successivement cette inégalité aux rangs $n-1, n-2, \dots, 0$:

$$u_n \geq \frac{u_{n-1}}{c}.$$

Comme $c > 0$,

$$\frac{u_{n-1}}{c} \geq \frac{u_{n-2}}{c^2}.$$

Puis

$$\frac{u_{n-2}}{c^2} \geq \frac{u_{n-3}}{c^3},$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$u_n \geq \frac{u_{n-1}}{c} \geq \frac{u_{n-2}}{c^2} \geq \dots \geq \frac{u_1}{c^{n-1}} \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

Ainsi,

$$u_n \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

En remplaçant c par $\sqrt{u_0 + 2}$, on retrouve

$$u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n}.$$

Méthode à retenir. Lorsque l'on a une inégalité du type

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{c} \quad (c > 0),$$

on peut souvent l'itérer directement :

$$u_n \geq \frac{u_{n-1}}{c} \geq \frac{u_{n-2}}{c^2} \geq \dots \geq \frac{u_0}{c^n}.$$

Ici, cette méthode évite complètement une nouvelle démonstration par récurrence.

Limites de suites

Démonstrations rigoureuses à partir des définitions

Exemple 1 : $u_n = n^2$ et limite $+\infty$

Exemple 1 : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Définition à utiliser

Dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

signifie que, quel que soit le réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n > A.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite dépassent n'importe quel seuil positif fixé à l'avance.

Démonstration détaillée

Soit $A > 0$ un réel arbitraire. Nous voulons trouver un rang N tel que

$$n \geq N \implies n^2 > A.$$

Comme $A > 0$, on peut considérer $\sqrt{A}$. L'inégalité

$$n^2 > A$$

est assurée dès que

$$n > \sqrt{A}.$$

Il suffit donc de choisir un entier naturel strictement supérieur à $\sqrt{A}$. Par exemple,

$$N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1.$$

Alors $N > \sqrt{A}$. Si $n \geq N$, on a donc

$$n \geq N > \sqrt{A}.$$

Comme $n \geq 0$, on peut élever au carré sans changer le sens de l'inégalité :

$$n^2 > A.$$

Or $u_n = n^2$, donc

$$u_n > A.$$

Nous avons bien montré que, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies u_n > A.$$

Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

Exemple 2 : $v_n = 3 - 2n$ et limite $-\infty$ **Exemple 2 :** soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = 3 - 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

Définition à utiliser

Dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

signifie que, pour tout réel $B < 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$v_n < B.$$

Démonstration détailléeSoit $B < 0$ fixé. Nous cherchons un rang N tel que

$$3 - 2n < B.$$

Résolvons cette inégalité en n :

$$3 - 2n < B.$$

En retranchant 3 :

$$-2n < B - 3.$$

En divisant par -2 , le sens de l'inégalité s'inverse :

$$n > \frac{3 - B}{2}.$$

Il suffit donc de choisir un entier naturel strictement supérieur à $\frac{3 - B}{2}$. Par exemple,

$$N = \left\lfloor \frac{3 - B}{2} \right\rfloor + 1.$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$n > \frac{3 - B}{2}.$$

En multipliant par 2 :

$$2n > 3 - B,$$

puis

$$-2n < B - 3,$$

et enfin

$$3 - 2n < B.$$

Donc

$$v_n < B.$$

Ainsi, pour tout $B < 0$, les termes v_n deviennent, à partir d'un certain rang, inférieurs à B . Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - 2n) = -\infty.$$

Exemple 1 : $u_n = \frac{1}{n}$ et limite 0**Exemple 1 :** soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Définition à utiliser

Dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - 0| < \varepsilon.$$

Ici cela revient à montrer que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

à partir d'un certain rang.

Démonstration détailléeSoit $\varepsilon > 0$. Nous voulons avoir

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Puisque $n \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, il suffit d'obtenir

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Les deux membres sont positifs. Cette inégalité équivaut à

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Choisissons donc

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Alors $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq N$,

$$n \geq N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Comme les quantités sont positives, le passage aux inverses renverse le sens :

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Donc

$$|u_n - 0| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un rang N tel que $n \geq N$ implique $|u_n| < \varepsilon$. Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemple 2 : $v_n = \frac{3n-1}{n+1}$ et limite 3**Exemple 2 :** soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{3n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

Définition à utiliser

Dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$$

signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|v_n - 3| < \varepsilon.$$

Calcul de l'écart à la limite

On calcule :

$$v_n - 3 = \frac{3n-1}{n+1} - 3.$$

On met au même dénominateur :

$$v_n - 3 = \frac{3n-1-3(n+1)}{n+1}.$$

Développons :

$$3n-1-3(n+1) = 3n-1-3n-3 = -4.$$

Donc

$$v_n - 3 = -\frac{4}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$|v_n - 3| = \frac{4}{n+1}.$$

Choix du rang N Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons

$$\frac{4}{n+1} < \varepsilon.$$

Comme toutes les quantités sont positives, cela équivaut à

$$4 < \varepsilon(n+1),$$

puis à

$$n+1 > \frac{4}{\varepsilon},$$

et donc

$$n > \frac{4}{\varepsilon} - 1.$$

On choisit

$$N = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Alors, pour $n \geq N$,

$$n \geq N > \frac{4}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n + 1 > \frac{4}{\varepsilon}.$$

Comme $n + 1 > 0$, on en déduit

$$\frac{4}{n + 1} < \varepsilon.$$

Ainsi,

$$|v_n - 3| < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|v_n - 3| < \varepsilon$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

Remarque : ce choix de $N = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ est simple, toujours valable et ne nécessite aucune discussion de cas.

Bilan : les quatre définitions à retenir

- $u_n \rightarrow +\infty$: pour tout seuil $A > 0$, à partir d'un certain rang, $u_n > A$.
- $u_n \rightarrow -\infty$: pour tout seuil $B < 0$, à partir d'un certain rang, $u_n < B$.
- $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$: pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Dans une preuve par définition, le point essentiel est de **construire explicitement un rang N** en fonction du seuil choisi (A , B ou ε).

Exemples : suites convergentes et divergentes

Correction détaillée

Énoncé

Exemples :

1) les suites :

$$\left(\frac{1}{n}\right); \quad \left(\frac{1}{n^2}\right); \quad \left(\frac{1}{n^3}\right); \quad \left(\frac{1}{n^p}\right); \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sont des suites convergentes.

2) les suites :

$$(n); \quad (n^p) \quad p \in \mathbb{N}^*; \quad (\sqrt{n}); \quad (\cos n); \quad ((-1)^n)$$

sont divergentes.

I. Les suites convergentes

Une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous allons justifier les cinq exemples de l'énoncé.

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$

Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{1}{n}$. Nous voulons montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Comme $n > 0$,

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

L'inégalité souhaitée est donc

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Comme $n > 0$ et $\varepsilon > 0$, cela équivaut à

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il suffit donc de choisir un entier N strictement supérieur à $1/\varepsilon$; par exemple

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Alors $n \geq N$ implique $n > 1/\varepsilon$, donc $1/n < \varepsilon$. Par définition,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

2. Les suites $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)$

On peut raisonner exactement de la même manière.

Pour $u_n = 1/n^2$, on veut $1/n^2 < \varepsilon$. Puisque les quantités sont positives,

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Un choix convenable est donc

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Pour $u_n = 1/n^3$, il suffit de choisir

$$N > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}},$$

ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

3. Cas général : $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

Soit $p \geq 1$ fixé. Posons

$$u_n = \frac{1}{n^p}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon.$$

Comme toutes les quantités sont positives,

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon \iff n^p > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

On peut donc prendre

$$N = \left\lceil \varepsilon^{-1/p} \right\rceil + 1.$$

Alors $n \geq N$ entraîne $|u_n| < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Les trois premières suites de l'énoncé correspondent simplement aux cas $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$.

4. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Pour $n \geq 1$, posons

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On veut

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Toutes les quantités étant positives,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Bilan

Toutes les suites annoncées comme convergentes dans l'énoncé convergent vers 0 :

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \ (p \in \mathbb{N}^*), \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

II. Les suites divergentes

Une suite est dite *divergente* lorsqu'elle ne converge vers aucun réel. Il existe plusieurs façons de diverger : une suite peut tendre vers $+\infty$, ou osciller sans se rapprocher d'une valeur unique.

1. La suite (n)

Posons $u_n = n$. Montrons que $u_n \rightarrow +\infty$.

Par définition, cela signifie :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies u_n > A.$$

Soit donc $A \in \mathbb{R}$. Choisissons par exemple

$$N = \max\{0, \lfloor A \rfloor + 1\}.$$

Si $n \geq N$, alors $n > A$, donc $u_n > A$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Elle ne possède donc pas de limite réelle : la suite (n) est divergente.

2. La suite (n^p) , $p \in \mathbb{N}^*$

Fixons $p \geq 1$. Pour montrer que $n^p \rightarrow +\infty$, soit $A > 0$. Il suffit d'imposer

$$n > A^{1/p}.$$

On choisit donc un entier $N > A^{1/p}$. Alors, pour $n \geq N$,

$$n^p > A.$$

Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty.$$

La suite (n^p) est donc divergente au sens où elle ne converge vers aucun réel.

3. La suite $(\sqrt{n})$

Soit $A > 0$. Pour avoir

$$\sqrt{n} > A,$$

il suffit que

$$n > A^2.$$

En choisissant un entier $N > A^2$, on obtient, pour tout $n \geq N$,

$$\sqrt{n} > A.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Elle est donc divergente.

4. La suite $((-1)^n)$

Posons

$$u_n = (-1)^n.$$

Examinons séparément les indices pairs et impairs.

Si $n = 2k$, alors

$$u_{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

La sous-suite (u_{2k}) est donc constante et converge vers 1.

Si $n = 2k + 1$, alors

$$u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1.$$

La sous-suite (u_{2k+1}) converge donc vers -1 .

Or toute sous-suite d'une suite convergente doit converger vers la même limite que la suite. Ici, deux sous-suites ont deux limites différentes :

$$1 \neq -1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{((-1)^n) \text{ est divergente.}}$$

Est ce acceptable logiquement ? méditer pour le voir!

Elle oscille indéfiniment entre 1 et -1 .

5. La suite $(\cos n)$

Nous allons montrer qu'elle ne peut pas avoir de limite réelle.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos n \longrightarrow L.$$

Toute suite décalée a alors la même limite :

$$\cos(n+1) \rightarrow L \quad \text{et} \quad \cos(n+2) \rightarrow L.$$

Utilisons l'identité trigonométrique

$$\cos(n+2) = 2 \cos(1) \cos(n+1) - \cos n.$$

En passant à la limite,

$$L = 2 \cos(1)L - L.$$

Ainsi,

$$2L = 2 \cos(1)L,$$

donc

$$L(1 - \cos(1)) = 0.$$

Comme $\cos(1) \neq 1$, on obtient nécessairement

$$L = 0.$$

Donc l'hypothèse de convergence imposerait

$$\cos n \rightarrow 0.$$

Or

$$\sin^2 n = 1 - \cos^2 n,$$

d'où

$$\sin^2 n \rightarrow 1 \quad \text{et donc} \quad |\sin n| \rightarrow 1.$$

D'autre part,

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1.$$

Comme $\cos n \rightarrow 0$, on en déduit

$$|\sin(n+1)| \rightarrow |\cos 1|.$$

Mais, en remplaçant n par $n+1$ dans $|\sin n| \rightarrow 1$, on doit aussi avoir

$$|\sin(n+1)| \rightarrow 1.$$

Cela imposerait

$$|\cos 1| = 1,$$

ce qui est faux. Nous avons obtenu une contradiction.

Par conséquent,

$$\boxed{(\cos n) \text{ est divergente.}}$$

Point important

Les suites (n) , (n^p) et $(\sqrt{n})$ sont dites divergentes parce qu'elles tendent vers $+\infty$: elles n'ont pas de limite *réelle*. En revanche, $(\cos n)$ et $((-1)^n)$ sont divergentes par oscillation et ne tendent même pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Bilan

$$\boxed{n \rightarrow +\infty, \quad n^p \rightarrow +\infty \ (p \in \mathbb{N}^*), \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty}$$

et

$$\boxed{(\cos n) \text{ et } ((-1)^n) \text{ ne possèdent aucune limite.}}$$

Ainsi, toutes les suites de la deuxième ligne de l'énoncé sont bien divergentes.

Limites de suites

Transcription fidèle et correction très détaillée

I. Divergence de la suite $u_n = (-1)^n$ à partir de la définition

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer en utilisant la définition que : cette suite est divergente.

1. Rappel de la définition d'une suite convergente

Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang, *tous* les termes de la suite doivent être aussi proches que l'on veut d'un même nombre réel ℓ .

Pour montrer que $((-1)^n)$ est divergente en utilisant cette définition, nous allons supposer qu'elle converge et obtenir une contradiction.

2. Raisonnement par l'absurde

Supposons donc qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$(-1)^n \longrightarrow \ell.$$

Choisissons une valeur particulière de ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

D'après la définition de la convergence, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant deux indices, l'un pair et l'autre impair, tous deux supérieurs ou égaux à N :

$$p = 2N \quad \text{et} \quad q = 2N + 1.$$

On a bien $p \geq N$ et $q \geq N$.

Puisque $p = 2N$ est pair,

$$u_p = (-1)^{2N} = 1.$$

La définition impose donc

$$|1 - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Puisque $q = 2N + 1$ est impair,

$$u_q = (-1)^{2N+1} = -1.$$

La définition impose également

$$| -1 - \ell | < \frac{1}{2}.$$

Utilisons l'inégalité triangulaire :

$$|1 - (-1)| = |(1 - \ell) + (\ell + 1)| \leq |1 - \ell| + |\ell + 1|.$$

Ainsi,

$$2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui est impossible.

L'hypothèse de convergence conduit à une contradiction. Donc

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est divergente.}$$

Idée essentielle. Les termes pairs valent toujours 1 et les termes impairs valent toujours -1 . Ils ne peuvent donc pas tous se rapprocher d'un même réel lorsque n devient grand.

II. Opérations sur les limites des suites

Exemple : Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 \right)$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n)$
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 2n)$
- 5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 - 2n - 5)$
- 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$
- 7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$.

Rappels utiles

Lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad n^p \rightarrow +\infty \quad (p \geq 1).$$

Les opérations usuelles sur les limites s'appliquent lorsque l'on ne rencontre pas une forme indéterminée. En particulier, une expression de type $+\infty - \infty$ doit être transformée avant de conclure.

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 \right)$$

On traite chaque terme séparément.

Comme

$$\sqrt{3n} = \sqrt{3} \sqrt{n},$$

on a

$$\frac{2}{\sqrt{3n}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

De même,

$$\frac{2}{3n} = \frac{2}{3} \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{5}{n^2} = 5 \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Enfin, la suite constante -1 a pour limite -1 .

Par somme des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 \right) = 0 - 0 + 0 - 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 \right) = -1.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

On a

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \implies -3 + \frac{1}{n} \rightarrow -3,$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \implies 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Les deux limites sont finies. On peut donc utiliser la règle du produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = (-3) \times 1 = -3.$$

$$\boxed{-3}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n)$$

Écrire directement $+\infty - (+\infty)$ donnerait une forme indéterminée. Il faut donc factoriser par la puissance dominante n^2 :

$$n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Or

$$n^2 \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 > 0.$$

Pour n suffisamment grand, le deuxième facteur reste strictement positif. Par exemple, pour $n \geq 2$,

$$1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$n^2 - n \geq \frac{n^2}{2} \rightarrow +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = +\infty.}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 2n)$$

Ici encore, on a formellement $+\infty - +\infty$, donc on transforme l'expression. Factorisons par n :

$$\sqrt{n} - 2n = n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right),$$

car

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \rightarrow -2 < 0.$$

Le premier facteur tend vers $+\infty$ et le second vers un réel strictement négatif. Le produit tend donc vers $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 2n) = -\infty.$$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 - 2n - 5)$

On factorise par n^2 :

$$4n^2 - 2n - 5 = n^2 \left(4 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} \right).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$4 - \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} \rightarrow 4 > 0,$$

et

$$n^2 \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 - 2n - 5) = +\infty.$$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$

Le numérateur et le dénominateur sont de même degré 2. Divisons chaque terme par n^2 :

$$\frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \frac{4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}}.$$

Puis

$$4 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2} \rightarrow 4, \quad 3 + \frac{5}{n^2} \rightarrow 3 \neq 0.$$

La règle du quotient donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5} = \frac{4}{3}.$$

$$7) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$$

Si l'on remplace mentalement n par $+\infty$, on obtient une forme indéterminée $+\infty - +\infty$. Il faut donc rationaliser.

On multiplie et on divise par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)(\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n)}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n} \\ &= \frac{-3n + 2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n}. \end{aligned}$$

Pour $n > 0$, divisons maintenant le numérateur et le dénominateur par n :

$$\frac{-3n + 2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + n} = \frac{-3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1}.$$

En effet,

$$\sqrt{n^2 - 3n + 2} = n\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \quad (n > 0).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$-3 + \frac{2}{n} \rightarrow -3,$$

et

$$\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1 \rightarrow \sqrt{1} + 1 = 2.$$

Le dénominateur limite vaut $2 \neq 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n) = -\frac{3}{2}.$$

III. Calcul de limites : polynômes et quotients de polynômes

Exemple : calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^3 - 5n^2 + 3n - 1)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^3 - 2n^5 + 7n - 9)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}.$$

Principe général pour les polynômes

Dans un polynôme, le terme de plus haut degré domine lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour le justifier proprement, on factorise par la plus grande puissance de n .

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^3 - 5n^2 + 3n - 1)$$

Factorisons par n^3 :

$$4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 = n^3 \left(4 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right).$$

Or

$$4 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} \rightarrow 4 > 0,$$

et

$$n^3 \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^3 - 5n^2 + 3n - 1) = +\infty.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^3 - 2n^5 + 7n - 9)$$

Le terme de plus haut degré est $-2n^5$. Factorisons par n^5 :

$$6n^3 - 2n^5 + 7n - 9 = n^5 \left(\frac{6}{n^2} - 2 + \frac{7}{n^4} - \frac{9}{n^5} \right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers

$$0 - 2 + 0 - 0 = -2 < 0.$$

Comme $n^5 \rightarrow +\infty$, le produit tend vers $-\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^3 - 2n^5 + 7n - 9) = -\infty.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}$$

Le numérateur et le dénominateur sont de degré 1. Divisons par n :

$$\frac{9n - 3}{3n + 5} = \frac{9 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{5}{n}}.$$

Alors

$$9 - \frac{3}{n} \rightarrow 9, \quad 3 + \frac{5}{n} \rightarrow 3 \neq 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$$

Le degré du numérateur est supérieur de 1 à celui du dénominateur. On peut faire apparaître un facteur n :

$$\frac{6n^2 - 9}{3n + 1} = n \frac{6 - \frac{9}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}}.$$

Le quotient qui accompagne n tend vers

$$\frac{6}{3} = 2 > 0.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, ce quotient est positif et proche de 2, tandis que $n \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1} = +\infty.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$$

Le dénominateur est de degré 3, plus élevé que le degré 2 du numérateur. Divisons par n^3 :

$$\frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9} = \frac{\frac{7}{n} + \frac{1}{n^3}}{14 - \frac{5}{n^2} + \frac{9}{n^3}}.$$

Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $14 \neq 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9} = 0.$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$$

Le dénominateur est de degré 5, nettement supérieur au degré 2 du numérateur. Divisons par n^5 :

$$\frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4} = \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5}}{1 + \frac{3}{n^4} - \frac{4}{n^5}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} \rightarrow 0$$

et

$$1 + \frac{3}{n^4} - \frac{4}{n^5} \rightarrow 1 \neq 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4} = 0.$$

IV. Tableau récapitulatif des résultats

Suite / expression	Limite
$(-1)^n$	divergente
$\frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1$	-1
$\left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	-3
$n^2 - n$	$+\infty$
$\sqrt{n} - 2n$	$-\infty$
$4n^2 - 2n - 5$	$+\infty$
$\frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$	$\frac{4}{3}$
$\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$	$-\frac{3}{2}$
$4n^3 - 5n^2 + 3n - 1$	$+\infty$
$6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$	$-\infty$
$\frac{9n - 3}{3n + 5}$	3
$\frac{6n^2 - 9}{3n + 1}$	$+\infty$
$\frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$	0
$\frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$	0

V. Méthodes à retenir

- Pour une somme ou un produit de termes ayant des limites finies, appliquer directement les opérations sur les limites.
- Devant un polynôme, factoriser par la plus grande puissance de n .
- Devant un quotient de polynômes, diviser le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance pertinente de n .
- Devant une expression avec une racine du type $\sqrt{A_n} - B_n$ donnant $+\infty - +\infty$, penser à multiplier par la quantité conjuguée.
- Une expression $+\infty - +\infty$ n'est *pas* une conclusion : c'est une forme indéterminée qui doit être transformée.
- Pour prouver qu'une suite est divergente *à partir de la définition*, supposer qu'elle converge vers ℓ , choisir un ε bien adapté, puis produire une contradiction.

Limites de suites - Exercices et exemples corrigés

Détail complet des calculs et des justifications

I. Exercice 5

Exercice 5 : calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n).$$

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\sqrt{n+2} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

L'expression se présente donc sous la forme indéterminée

$$+\infty - (+\infty).$$

On ne peut donc pas soustraire directement les limites. La bonne méthode consiste à **multiplier par la quantité conjuguée**.

On écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

Le numérateur reste égal à la constante positive 2. Donc

$$\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0.$$

On peut même obtenir un encadrement utile. Puisque $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n}$,

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n},$$

donc

$$0 < \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes redonne la même limite.

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$$

Ici encore,

$$\sqrt{n^2 + n + 1} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty,$$

donc l'expression a la forme indéterminée $+\infty - \infty$. On rationalise :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître des quantités qui ont une limite finie, on divise le numérateur et le dénominateur par n (possible pour $n \geq 1$) :

$$\frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{n} + 1}.$$

Comme $n > 0$,

$$\frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{n} = \sqrt{\frac{n^2 + n + 1}{n^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}.$$

Puis

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

donc, par continuité de la racine carrée,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1.$$

Par quotient,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \frac{1}{2}.}$$

II. Exemple : deux limites

Exemple :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4} \\ 2) \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) ? \quad \text{on pose : } \frac{1}{n} = t, \\ & n \rightarrow +\infty \iff t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4}$$

Le terme dominant du polynôme situé sous la racine cubique est n^5 . Pour justifier précisément le calcul, factorisons n^5 :

$$n^5 + 2n^3 - n + 4 = n^5 \left(1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^5} \right).$$

Donc

$$\sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4} = \sqrt[3]{n^5} \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^5}}.$$

Pour $n > 0$,

$$\sqrt[3]{n^5} = n^{5/3}.$$

De plus,

$$1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^5} \rightarrow 1,$$

donc

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^5}} \rightarrow 1.$$

Enfin,

$$n^{5/3} \rightarrow +\infty. \quad \text{car } 5/3 > 1$$

Le produit tend donc vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4} = +\infty.$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan(1/n)$$

Cette limite contient un produit de type

$$(+\infty) \times 0,$$

qui est une forme indéterminée. L'idée donnée dans l'énoncé est de poser

$$t = \frac{1}{n}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $t \rightarrow 0^+$, et $n = 1/t$. Ainsi,

$$n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\arctan t}{t}.$$

Or la limite fondamentale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$$

se déduit par exemple du fait que $\arctan$ est dérivable en 0 et que

$$(\arctan)'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

En effet,

$$\frac{\arctan t}{t} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} \longrightarrow (\arctan)'(0) = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan \left(\frac{1}{n} \right) = 1.$$

Remarque de méthode. Écrire directement « $n \rightarrow +\infty$ et $\arctan(1/n) \rightarrow 0$, donc le produit vaut... » serait incorrect : $+\infty \times 0$ est une forme indéterminée. Le changement de variable transforme le produit en un quotient dont on connaît la limite fondamentale.

III. Exemple : minoration d'une suite et limite

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que

$$v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

1) **Montrer que** $v_n \geq \frac{4}{3}n^2$

On part de l'expression

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2.$$

Regroupons les termes qui ne contiennent pas n^2 :

$$v_n = \frac{4}{3}n^2 + (2(-1)^n + 2).$$

Il suffit donc de montrer que

$$2(-1)^n + 2 \geq 0.$$

Or $(-1)^n$ ne prend que deux valeurs : 1 si n est pair et -1 si n est impair.

Si n est pair,

$$2(-1)^n + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4 \geq 0.$$

Si n est impair,

$$2(-1)^n + 2 = 2 \times (-1) + 2 = 0.$$

Donc, dans tous les cas,

$$2(-1)^n + 2 \geq 0.$$

Par conséquent,

$$v_n = \frac{4}{3}n^2 + (2(-1)^n + 2) \geq \frac{4}{3}n^2.$$

Ainsi,

$$v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une preuve encore plus courte consiste à utiliser

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

La première inégalité donne

$$2(-1)^n \geq -2,$$

puis

$$2(-1)^n + 2 \geq 0,$$

et on retrouve immédiatement le résultat.

2) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

On sait que

$$\frac{4}{3}n^2 \rightarrow +\infty.$$

Et la question précédente donne

$$v_n \geq \frac{4}{3}n^2.$$

Utilisons la définition de la divergence vers $+\infty$. Soit $A > 0$. Comme $\frac{4}{3}n^2 \rightarrow +\infty$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{4}{3}n^2 > A.$$

Par exemple, il suffit de prendre un entier N vérifiant

$$N > \sqrt{\frac{3A}{4}}.$$

Alors, pour $n \geq N$,

$$v_n \geq \frac{4}{3}n^2 > A.$$

C'est exactement la définition de

$$v_n \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.}$$

Refais tout simplement avec les règles de trouver la limite avec l'ordre

IV. Exercice 6

Exercice 6 : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$v_n = 3n + 5 \sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

On ne peut pas dire que $\sin n$ possède une limite : la suite $(\sin n)$ oscille. Cependant, elle est bornée, et cela suffit ici.

Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

En multipliant par $5 > 0$,

$$-5 \leq 5 \sin n \leq 5.$$

En ajoutant $3n$ aux trois membres,

$$3n - 5 \leq 3n + 5 \sin n \leq 3n + 5.$$

Comme $v_n = 3n + 5 \sin n$,

$$3n - 5 \leq v_n \leq 3n + 5.$$

Pour la limite vers $+\infty$, la borne inférieure suffit. En effet,

$$3n - 5 \rightarrow +\infty.$$

Donc, puisque

$$v_n \geq 3n - 5,$$

on en déduit

$$v_n \rightarrow +\infty.$$

Détaillons avec la définition. Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche un rang N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$v_n > A.$$

Il suffit que

$$3n - 5 > A,$$

c'est-à-dire

$$3n > A + 5$$

puis

$$n > \frac{A + 5}{3}.$$

On peut donc choisir, par exemple,

$$N = \max \left(0, \left\lfloor \frac{A + 5}{3} \right\rfloor + 1 \right).$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$v_n \geq 3n - 5 > A.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n + 5 \sin n) = +\infty.$$

Refais tout simplement avec les règles de trouver la limite avec l'ordre

V. Bilan des résultats

Suite / expression	Limite
$\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$	0
$\sqrt{n^2 + n + 1} - n$	$\frac{1}{2}$
$\sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4}$	$+\infty$
$n \arctan(1/n)$	1
$2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2$	$+\infty$
$3n + 5 \sin n$	$+\infty$

VI. Méthodes essentielles à retenir

- Une différence de deux quantités tendant vers $+\infty$ est une forme indéterminée : avec des racines carrées, penser à la **quantité conjuguée**.
- Sous une racine ou dans un polynôme, identifier la **puissance dominante** de n et la factoriser.
- Pour un produit $+\infty \times 0$, transformer l'expression si possible en quotient ou utiliser une limite fondamentale.
- Une suite oscillante mais bornée, comme $\sin n$, peut être contrôlée par un **encadrement**.
- Pour prouver qu'une suite tend vers $+\infty$, il suffit souvent de la minorer par une suite qui tend vers $+\infty$.

Limites de suites et critères de convergence

Énoncés fidèlement repris et corrections très détaillées

1. Exemple : une suite qui tend vers $-\infty$

Énoncé

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$v_n = -4n + 3 \cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

On sait que, pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

En multipliant par $3 > 0$, le sens des inégalités est conservé :

$$-3 \leq 3 \cos n \leq 3.$$

Puis on ajoute $-4n$ aux trois membres :

$$-4n - 3 \leq -4n + 3 \cos n \leq -4n + 3.$$

Comme $v_n = -4n + 3 \cos n$, on a donc

$$-4n - 3 \leq v_n \leq -4n + 3.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 3) = -\infty.$$

La majoration $v_n \leq -4n + 3$ suffit alors pour prouver que $v_n \rightarrow -\infty$.

Justification directement avec la définition. Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour obtenir $v_n < A$, il suffit d'imposer

$$-4n + 3 < A.$$

Cette inégalité équivaut à

$$-4n < A - 3 \iff 4n > 3 - A \iff n > \frac{3 - A}{4}.$$

On peut donc choisir, par exemple,

$$N = \max\left(0, \left\lceil \frac{3 - A}{4} \right\rceil + 1\right).$$

Alors, pour tout $n \geq N$, on a $v_n < A$. C'est exactement la définition de $v_n \rightarrow -\infty$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 3 \cos n) = -\infty.$$

2. Théorème 6 : critère de convergence par majoration de l'écart

Énoncé

Théorème 6 : (critères de convergence)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques et l un réel tels que :

$$|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq p$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Exemple 2 : soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

L'exemple conduit naturellement à montrer que $u_n \rightarrow 3$ en appliquant le théorème 6.

On cherche l'écart entre u_n et le nombre 3 :

$$u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}.$$

Donc

$$|u_n - 3| = \left| \frac{\sin n}{n^3} \right|.$$

Comme $n \geq 1$, $n^3 > 0$, ainsi

$$|u_n - 3| = \frac{|\sin n|}{n^3}.$$

Or, pour tout réel x ,

$$|\sin x| \leq 1.$$

Donc

$$|\sin n| \leq 1,$$

et par conséquent

$$0 \leq |u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Posons

$$v_n = \frac{1}{n^3}.$$

On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Toutes les hypothèses du théorème 6 sont donc satisfaites avec $l = 3$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\sin n}{n^3} \right) = 3.$$

Vérification par la définition. Soit $\varepsilon > 0$. On veut $|u_n - 3| < \varepsilon$. Puisque

$$|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^3},$$

il suffit que

$$\frac{1}{n^3} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

Un choix possible est donc

$$N = \left\lfloor \varepsilon^{-1/3} \right\rfloor + 1.$$

Pour tout $n \geq N$, on a bien $|u_n - 3| < \varepsilon$.

3. Théorème 7 : théorème des gendarmes

Énoncé

Théorème 7 : (critères de convergence)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites numériques et l un réel. Tels que :

$$w_n < u_n < v_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq p$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l.$$

Alors : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Exemple : calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Comme $n > 0$, on peut diviser les trois membres par n sans changer le sens des inégalités :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La suite $\frac{\sin n}{n}$ est donc prise en sandwich entre deux suites qui ont la même limite 0. Par le théorème des gendarmes,

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Point important

Dans l'énoncé du théorème, les inégalités sont écrites strictement. Pour l'application ci-dessus, on obtient naturellement des inégalités larges $\leq$. La version usuelle du théorème des gendarmes fonctionne parfaitement avec

$$w_n \leq u_n \leq v_n.$$

4. Exemple 2 : suite récurrente $v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1}$

Énoncé

Exemple 2 : soit $(v_n)_{n \geq 4}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1}, \\ v_4 = 10. \end{cases}$$

montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 4}$ est convergente.

Nous allons donner une démonstration très complète, puis déterminer en plus sa limite.

Étape 1 : montrer que $v_n > 0$ pour tout $n \geq 4$

On procède par récurrence.

Au rang 4,

$$v_4 = 10 > 0.$$

Supposons $v_n > 0$ pour un certain $n \geq 4$. Comme

$$\frac{5}{n+1} > 0,$$

on a

$$v_{n+1} = \frac{5}{n+1}v_n > 0.$$

Ainsi, par récurrence,

$$\boxed{v_n > 0 \quad \forall n \geq 4.}$$

La suite est donc minorée par 0.

Étape 2 : étudier la monotonie

Calculons la différence :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5v_n}{n+1} - v_n.$$

Factorisons par v_n :

$$v_{n+1} - v_n = v_n \left(\frac{5}{n+1} - 1 \right).$$

Mettons au même dénominateur :

$$\frac{5}{n+1} - 1 = \frac{5 - (n+1)}{n+1} = \frac{4-n}{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = v_n \frac{4-n}{n+1}.}$$

Pour $n \geq 4$, on a $v_n > 0$, $n+1 > 0$ et $4-n \leq 0$. Ainsi

$$v_{n+1} - v_n \leq 0.$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} \leq v_n \quad \forall n \geq 4.}$$

La suite est décroissante au sens large. Notons qu'au premier pas,

$$v_5 = \frac{5v_4}{5} = v_4 = 10,$$

puis pour tout $n \geq 5$, $4-n < 0$, donc $v_{n+1} < v_n$: elle devient strictement décroissante à partir du rang 5.

Étape 3 : conclure par le théorème de convergence monotone

Nous avons montré que :

$$v_n \geq 0 \quad \forall n \geq 4,$$

et que (v_n) est décroissante. Une suite décroissante et minorée est convergente. Par conséquent,

Conclusion

$$(v_n)_{n \geq 4} \text{ est convergente.}$$

Étape 4 : déterminer sa limite

La question demande seulement la convergence, mais on peut aller plus loin.

Puisque la suite est décroissante et positive,

$$0 < v_n \leq v_4 = 10.$$

À partir de

$$v_{n+1} = \frac{5}{n+1} v_n,$$

on obtient

$$0 < v_{n+1} \leq \frac{50}{n+1}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{50}{n+1} = 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = 0.$$

Décaler l'indice ne change pas la limite d'une suite convergente, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Méthode supplémentaire : expression explicite

Pour $n \geq 4$,

$$v_n = v_4 \prod_{k=4}^{n-1} \frac{5}{k+1}.$$

Comme $v_4 = 10$,

$$v_n = 10 \frac{5^{n-4}}{5 \cdot 6 \cdots n}.$$

Réfléchis et essaie de démontrer au très clair pourquoi $\forall n$ s'exprime explicitement comme ça!

Or

$$5 \cdot 6 \cdots n = \frac{n!}{4!}.$$

Ainsi

$$v_n = \frac{240 \cdot 5^{n-4}}{n!} \quad (n \geq 4).$$

Cette formule confirme la décroissance rapide et la limite nulle.

5. Bilan des résultats

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 3 \cos n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\sin n}{n^3} \right) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$(v_n)_{n \geq 4} \text{ définie par } v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1}, v_4 = 10 \text{ converge, et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$