

Suites numériques - Limites et convergence

Exercices 7, 8 et 9 - exemples corrigés en détail

Remarque préliminaire : convergence et monotonie

Énoncé

Remarque : Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone : exemple :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

n'est pas monotone mais elle est convergente.

La suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \geq 1)$$

change de signe à chaque rang :

$$u_1 = -1, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = -\frac{1}{3}, \quad u_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

Elle ne peut donc être ni croissante sur tout son domaine, ni décroissante sur tout son domaine.

En revanche,

$$|u_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Or

$$-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|,$$

donc

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme les deux suites encadrantes tendent vers 0, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Cette remarque montre qu'être **convergente** n'implique pas être **monotone**.

Exercice 7 - Calcul de limites

Énoncé

Exercice 7 : calculer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2}$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{4n + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2}$$

Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Donc, pour tout entier n ,

$$|\cos n| \leq 1.$$

Comme $n+2 > 0$,

$$\left| \frac{\cos n}{n+2} \right| = \frac{|\cos n|}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

Ainsi,

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n+2} \right| \leq \frac{1}{n+2} \rightarrow 0.$$

Donc

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0.$$

Méthode / idée clé

Le numérateur $\cos n$ n'a pas besoin d'avoir une limite : il suffit ici qu'il soit borné. Un terme borné divisé par une quantité qui tend vers $+\infty$ tend vers 0.

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin(1/n)}{4n + \sin(1/n)}$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Par continuité de la fonction sinus en 0,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \sin 0 = 0.$$

La forme du quotient est de type $\frac{+\infty}{+\infty}$. On divise donc le numérateur et le dénominateur par n :

$$\frac{3n - 2 \sin(1/n)}{4n + \sin(1/n)} = \frac{3 - \frac{2}{n} \sin(1/n)}{4 + \frac{1}{n} \sin(1/n)}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0,$$

donc

$$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$3 - \frac{2}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 3$$

et

$$4 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 4 \neq 0.$$

On peut donc appliquer le théorème sur la limite d'un quotient :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{4n + \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{4}.$$

Exemple - Suite définie par $v_{n+1} = v_n + n^4$

Énoncé

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad v_0 = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Commençons par écrire quelques termes :

$$v_1 = v_0 + 0^4 = 1,$$

$$v_2 = v_1 + 1^4 = 2,$$

$$v_3 = v_2 + 2^4 = 18,$$

$$v_4 = v_3 + 3^4 = 99.$$

On voit déjà une croissance rapide, mais ces quelques valeurs ne constituent pas une preuve.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = n^4 \geq 0.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

Pour obtenir une minoration qui tend vers $+\infty$, itérons la relation : pour $n \geq 1$,

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} k^4 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^4.$$

Pour tout $k \geq 1$, on a $k^4 \geq 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^4 \geq \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n - 1.$$

Donc

$$v_n \geq 1 + (n - 1) = n.$$

Comme

$$n \rightarrow +\infty,$$

et $v_n \geq n$, on en déduit par comparaison que

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Méthode / idée clé

Pour prouver qu'une suite tend vers $+\infty$, il est souvent suffisant de la **minorer** par une suite plus simple qui tend elle-même vers $+\infty$.

Exercice 8 - Suite récurrente $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ **Énoncé**

Exercice 8 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = x^2 + x + 1.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est non majorée (par absurde).
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

La relation de récurrence s'écrit explicitement

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1.$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

Calculons la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 + u_n + 1) - u_n = u_n^2 + 1.$$

Or, pour tout réel u_n ,

$$u_n^2 \geq 0,$$

donc

$$u_n^2 + 1 > 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$u_{n+1} > u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion

La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

À titre de vérification,

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, & u_1 &= 1^2 + 1 + 1 = 3, \\ u_2 &= 3^2 + 3 + 1 = 13, & u_3 &= 13^2 + 13 + 1 = 183. \end{aligned}$$

On observe bien $1 < 3 < 13 < 183 < \dots$.

2) Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée

Supposons, par l'absurde, que la suite (u_n) soit majorée.

Nous savons déjà qu'elle est croissante. Une suite croissante et majorée est convergente. Il existerait donc un réel ℓ tel que

$$u_n \longrightarrow \ell.$$

Une suite décalée ayant la même limite,

$$u_{n+1} \longrightarrow \ell.$$

Or

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1.$$

La fonction

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans la relation de récurrence,

$$\ell = \ell^2 + \ell + 1.$$

En soustrayant ℓ aux deux membres,

$$0 = \ell^2 + 1.$$

Donc

$$\ell^2 = -1,$$

ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$ puisque $\ell^2 \geq 0$.

Nous avons obtenu une contradiction. L'hypothèse « (u_n) est majorée » est donc fausse.

Conclusion

(u_n) n'est pas majorée.

3) En déduire la limite de (u_n)

Nous avons montré que (u_n) est croissante et non majorée.

Par le théorème de divergence des suites monotones, une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

Ainsi,

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exemple - Limite d'une suite avec racine carrée

Énoncé

Exemple : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Pour $n \geq 1$, divisons le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4} = \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$$

et

$$3 + \frac{4}{n^2} \rightarrow 3 \neq 0.$$

Par quotient,

$$\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Comme $\frac{2}{3} > 0$ et que la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$,

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Exercice 9 - Limites avec fonctions usuelles

Énoncé

Exercice 9 : calculer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}}$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$$

Commençons par calculer la limite de l'argument de la tangente :

$$\frac{\pi n + 1}{3n + 4} = \frac{\pi + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\pi + \frac{1}{n} \rightarrow \pi, \quad 3 + \frac{4}{n} \rightarrow 3.$$

Donc

$$\frac{\pi n + 1}{3n + 4} \rightarrow \frac{\pi}{3}.$$

La fonction $\tan$ est continue en $\frac{\pi}{3}$ car

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right) = \sqrt{3}.$$

$$2) \lim \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}}$$

Étudions d'abord le quotient situé sous les racines :

$$\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} = \frac{16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 16$$

et

$$2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2.$$

Donc

$$\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} \rightarrow \frac{16}{2} = 8.$$

La quantité obtenue est strictement positive. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On peut donc appliquer successivement la continuité de la racine carrée :

$$\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} \rightarrow \sqrt{8},$$

puis

$$\sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}} \rightarrow \sqrt{\sqrt{8}}.$$

Or

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

donc

$$\sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt{2\sqrt{2}} = 8^{1/4} = 2^{3/4}.$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}} = \sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{3/4}.$$

$$3) \lim \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Le point essentiel est de calculer d'abord

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons

$$t = \frac{1}{n}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $t \rightarrow 0^+$, et

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

On utilise la limite fondamentale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Donc

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.$$

La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité,

$$\arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow \arctan(1).$$

Or

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Bilan des résultats

Expression / suite	Limite
$\frac{(-1)^n}{n}$	0
$\frac{\cos n}{n+2}$	0
$\frac{3n - 2 \sin(1/n)}{4n + \sin(1/n)}$	$\frac{3}{4}$
$v_{n+1} = v_n + n^4, v_0 = 1$	$+\infty$
$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1, u_0 = 1$	$+\infty$
$\sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}}$	$2^{3/4}$
$\arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	$\frac{\pi}{4}$

Méthodes essentielles à retenir

- Pour une expression de la forme $\frac{\text{terme borné}}{\text{terme} \rightarrow +\infty}$, penser immédiatement à un encadrement.
- Pour un quotient de polynômes en n , diviser numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de n pertinente.
- Pour une fonction composée, calculer d'abord la limite de l'intérieur, puis utiliser la continuité de la fonction extérieure lorsque c'est permis.
- Pour $n \sin(1/n)$, faire apparaître la limite fondamentale $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$.
- Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

- Pour montrer qu'une suite n'est pas majorée par l'absurde : supposer qu'elle l'est, exploiter la convergence monotone, puis passer à la limite dans la relation de récurrence afin d'obtenir une contradiction.

Suites numériques - Limites et suites récurrentes

Exemples, Exercice 10, Activité sur $u_{n+1} = f(u_n)$ et Exercice 11

Énoncés complets et corrections intégralement détaillées

1. Exemples - Limites de suites géométriques

Énoncé

Exemples : calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n.$$

Correction détaillée

On rappelle le comportement fondamental d'une suite géométrique (q^n) :

- si $|q| < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$;
- si $q > 1$, alors $q^n \rightarrow +\infty$;
- si $q < -1$, les valeurs absolues tendent vers $+\infty$ mais les signes alternent : la suite n'a donc pas de limite.

1) Limite de 2^n . Ici $q = 2 > 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

Pour le voir directement : soit $A > 0$. Comme 2^n devient arbitrairement grand, il existe N tel que $2^N > A$; alors pour $n \geq N$, $2^n \geq 2^N > A$.

2) Limite de $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ici

$$0 < \frac{2}{3} < 1.$$

Une puissance répétée d'un nombre strictement compris entre 0 et 1 devient aussi petite que l'on veut. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

3) Limite de $(-5)^n$. Il faut faire attention : $(-5)^n$ ne tend pas vers $-\infty$. Pour les indices pairs,

$$(-5)^{2k} = 25^k \rightarrow +\infty.$$

Pour les indices impairs,

$$(-5)^{2k+1} = -5 \cdot 25^k \rightarrow -\infty.$$

Deux sous-suites ont donc des comportements incompatibles. Ainsi

$$((-5)^n) \text{ est divergente.}$$

2. Exercice 10 - Limites de suites géométriques

Énoncé

Exercice 10 : calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{4^n} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^n - \frac{1}{2^n} \right) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2^n}{2^n}.$$

Correction détaillée

1) $(0,7)^n$. Comme $0 < 0,7 < 1$, on applique le résultat sur les suites géométriques de raison de valeur absolue strictement inférieure à 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n = 0.$$

2) $(\sqrt{2})^n$. On a $\sqrt{2} > 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty.$$

On peut également écrire

$$(\sqrt{2})^n = 2^{n/2},$$

et $n/2 \rightarrow +\infty$.

3) $(-2)^n$. Pour $n = 2k$,

$$(-2)^{2k} = 4^k \rightarrow +\infty,$$

tandis que pour $n = 2k + 1$,

$$(-2)^{2k+1} = -2 \cdot 4^k \rightarrow -\infty.$$

Ainsi

$$((-2)^n) \text{ est divergente.}$$

4) 4^{-n} . On transforme :

$$4^{-n} = \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} = 0.$$

5) $\frac{5^n}{4^n}$. En utilisant $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$,

$$\frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4} \right)^n.$$

Or $\frac{5}{4} > 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{4^n} = +\infty.$$

6) $3^n - \frac{1}{2^n}$. On sait que

$$3^n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0.$$

Soustraire une quantité qui tend vers 0 à une quantité qui tend vers $+\infty$ ne change pas le comportement dominant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^n - \frac{1}{2^n} \right) = +\infty.$$

Rigoureusement, pour $n \geq 1$, $0 < 2^{-n} \leq 1$, donc

$$3^n - 1 \leq 3^n - 2^{-n} < 3^n,$$

et la borne inférieure tend vers $+\infty$.

7) $\frac{3^n+2^n}{2^n}$. On sépare les deux termes :

$$\frac{3^n + 2^n}{2^n} = \frac{3^n}{2^n} + \frac{2^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 1.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2^n}{2^n} = +\infty.$$

3. 8) Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ - Activité

Énoncé

8) Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Activité : Soit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite $(\Delta) y = x$.
2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

- a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
- b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \alpha$.
 - a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.
 - b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction détaillée

1. Point d'intersection de C_f et de $y = x$.

Un point commun aux deux courbes a une abscisse x telle que

$$f(x) = x.$$

Donc

$$\frac{1}{2}x + 1 = x.$$

On soustrait $\frac{1}{2}x$ aux deux membres :

$$1 = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x.$$

Ainsi

$$x = 2.$$

Comme le point est aussi sur la droite $y = x$, son ordonnée vaut 2. Donc

$$\boxed{A(2, 2)}.$$

Ce nombre 2 est aussi le *point fixe* de la fonction f .

2.a) Calcul des trois premiers termes. La suite commence au rang 0. Les trois premiers termes sont donc u_0, u_1, u_2 .

$$u_0 = 0.$$

Puis

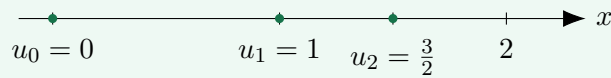
$$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1.$$

Enfin

$$u_2 = f(u_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2}.$$

Ainsi

$$\boxed{u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{3}{2}}.$$



2.b) Conjecture. Les premiers termes donnent

$$0 < 1 < \frac{3}{2} < \dots < 2.$$

On conjecture donc que (u_n) est croissante et que sa limite potentielle est le point fixe 2 :

(u_n) semble croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$
--

Il s'agit pour l'instant d'une conjecture ; les questions suivantes vont la démontrer.

Correction détaillée de l'activité - suite

3. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 2.

Étape 1 : montrer que $u_n \leq 2$ pour tout n . On procède par récurrence.

Posons

$$P(n) : u_n \leq 2.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$u_0 = 0 \leq 2.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$u_n \leq 2.$$

Comme $\frac{1}{2} > 0$, on peut multiplier par $\frac{1}{2}$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{2}u_n \leq 1.$$

En ajoutant 1 aux deux membres :

$$\frac{1}{2}u_n + 1 \leq 2.$$

Or

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

Donc

$$u_{n+1} \leq 2.$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2.}$$

La suite est donc majorée par 2.

Étape 2 : montrer que la suite est croissante. Calculons la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2}.$$

Or, d'après l'étape 1,

$$u_n \leq 2 \implies 2 - u_n \geq 0.$$

Comme 2 > 0,

$$\frac{2 - u_n}{2} \geq 0.$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante et majorée par 2.}}$$

On peut même montrer que la croissance est stricte. En effet, $u_0 = 0 < 2$ et si $u_n < 2$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 < \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2.$$

Donc $u_n < 2$ pour tout n ; dès lors $2 - u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$.

4.a) Déterminer α pour que (v_n) soit géométrique. On pose

$$v_n = u_n + \alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha \\ &= \frac{1}{2}u_n + 1 + \alpha.\end{aligned}$$

Comme $u_n = v_n - \alpha$,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{1}{2}(v_n - \alpha) + 1 + \alpha \\ &= \frac{1}{2}v_n - \frac{\alpha}{2} + 1 + \alpha \\ &= \frac{1}{2}v_n + 1 + \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Pour que (v_n) soit géométrique de raison $\frac{1}{2}$, il faut que le terme constant disparaisse :

$$1 + \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Donc

$$\alpha = -2.$$

Ainsi

$$\boxed{\alpha = -2}$$

et

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n.}$$

Correction détaillée de l'activité - fin

4.b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .Avec $\alpha = -2$,

$$v_n = u_n - 2.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2}.$$

Son premier terme vaut

$$v_0 = u_0 - 2 = 0 - 2 = -2.$$

Par la formule du terme général d'une suite géométrique,

$$v_n = v_0 q^n.$$

Donc

$$v_n = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Puisque $v_n = u_n - 2$, on a

$$u_n = v_n + 2.$$

Ainsi

$$u_n = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

On peut également écrire

$$u_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Vérification :

$$u_0 = 2(1 - 1) = 0,$$

$$u_1 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1,$$

$$u_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}.$$

On retrouve bien les termes calculés précédemment.

4.c) Limite de (u_n) . Comme

$$0 < \frac{1}{2} < 1,$$

on sait que

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$u_n = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 2.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Cette limite confirme exactement la conjecture de la question 2.b et correspond au point fixe de f .

4. Exercice 11 - Suite récurrente définie par une racine

Énoncé

Exercice 11 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

- 1) Étudier les variations de f sur $I = [0, 1]$ et montrer que $f(I) \subset I$.
- 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0, 1]$.
- b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
- c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Correction détaillée

1) Variations de f sur $I = [0, 1]$ et inclusion $f(I) \subset I$.

On considère

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\frac{1+x}{2} \geq \frac{1}{2} > 0,$$

donc f est dérivable sur $[0, 1]$.

Calculons sa dérivée. Posons

$$g(x) = \frac{1+x}{2}.$$

Alors $f(x) = \sqrt{g(x)}$ et $g'(x) = \frac{1}{2}$. Par la formule

$$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}},$$

on obtient

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}}.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, le dénominateur est strictement positif; donc

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi

$$f \text{ est strictement croissante sur } [0, 1].$$

Comme f est croissante,

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)].$$

Or

$$f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$f(1) = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1.$$

Donc

$$f([0, 1]) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right].$$

Comme

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1,$$

on a

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right] \subset [0, 1].$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(I) \subset I.}$$

Correction détaillée de l'Exercice 11 - suite

2.a) Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout n .

On procède par récurrence. Posons

$$P(n) : u_n \in [0, 1].$$

Initialisation. On a

$$u_0 = 1 \in [0, 1].$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que

$$u_n \in [0, 1].$$

Comme $f(I) \subset I$, on a

$$f(u_n) \in [0, 1].$$

Or

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Donc

$$u_{n+1} \in [0, 1].$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1].}$$

2.b) Montrer que (u_n) est croissante.

Nous allons montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) \geq x.$$

Comme $f(x) \geq 0$ et $x \geq 0$, les deux membres sont positifs. On peut donc élever au carré sans changer le sens de l'inégalité :

$$f(x) \geq x \iff \frac{1+x}{2} \geq x^2.$$

On multiplie par $2 > 0$:

$$1+x \geq 2x^2.$$

Cela équivaut à

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

Factorisons :

$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1).$$

Pour $x \in [0, 1]$,

$$2x+1 > 0 \quad \text{et} \quad x-1 \leq 0.$$

Donc

$$(2x+1)(x-1) \leq 0.$$

Ainsi

$$f(x) \geq x \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'après la question 2.a, $u_n \in [0, 1]$. On peut donc appliquer cette propriété à $x = u_n$:

$$f(u_n) \geq u_n.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$, donc

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

De plus, d'après 2.a,

$$u_n \leq 1 \quad \forall n.$$

La suite est donc croissante et majorée. Par le théorème de convergence monotone,

$$(u_n) \text{ est convergente.}$$

Remarque importante. Ici, la donnée $u_0 = 1$ permet même d'aller plus vite :

$$u_1 = f(1) = 1.$$

Puis, si $u_n = 1$, alors $u_{n+1} = f(1) = 1$. Donc

$$u_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite est donc en réalité constante, et une suite constante est bien croissante au sens large.

Correction détaillée de l'Exercice 11 - fin

2.c) Calcul de la limite.

Puisque (u_n) converge, notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

D'après 2.a,

$$0 \leq u_n \leq 1,$$

donc nécessairement

$$\ell \in [0, 1].$$

La fonction $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ est continue sur $[0, 1]$. À partir de

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on peut donc passer à la limite :

$$\ell = f(\ell) = \sqrt{\frac{1+\ell}{2}}.$$

Comme $\ell \geq 0$, on peut élever au carré :

$$\ell^2 = \frac{1+\ell}{2}.$$

Donc

$$2\ell^2 = 1 + \ell,$$

puis

$$2\ell^2 - \ell - 1 = 0.$$

Factorisons :

$$2\ell^2 - \ell - 1 = (2\ell + 1)(\ell - 1).$$

Les deux solutions de l'équation sont

$$\ell = 1 \quad \text{ou} \quad \ell = -\frac{1}{2}.$$

Mais $\ell \in [0, 1]$, donc $-\frac{1}{2}$ est impossible. Ainsi

$$\boxed{\ell = 1.}$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

Cette conclusion est cohérente avec la remarque précédente : puisque $u_0 = 1$, on a en fait $u_n = 1$ pour tout n .

5. Bilan des résultats

Expression / suite	Résultat
2^n	$+\infty$
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0
$(-5)^n$	divergente
$(0, 7)^n$	0
$(\sqrt{2})^n$	$+\infty$
$(-2)^n$	divergente
4^{-n}	0
$\frac{5^n}{4^n}$	$+\infty$
$3^n - 2^{-n}$	$+\infty$
$\frac{3^n + 2^n}{2^n}$	$+\infty$
Activité $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, u_0 = 0$	$u_n = 2(1 - 2^{-n})$, limite 2
Exercice 11	$u_n = 1$ pour tout n , limite 1

Suites numériques

Exercices 12 et 13 - Suites adjacentes

Énoncés et corrections très détaillées

Exercice 12

Énoncé

Exercices 12 : Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{3x+2}{x+2}.$$

1. Étudier les variations de f et déterminer $f([0, 2])$.
- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0, 2]$.
- b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
- c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

1. Variations de f et détermination de $f([0, 2])$

La fonction est

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+2}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. En particulier, elle est bien définie sur l'intervalle $[0, 2]$.

Calculons sa dérivée. Pour $x \neq -2$, la règle de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+2) \cdot 1}{(x+2)^2}.$$

Développons le numérateur :

$$3(x+2) - (3x+2) = 3x+6 - 3x-2 = 4.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Pour tout $x \neq -2$, on a $(x+2)^2 > 0$ et $4 > 0$. Ainsi

$$f'(x) > 0.$$

En particulier, f est **strictement croissante** sur $[0, 2]$.

Puisque f est continue et croissante sur $[0, 2]$, l'image de l'intervalle est

$$f([0, 2]) = [f(0), f(2)].$$

Or

$$f(0) = \frac{2}{2} = 1, \quad f(2) = \frac{6+2}{2+2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Donc

$$f([0, 2]) = [1, 2].$$

En particulier,

$$f([0, 2]) \subset [0, 2].$$

2.a) Montrer que $u_n \in [0, 2]$ pour tout n

Nous raisonnons par récurrence.

Posons

$$P(n) : \quad u_n \in [0, 2].$$

Initialisation. On a $u_0 = 0$, donc

$$0 \in [0, 2].$$

Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$u_n \in [0, 2].$$

D'après la question 1,

$$f([0, 2]) \subset [0, 2].$$

Donc

$$f(u_n) \in [0, 2].$$

Or la relation de récurrence donne

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Ainsi

$$u_{n+1} \in [0, 2].$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2.}$$

2.b) Montrer que (u_n) est croissante puis convergente

Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n.$$

Mettons au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2}.$$

Développons :

$$3u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n = -u_n^2 + u_n + 2.$$

Factorisons le trinôme :

$$-u_n^2 + u_n + 2 = (2 - u_n)(u_n + 1).$$

Donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}}.$$

D'après la question 2.a,

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

Ainsi

$$2 - u_n \geq 0, \quad u_n + 1 > 0, \quad u_n + 2 > 0.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Donc

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et la suite (u_n) est croissante.

D'autre part, toujours d'après 2.a,

$$u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite est donc croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone,

$$(u_n) \text{ est convergente.}$$

2.c) Calcul de la limite

Puisque (u_n) converge, notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$, on a nécessairement

$$\ell \in [0, 2].$$

La fonction f est continue sur $[0, 2]$. En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on obtient

$$\ell = f(\ell) = \frac{3\ell + 2}{\ell + 2}.$$

Comme $\ell + 2 > 0$, on peut multiplier par $\ell + 2$:

$$\ell(\ell + 2) = 3\ell + 2.$$

Donc

$$\ell^2 + 2\ell = 3\ell + 2,$$

puis

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

Factorisons :

$$(\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Les solutions sont $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Mais $\ell \in [0, 2]$, donc $\ell = -1$ est impossible. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Conclusion

$$f([0, 2]) = [1, 2] \subset [0, 2], \quad 0 \leq u_n \leq 2,$$

(u_n) est croissante et convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

9) Les suites adjacentes - Activité

Énoncé

9) Les suites adjacentes :

Activité : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Les suites (u_n) et (v_n) sont appelées : **Suites adjacentes**.

Point de vigilance

L'énoncé écrit $v_n = u_n + \frac{1}{n n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cependant, pour $n = 0$, le terme $\frac{1}{n n!}$ n'est pas défini. Ainsi, la formule de v_n est mathématiquement exploitable à partir de $n \geq 1$. Nous conservons l'énoncé tel qu'il est donné et menons l'étude de (v_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Monotonie de (u_n)

Pour $n \geq 0$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ainsi

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

1. Monotonie de (v_n)

Pour $n \geq 1$,

$$v_n = u_n + \frac{1}{n n!}.$$

Calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n n!} \right).$$

Or

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!}.$$

Utilisons $(n+1)! = (n+1)n!$:

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$

Alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{n n!}.$$

Avec le dénominateur commun $n(n+1)^2 n!$, le numérateur devient

$$n(n+1) + n - (n+1)^2 = -1.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2 n!} < 0.$$

Donc

$$(v_n)_{n \geq 1} \text{ est strictement décroissante.}$$

2. Montrer que $v_n > u_n$

Pour tout $n \geq 1$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n n!}.$$

Or $n > 0$ et $n! > 0$, donc

$$\frac{1}{n n!} > 0.$$

Ainsi

$$v_n > u_n \quad \forall n \geq 1.$$

3. Convergence et limite commune

Nous avons établi :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $u_n < v_n$ pour tout $n \geq 1$.

De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n n!}.$$

Comme $n! \geq 1$ pour $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n n!} \leq \frac{1}{n}.$$

Et

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$v_n - u_n \longrightarrow 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite.

Conclusion

$$(u_n) \text{ est croissante, } (v_n) \text{ est décroissante, } v_n - u_n \rightarrow 0.$$

Par conséquent (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc convergentes et de même limite.

Exercice 13

Énoncé

Exercice 13 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad v_0 = b \quad \text{avec} \quad 0 < a < b < 2a,$$

$$u_n v_n = ab \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

- b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n).$$

- c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Préliminaire : expression de u_{n+1}

La relation

$$u_n v_n = ab$$

est vraie à tout rang. Ainsi

$$u_{n+1} v_{n+1} = ab = u_n v_n.$$

Comme les termes seront positifs, on pourra écrire

$$u_{n+1} = \frac{ab}{v_{n+1}} = \frac{u_n v_n}{v_{n+1}}.$$

1. Montrer que $0 < u_n < v_n$ pour tout n

Nous raisonnons par récurrence.

Posons

$$P(n) : \quad 0 < u_n < v_n.$$

Initialisation. Par hypothèse,

$$0 < a < b.$$

Comme $u_0 = a$ et $v_0 = b$, on a

$$0 < u_0 < v_0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons

$$0 < u_n < v_n.$$

Alors la moyenne arithmétique de u_n et v_n vérifie

$$u_n < \frac{u_n + v_n}{2} < v_n.$$

Or

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Donc

$$u_n < v_{n+1} < v_n.$$

En particulier, $v_{n+1} > 0$. Comme $ab > 0$,

$$u_{n+1} = \frac{ab}{v_{n+1}} > 0.$$

Il reste à montrer $u_{n+1} < v_{n+1}$. Cela équivaut, puisque $v_{n+1} > 0$, à

$$ab < v_{n+1}^2.$$

Or $ab = u_n v_n$ et

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Par l'identité

$$\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 - u_n v_n = \frac{(v_n - u_n)^2}{4} > 0$$

(car $u_n \neq v_n$), on obtient

$$v_{n+1}^2 > u_n v_n = ab.$$

Donc

$$u_{n+1} < v_{n+1}.$$

Finalement

$$0 < u_{n+1} < v_{n+1}.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < v_n.}$$

2. Monotonie de (u_n) et (v_n)

D'après la question précédente,

$$u_n < v_n.$$

Pour v_n ,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} < \frac{v_n + v_n}{2} = v_n.$$

Donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Pour u_n , utilisons le produit constant :

$$u_{n+1} = \frac{ab}{v_{n+1}}, \quad u_n = \frac{ab}{v_n}.$$

Comme

$$0 < v_{n+1} < v_n$$

et $ab > 0$, le passage aux inverses donne

$$\frac{1}{v_{n+1}} > \frac{1}{v_n}.$$

En multipliant par $ab > 0$,

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3.a) Montrer l'inégalité sur l'écart

Nous allons calculer exactement $v_{n+1} - u_{n+1}$.

On a

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

et

$$u_{n+1} = \frac{u_n v_n}{v_{n+1}}.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_{n+1} - \frac{u_n v_n}{v_{n+1}} = \frac{v_{n+1}^2 - u_n v_n}{v_{n+1}}.$$

Or

$$v_{n+1}^2 - u_n v_n = \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 - u_n v_n = \frac{(v_n - u_n)^2}{4}.$$

Et

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Donc

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

Puisque $u_n > 0$ et $v_n > u_n$, on a

$$0 < v_n - u_n < u_n + v_n.$$

En divisant par $u_n + v_n > 0$,

$$0 < \frac{v_n - u_n}{u_n + v_n} < 1.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \frac{v_n - u_n}{u_n + v_n} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n).}$$

3.b) Limite de $v_n - u_n$

Posons

$$d_n = v_n - u_n > 0.$$

La question précédente donne

$$0 < d_{n+1} < \frac{1}{2}d_n.$$

En itérant,

$$0 < d_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0.$$

Or

$$d_0 = v_0 - u_0 = b - a > 0.$$

Donc

$$0 < v_n - u_n < (b - a) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

3.c) Montrer que les deux suites sont adjacentes

Nous avons montré :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Par définition,

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Elles convergent donc vers une même limite.

4. Déterminer les deux limites

Notons ℓ leur limite commune :

$$u_n \rightarrow \ell, \quad v_n \rightarrow \ell.$$

La relation

$$u_n v_n = ab$$

est vraie pour tout n . En passant à la limite,

$$\ell \cdot \ell = ab.$$

Donc

$$\ell^2 = ab.$$

Comme tous les termes sont positifs, $\ell \geq 0$. Puisque $ab > 0$, $\ell > 0$. Ainsi

$$\ell = \sqrt{ab}.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{ab}.$$

Conclusion

$$0 < u_n < v_n,$$

(u_n) est strictement croissante, (v_n) strictement décroissante,

$$v_n - u_n \rightarrow 0,$$

donc les deux suites sont adjacentes et

$$u_n \rightarrow \sqrt{ab}, \quad v_n \rightarrow \sqrt{ab}.$$

Exemple - Deux suites adjacentes

Énoncé

Exemple : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

1. Monotonie de (u_n)

On a

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}.$$

Alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0.$$

Ainsi

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

1. Monotonie de (v_n)

Pour $n \geq 1$,

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right).$$

Comme

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3},$$

on obtient

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Or

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}.$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Au même dénominateur $n(n+1)^3$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n - (n+1)^2}{n(n+1)^3}.$$

Or

$$n - (n+1)^2 = n - (n^2 + 2n + 1) = -(n^2 + n + 1) < 0.$$

Par conséquent,

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^3} < 0.$$

Donc

$$(v_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

2. Convergence et limite commune

On a immédiatement

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} > 0.$$

Donc

$$u_n < v_n.$$

De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes,

(u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Méthode à retenir

Pour montrer que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, on vérifie généralement trois points :

1. (u_n) est croissante ;
2. (v_n) est décroissante ;
3. $v_n - u_n \rightarrow 0$.

On en déduit automatiquement qu'elles convergent vers la même limite.

Bilan général

Situation	Résultat essentiel
Exercice 12	(u_n) croissante, $0 \leq u_n \leq 2$, et $u_n \rightarrow 2$.
Activité adjacente avec $\sum 1/k!$	(u_n) croissante, (v_n) décroissante, $v_n - u_n \rightarrow 0$.
Exercice 13	(u_n) et (v_n) adjacentes, limite commune $\sqrt{ab}$.
Exemple $\sum 1/k^3$	(u_n) et (v_n) adjacentes, donc convergentes vers la même limite.

Suites numériques – Exercices 14 à 17

Énoncés complets et corrections très détaillées

Exercice 14 – Suites adjacentes construites avec des racines

Énoncé

Exercice 14 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
- 2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

1) Monotonie de (u_n)

On compare deux termes consécutifs. Pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}). \end{aligned}$$

Rationalisons la différence de racines :

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Or $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} > 0$, donc

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1}.$$

Les quantités étant positives, le passage aux inverses renverse le sens :

$$\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}.$$

Donc (u_n) est **strictement croissante**.

1) Monotonie de (v_n)

De même,

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, donc

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}.$$

En prenant les inverses,

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_{n+1} - v_n < 0},$$

et (v_n) est **strictement décroissante**.

2) Comparaison de u_n et v_n

Calculons leur écart :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ &= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{v_n - u_n > 0}, \quad \text{ainsi } \boxed{u_n < v_n}.$$

De plus,

$$0 < v_n - u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$. Par encadrement,

$$\boxed{v_n - u_n \rightarrow 0}.$$

Idée essentielle

Nous avons exactement les trois ingrédients du théorème des suites adjacentes :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

vn > un est un résultat de ces trois conditions satisfaites à la fois!!

Le théorème des suites adjacentes donne donc que les deux suites convergent vers une même limite ℓ :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell}.$$

L'énoncé ne demande pas de calculer explicitement ℓ .

Exercice 15 – Sous-suites paires et impaires d’une série alternée

Énoncé

Exercice 15 : Soit les suites numériques (x_n) , (u_n) et (v_n) définies par :

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad u_n = x_{2n}, \quad v_n = x_{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

1) Étude de (u_n)

On a

$$u_n = x_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Alors

$$u_{n+1} = x_{2n+2} = u_n + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+2)^2}.$$

Comme $2n+1 < 2n+2$, on a

$$(2n+1)^2 < (2n+2)^2$$

et donc

$$\frac{1}{(2n+1)^2} > \frac{1}{(2n+2)^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n > 0},$$

donc (u_n) est strictement croissante.

2) Étude de (v_n)

De même,

$$v_n = x_{2n+1}.$$

Entre x_{2n+1} et x_{2n+3} , on ajoute les termes d’indices $2n+2$ et $2n+3$:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Donc

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Comme $2n+2 < 2n+3$,

$$\frac{1}{(2n+2)^2} > \frac{1}{(2n+3)^2},$$

d’où

$$\boxed{v_{n+1} - v_n < 0}.$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

3) Écart entre les deux suites

Comme $v_n = x_{2n+1}$ et $u_n = x_{2n}$, le seul terme supplémentaire est celui d'indice $2n + 1$, qui est positif :

$$v_n - u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} > 0.$$

Ainsi,

$$u_n < v_n.$$

De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} \rightarrow 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Par conséquent elles sont convergentes et ont la même limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Conclusion

La convergence de la suite complète (x_n) peut alors également être déduite, puisque ses sous-suites d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite.

Exercice 16 – Suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$

Énoncé

Exercice 16 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) On pose :

$$\alpha_n = u_{2n+1} \quad \text{et} \quad \beta_n = u_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante.

b) Montrer que : $\alpha_n \leq \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$$

4) Montrer que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

1) Variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Sa dérivée est

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Comme $(x+1)^2 > 0$,

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \forall x \geq 0}.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Cherchons son unique point fixe positif. On résout

$$f(x) = x \iff \frac{1}{x+1} = x \iff x^2 + x - 1 = 0.$$

Les solutions sont

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La seule solution positive est

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

On a $f(r) = r$ et

$$\frac{1}{2} < r < 1.$$

2a) Monotonie des sous-suites (α_n) et (β_n)

Comme f est décroissante et $u_0 = 1 > r$, on a

$$u_1 = f(u_0) < f(r) = r.$$

Puis, puisque $u_1 < r$ et f est décroissante,

$$u_2 = f(u_1) > f(r) = r.$$

En répétant ce raisonnement, on obtient par récurrence l'alternance

$$\boxed{u_{2n+1} < r < u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}.$$

Introduisons la fonction composée

$$g = f \circ f.$$

Pour $x \geq 0$,

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Alors

$$g(x) - x = \frac{x+1 - x(x+2)}{x+2} = \frac{1-x-x^2}{x+2}.$$

Or $1-x-x^2$ s'annule en r et est positif sur $[0, r[$, négatif sur $]r, +\infty[$. Donc

$$x < r \Rightarrow g(x) > x, \quad x > r \Rightarrow g(x) < x.$$

Mais

$$\alpha_{n+1} = u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) = g(\alpha_n).$$

Comme $\alpha_n < r$,

$$\boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n}.$$

Donc (α_n) est strictement croissante.

De même,

$$\beta_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(\beta_n).$$

Comme $\beta_n > r$,

$$\boxed{\beta_{n+1} < \beta_n}.$$

Donc (β_n) est strictement décroissante.

2b) Comparaison $\alpha_n \leq \beta_n$

L'encadrement précédent donne directement

$$\alpha_n < r < \beta_n.$$

Donc, a fortiori,

$$\boxed{\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}}.$$

3) Encadrement $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Nous procédons par récurrence.

Initialisation. $u_0 = 1$, donc

$$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1.$$

Hérédité. Supposons

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$$

Alors

$$\frac{3}{2} \leq u_n + 1 \leq 2.$$

Toutes les quantités étant positives, on peut prendre les inverses en renversant l'ordre :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{2}{3}.$$

Or

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1.$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.}$$

4) Montrer $|u_{n+1} - u_n| \leq 1/n$

Pour $n \geq 1$, utilisons la relation de récurrence à deux rangs consécutifs :

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}, \quad u_n = \frac{1}{u_{n-1} + 1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= \left| \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n-1} + 1} \right| \\ &= \frac{|u_n - u_{n-1}|}{(u_n + 1)(u_{n-1} + 1)}. \end{aligned}$$

D'après la question 3,

$$u_n \geq \frac{1}{2}, \quad u_{n-1} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$(u_n + 1)(u_{n-1} + 1) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Par conséquent,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9} |u_n - u_{n-1}|.$$

En itérant,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_2 - u_1|.$$

Or $u_1 = 1/2$ et $u_2 = 2/3$, donc

$$|u_2 - u_1| = \frac{1}{6}.$$

On obtient même

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Cette estimation est plus forte que celle demandée. Montrons qu'elle implique $\leq 1/n$. Pour $n = 1$, $1/6 \leq 1$. Si

$$\frac{1}{6} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n},$$

alors

$$\frac{1}{6} \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \frac{4}{9n} \leq \frac{1}{n+1},$$

car $4(n+1) \leq 9n$ pour $n \geq 1$. Donc, par récurrence,

$$\boxed{|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).}$$

5) Convergence et limite de (u_n)

Les sous-suites (α_n) et (β_n) vérifient :

- (α_n) est croissante ;
- (β_n) est décroissante ;
- $\alpha_n \leq \beta_n$.

De plus,

$$0 \leq \beta_n - \alpha_n = u_{2n} - u_{2n+1} = |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0.$$

Elles sont donc adjacentes, et convergent vers une même limite ℓ . Comme les termes pairs et impairs de (u_n) convergent tous vers ℓ , la suite entière (u_n) converge vers ℓ .

En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1},$$

on obtient

$$\ell = \frac{1}{\ell + 1}.$$

Donc

$$\ell^2 + \ell - 1 = 0.$$

Comme $\ell \geq 1/2 > 0$, on retient la racine positive :

$$\ell = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

C'est quand même l'exercice le plus difficile de la série, refais le en clarifiant au mieux toutes les étapes et afin que la rédaction soit la plus fluide possible (du point de vue logique)!

Exercice 17 – Suite récurrente et suite auxiliaire

Énoncé

Exercice 17 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{12u_n}{9 + u_n^4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}.$$

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Et en déduire sa convergence et sa limite.

2) On pose :

$$v_n = \frac{u_n}{n!} + \sqrt{\sqrt{3}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{9 + u_n^4} \leq \frac{1}{5},$$

et en déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Posons, pour alléger les écritures,

$$a = \sqrt{\sqrt{3}} = 3^{1/4}.$$

Alors $a^4 = 3$.

1a) Montrer $1 \leq u_n \leq a$

Considérons

$$f(x) = \frac{12x}{9 + x^4}.$$

La suite vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur $[1, a]$,

$$f'(x) = \frac{12(9 + x^4) - 48x^4}{(9 + x^4)^2} = \frac{36(3 - x^4)}{(9 + x^4)^2}.$$

Comme $x \leq a$ implique $x^4 \leq 3$,

$$f'(x) \geq 0.$$

Donc f est croissante sur $[1, a]$. Par conséquent,

$$f(1) \leq f(x) \leq f(a).$$

Or

$$f(1) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} > 1$$

et

$$f(a) = \frac{12a}{9 + a^4} = \frac{12a}{12} = a.$$

Ainsi,

$$1 < f(x) \leq a \quad \forall x \in [1, a].$$

En particulier, $f([1, a]) \subset [1, a]$.

Procédons par récurrence. Initialement,

$$u_1 = 1 \in [1, a].$$

Si $u_n \in [1, a]$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [1, a].$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 1 \leq u_n \leq a = \sqrt{\sqrt{3}}}.$$

1b) Monotonie, convergence et limite

Calculons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{12u_n}{9 + u_n^4} - u_n \\ &= u_n \left(\frac{12 - (9 + u_n^4)}{9 + u_n^4} \right) \\ &= \frac{u_n(3 - u_n^4)}{9 + u_n^4}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$u_n \geq 1 > 0, \quad u_n^4 \leq a^4 = 3.$$

Donc

$$3 - u_n^4 \geq 0,$$

et ainsi

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \geq 0}.$$

La suite (u_n) est croissante. Elle est majorée par a , donc elle converge.

Notons ℓ sa limite. Comme $1 \leq u_n \leq a$, on a $\ell \geq 1 > 0$. En passant à la limite :

$$\ell = \frac{12\ell}{9 + \ell^4}.$$

Comme $\ell > 0$, on divise par ℓ :

$$1 = \frac{12}{9 + \ell^4}.$$

Donc

$$9 + \ell^4 = 12,$$

d'où

$$\ell^4 = 3.$$

La limite étant positive,

$$\boxed{\ell = 3^{1/4} = \sqrt{\sqrt{3}}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{\sqrt{3}}}.$$

2a) Inégalité et monotonie de (v_n)

D'après $u_n \geq 1$,

$$u_n^4 \geq 1.$$

Donc

$$9 + u_n^4 \geq 10.$$

Les deux membres étant positifs,

$$\frac{1}{9 + u_n^4} \leq \frac{1}{10}.$$

En multipliant par 2,

$$\boxed{\frac{2}{9 + u_n^4} \leq \frac{1}{5}}.$$

Calculons maintenant $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{u_n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{u_{n+1}}{n+1} - u_n \right). \end{aligned}$$

En remplaçant u_{n+1} :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{n!} \left(\frac{12}{(n+1)(9 + u_n^4)} - 1 \right).$$

Or

$$\frac{12}{(n+1)(9 + u_n^4)} = \frac{6}{n+1} \cdot \frac{2}{9 + u_n^4} \leq \frac{6}{5(n+1)}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$\frac{6}{5(n+1)} \leq \frac{3}{5} < 1.$$

Donc le facteur entre parenthèses est strictement négatif. Comme $u_n/n! > 0$,

$$\boxed{v_{n+1} - v_n < 0}.$$

Ainsi (v_n) est strictement décroissante.

2b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Nous savons déjà que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

Comparons-les :

$$v_n - u_n = a + \frac{u_n}{n!} - u_n = (a - u_n) + \frac{u_n}{n!}.$$

Or $u_n \leq a$ et $u_n > 0$. Donc

$$a - u_n \geq 0, \quad \frac{u_n}{n!} > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n - u_n > 0},$$

donc $u_n < v_n$.

Enfin, puisque $u_n \rightarrow a$,

$$a - u_n \rightarrow 0.$$

Et comme $0 < u_n \leq a$,

$$0 < \frac{u_n}{n!} \leq \frac{a}{n!} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$v_n - u_n = (a - u_n) + \frac{u_n}{n!} \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc :

- (u_n) croissante ;
- (v_n) décroissante ;
- $u_n \leq v_n$;
- $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Conclusion

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sqrt{\sqrt{3}}.$$