

Exercice 1 (**) - Correction détaillée

Suites numériques : vrai ou faux ?

Énoncé

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Correction détaillée

Rappel utile

Pour réfuter une affirmation universelle, il suffit de donner **un contre-exemple**. Pour prouver qu'elle est vraie, il faut partir des hypothèses et montrer rigoureusement la conclusion.

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

Réponse : VRAI.

Dire que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang signifie qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi, dans la partie de la suite située à partir du rang N ,

$$u_n \geq u_N \quad (n \geq N).$$

Donc toute la "queue" de la suite est minorée par u_N .

Il reste seulement les termes précédents

$$u_0, u_1, \dots, u_{N-1},$$

qui sont en nombre fini. Un ensemble fini de nombres réels possède un minimum. Posons donc

$$m = \min\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N\}.$$

Alors :

- si $n < N$, on a $u_n \geq m$ par définition de m ;
- si $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N \geq m$.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

La suite est donc minorée.

Conclusion : VRAI. Une suite croissante à partir d'un certain rang possède bien un minorant.

2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.

Réponse : FAUX.

Le chemin le plus court consiste à chercher une suite qui converge tout en oscillant indéfiniment. Prenons

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a

$$|u_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc

$$u_n \rightarrow 0.$$

La suite est donc convergente.

Mais ses termes changent de signe à chaque rang :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k+1} > 0, \quad u_{2k+1} = -\frac{1}{2k+2} < 0.$$

Par conséquent, elle continue à monter puis à descendre, quel que soit le rang à partir duquel on l'observe. Elle n'est donc ni croissante ni décroissante à partir d'un certain rang.

Conclusion : FAUX. Converger n'oblige pas une suite à devenir monotone.

3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.

Réponse : FAUX.

Aller vers $+\infty$ signifie que les termes deviennent finalement aussi grands que l'on veut. Cela n'interdit pas de faire encore de petites descentes de temps en temps.

Considérons

$$u_n = n + (-1)^n.$$

Comme $(-1)^n \geq -1$, on a

$$u_n = n + (-1)^n \geq n - 1.$$

Or

$$n - 1 \longrightarrow +\infty.$$

Donc, par comparaison,

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

Étudions maintenant la variation entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = (n + 1 + (-1)^{n+1}) - (n + (-1)^n).$$

Comme $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 2(-1)^n.$$

Si n est pair, $(-1)^n = 1$, donc

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Il y a donc une baisse pour tout rang pair, et il existe des rangs pairs arbitrairement grands. La suite ne peut donc jamais devenir croissante à partir d'un certain rang.

Conclusion : FAUX. Une suite peut tendre vers $+\infty$ tout en continuant à osciller.

4. Si (u_n) est croissante et $u_n \geq v_n$ pour tout n , alors (v_n) est croissante.

Réponse : FAUX.

L'inégalité $u_n \geq v_n$ compare les deux suites *au même rang*. Elle ne donne aucune comparaison entre v_n et v_{n+1} , qui est précisément ce qu'il faudrait pour démontrer que (v_n) est croissante.

Un contre-exemple très simple est

$$u_n = n + 1, \quad v_n = (-1)^n.$$

La suite (u_n) est strictement croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = (n + 2) - (n + 1) = 1 > 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad u_n = n + 1 \geq 1,$$

donc

$$u_n \geq v_n.$$

Pourtant (v_n) alterne entre 1 et -1 : elle n'est pas croissante.

Conclusion : FAUX. Être située sous une suite croissante ne suffit pas pour être croissante.

5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.**Réponse : FAUX.**

Le contre-exemple immédiat est

$$u_n = (-1)^n.$$

Alors

$$|u_n| = 1$$

pour tout n . Donc la suite $(|u_n|)$ est constante, et par conséquent

$$|u_n| \longrightarrow 1.$$

En revanche,

$$u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1.$$

Les termes pairs tendent vers 1 tandis que les termes impairs tendent vers -1 . La suite (u_n) ne peut donc pas avoir une limite unique.**Conclusion : FAUX.** La convergence de $(|u_n|)$ vers une limite positive ne contrôle pas les changements de signe de (u_n) .**6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.****Réponse : VRAI.**Pour tout réel x , on a

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

En prenant $x = u_n$,

$$-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|.$$

Or, par hypothèse,

$$|u_n| \longrightarrow 0.$$

Donc également

$$-|u_n| \longrightarrow 0.$$

Ainsi, u_n est encadré entre deux suites qui tendent toutes les deux vers 0. D'après le théorème des gendarmes,

$$u_n \longrightarrow 0.$$

On peut aussi le voir directement avec la définition : si $|u_n| \rightarrow 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$n \geq N \implies |u_n| < \varepsilon,$$

ce qui est exactement la définition de $u_n \rightarrow 0$.**Conclusion : VRAI.** Plus précisément, (u_n) converge vers 0.

Bilan final

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	Vrai	Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai

Idées à retenir : une suite peut converger tout en oscillant ; une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être finalement croissante ; une comparaison $u_n \geq v_n$ ne transmet pas la monotonie ; enfin, la convergence de $|u_n|$ vers 0 est équivalente à la convergence de u_n vers 0.

Exercice 2 (* à **)

Étude de convergence de suites

Énoncé

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

$$\bullet u_n = 2^n - 3^n + 4^n$$

$$\bullet u_n = (-n + 2)e^{-n}$$

$$\bullet u_n = 2^n - e^{2n} + 1$$

$$\bullet u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$$

$$\bullet u_n = \ln n + e^{-3n}$$

$$\bullet u_n = \frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$$

$$\bullet u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$$

$$\bullet u_n = \frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$$

$$\bullet u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

Idée générale. Pour aller au plus court, on repère à chaque fois le terme dominant. Pour les différences contenant une racine, on rationalise. Pour les quotients polynomiaux, on divise par la plus grande puissance de n . Pour les expressions exponentielles, on factorise par l'exponentielle dominante.

Correction détaillée

1. $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$

Les trois termes sont exponentiels. Comme 4^n est le terme de croissance la plus rapide, la méthode la plus naturelle consiste à le mettre en facteur :

$$u_n = 4^n \left(\frac{2^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} + 1 \right) = 4^n \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1 \right].$$

Or

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0, \quad \left(\frac{3}{4} \right)^n \rightarrow 0,$$

car ce sont des suites géométriques de raison de valeur absolue strictement inférieure à 1. Ainsi,

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1 \rightarrow 1.$$

En particulier, le facteur entre crochets est positif et proche de 1 à partir d'un certain rang, tandis que

$$4^n \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{u_n \rightarrow +\infty.}$$

La suite ne converge donc pas vers un réel : elle diverge vers $+\infty$.

2. $u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$

Le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de même degré 2. La méthode la plus rapide est de diviser le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$u_n = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} - \frac{34}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \rightarrow 1, \quad 2 + \frac{5}{n} - \frac{34}{n^2} \rightarrow 2.$$

Comme la limite du dénominateur est non nulle, on peut passer à la limite dans le quotient :

$$\boxed{u_n \rightarrow \frac{1}{2}.$$

La suite est donc convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

3. $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$

Si l'on remplace naïvement n par $+\infty$, on obtient une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$. La bonne méthode consiste à **rationaliser** :

$$u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n.$$

On multiplie et on divise par l'expression conjuguée $\sqrt{n^2 - 1} + n$:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - n)(\sqrt{n^2 - 1} + n)}{\sqrt{n^2 - 1} + n}.$$

Au numérateur, on utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$(n^2 - 1) - n^2 = -1.$$

Ainsi,

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1} + n}.$$

Or le dénominateur tend vers $+\infty$, donc son inverse tend vers 0 :

$$\boxed{u_n \rightarrow 0.}$$

Plus précisément, $u_n < 0$ pour $n \geq 1$, donc la suite tend vers 0 par valeurs négatives.

4. $u_n = (-n + 2)e^{-n}$

On écrit d'abord l'exponentielle négative sous forme de quotient :

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}.$$

Donc

$$u_n = \frac{-n + 2}{e^n} = -\frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n}.$$

On utilise la croissance comparée classique : l'exponentielle e^n croît plus vite que toute puissance de n , en particulier plus vite que n . Ainsi,

$$\frac{n}{e^n} \rightarrow 0.$$

De plus,

$$\frac{2}{e^n} = 2e^{-n} \rightarrow 0.$$

Par somme,

$$\boxed{u_n \rightarrow 0.}$$

La suite est donc convergente de limite 0. Pour $n > 2$, $-n + 2 < 0$, donc elle tend vers 0 par valeurs négatives.

5. $u_n = \ln n + e^{-3n}$

On étudie séparément les deux termes :

$$\ln n \longrightarrow +\infty$$

et

$$e^{-3n} = \frac{1}{e^{3n}} \longrightarrow 0.$$

Ajouter un terme qui tend vers 0 à un terme qui tend vers $+\infty$ ne change pas la divergence vers $+\infty$.
Donc

$$\boxed{u_n \longrightarrow +\infty.}$$

La suite diverge vers $+\infty$.

6. $u_n = \frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$

La présence de deux factorielles proches suggère immédiatement de simplifier :

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n!.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(n+2)(n+1)n!}{(n^2+1)n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{n^2+1}.$$

On développe seulement si nécessaire :

$$(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2,$$

d'où

$$u_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}.$$

On divise maintenant par n^2 :

$$u_n = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, tous les termes en $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0. Donc

$$\boxed{u_n \longrightarrow 1.}$$

La suite est convergente de limite 1.

7. $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$

On remarque que

$$e^{2n} = (e^2)^n.$$

Comme $e^2 > 2$, le terme e^{2n} domine 2^n . Pour le montrer proprement et rapidement, on factorise par e^{2n} :

$$u_n = e^{2n} \left(\frac{2^n}{e^{2n}} - 1 + \frac{1}{e^{2n}} \right).$$

Or

$$\frac{2^n}{e^{2n}} = \left(\frac{2}{e^2} \right)^n \longrightarrow 0$$

car $0 < \frac{2}{e^2} < 1$, et

$$\frac{1}{e^{2n}} = e^{-2n} \longrightarrow 0.$$

Le facteur entre parenthèses tend donc vers

$$0 - 1 + 0 = -1.$$

Comme $e^{2n} \rightarrow +\infty$ et que le second facteur tend vers un nombre strictement négatif, on obtient

$$u_n \longrightarrow -\infty.$$

La suite diverge vers $-\infty$.

$$8. u_n = \frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$$

Commençons par simplifier le logarithme du dénominateur. Pour $n > 0$,

$$\ln(n^3) = 3 \ln n.$$

Donc

$$u_n = \frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{3 \ln n - 3n + 2}.$$

Le terme dominant du dénominateur est $-3n$. Le chemin le plus court consiste donc à diviser tout le quotient par n :

$$u_n = \frac{\frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{3 \ln n}{n} - \frac{5}{n}}{\frac{3 \ln n}{n} - 3 + \frac{2}{n}}.$$

Or

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0, \quad \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0, \quad \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, le numérateur tend vers 0, tandis que le dénominateur tend vers -3 . Comme $-3 \neq 0$, on peut passer à la limite dans le quotient :

$$u_n \longrightarrow 0.$$

La suite est convergente de limite 0. On peut même remarquer que, pour n grand, le numérateur est positif et le dénominateur négatif : la limite 0 est donc atteinte par valeurs négatives.

$$9. u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$$

On traite séparément les deux termes.

D'abord,

$$-\frac{1}{2n} \longrightarrow 0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle,

$$e^{-\frac{1}{2n}} \longrightarrow e^0 = 1.$$

Ensuite,

$$\frac{n}{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \longrightarrow 1.$$

La fonction $\ln$ étant continue sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\ln\left(\frac{n}{n+2}\right) \longrightarrow \ln(1) = 0.$$

Finalement, par somme,

$$u_n \longrightarrow 1.$$

La suite est donc convergente de limite 1.

Bilan

N°	Suite	Limite
1	$2^n - 3^n + 4^n$	$+\infty$
2	$\frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$	$\frac{1}{2}$
3	$\sqrt{n^2 - 1} - n$	0
4	$(-n + 2)e^{-n}$	0
5	$\ln n + e^{-3n}$	$+\infty$
6	$\frac{(n+2)!}{(n^2+1)n!}$	1
7	$2^n - e^{2n} + 1$	$-\infty$
8	$\frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$	0
9	$e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$	1

Réflexes à retenir.

- Différence avec une racine : penser au conjugué.
- Quotient de polynômes : diviser par la plus grande puissance de n .
- Somme d'exponentielles : factoriser par l'exponentielle dominante.
- Factorielle : développer seulement les quelques facteurs nécessaires.
- Pour $n \rightarrow +\infty$, on utilise notamment $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{n}{e^n} \rightarrow 0$.

Exercice 3 (**)

Énoncé

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^2 \geq 2n + u_0^2.$$

En déduire la limite de la suite.

Correction détaillée

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs

La relation de récurrence contient le quotient $\frac{1}{u_n}$. Il est donc essentiel de savoir que $u_n \neq 0$ pour tout n . La façon la plus naturelle de le prouver est une récurrence.

Idée / méthode la plus directe

On montre la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_n > 0.$$

Si un terme u_n est strictement positif, alors $\frac{1}{u_n}$ est lui aussi strictement positif, donc leur somme est strictement positive.

Initialisation. Par hypothèse,

$$u_0 > 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_n > 0.$$

Alors

$$\frac{1}{u_n} > 0.$$

Or, d'après la définition de la suite,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

C'est la somme de deux nombres strictement positifs. Par conséquent,

$$u_{n+1} > 0.$$

Donc $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion de la récurrence. La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. On obtient donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.}$$

Cette conclusion garantit en particulier que le terme $\frac{1}{u_n}$ est bien défini à chaque rang.

2. Déterminer la monotonie de (u_n)

Pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence, le réflexe le plus simple est de calculer

$$u_{n+1} - u_n.$$

D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n \\ &= \frac{1}{u_n}. \end{aligned}$$

D'après la question 1, $u_n > 0$ pour tout n . Ainsi,

$$\frac{1}{u_n} > 0.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n > 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

Conclusion

La suite (u_n) est **strictement croissante** :

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Attention. Le seul fait qu'une suite soit croissante ne permet pas encore d'affirmer qu'elle tend vers $+\infty$: une suite croissante peut être majorée et converger vers une limite finie. C'est précisément la question 3 qui va montrer ici que les termes deviennent arbitrairement grands.

3. Montrer que $u_n^2 \geq 2n + u_0^2$ puis déterminer la limite

Étape 1 : faire apparaître l'inégalité fondamentale

La relation

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

contient à la fois u_n et son inverse. Comme l'inégalité demandée porte sur u_n^2 , l'idée la plus directe consiste à **élever la relation au carré**.

Puisque $u_n \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &= \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 \\ &= u_n^2 + 2u_n \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2} \\ &= u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{u_n^2} > 0.$$

Donc, en particulier,

$$\boxed{u_{n+1}^2 \geq u_n^2 + 2.}$$

C'est exactement cette inégalité qui permet de gagner au moins 2 à chaque passage du rang n au rang $n + 1$.

Étape 2 : démonstration par récurrence

Montrons maintenant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \geq 2n + u_0^2.$$

Posons

$$\mathcal{Q}(n) : \quad u_n^2 \geq 2n + u_0^2.$$

Initialisation au rang $n = 0$. On a

$$u_0^2 = 2 \times 0 + u_0^2.$$

Donc

$$u_0^2 \geq 2 \times 0 + u_0^2.$$

La propriété $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ; on a même l'égalité.

Hérédité. Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^2 \geq 2n + u_0^2.$$

Nous avons montré précédemment que

$$u_{n+1}^2 \geq u_n^2 + 2.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &\geq u_n^2 + 2 \\ &\geq (2n + u_0^2) + 2 \\ &= 2n + 2 + u_0^2 \\ &= 2(n + 1) + u_0^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1}^2 \geq 2(n+1) + u_0^2.$$

La propriété $\mathcal{Q}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion de la récurrence. On a démontré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \geq 2n + u_0^2.}$$

Étape 3 : en déduire une minoration de u_n

D'après la question 1,

$$u_n > 0.$$

De plus,

$$2n + u_0^2 > 0.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0, +\infty[$, l'inégalité

$$u_n^2 \geq 2n + u_0^2$$

donne

$$|u_n| \geq \sqrt{2n + u_0^2}.$$

Mais $u_n > 0$, donc $|u_n| = u_n$. Ainsi

$$\boxed{u_n \geq \sqrt{2n + u_0^2}.}$$

Étape 4 : passage à la limite

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$2n + u_0^2 \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\sqrt{2n + u_0^2} \longrightarrow +\infty.$$

Or, pour tout n ,

$$u_n \geq \sqrt{2n + u_0^2}.$$

Ainsi, u_n est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$. Par le théorème de comparaison,

$$\boxed{u_n \longrightarrow +\infty.}$$

Conclusion

Les trois résultats essentiels sont

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0,}$$

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante,}}$$

et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \geq 2n + u_0^2 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

La méthode la plus courte à retenir

Une fois la positivité établie, toute la résolution tient dans les deux calculs suivants :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0,$$

donc (u_n) est strictement croissante, puis

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq u_n^2 + 2.$$

En répétant cette augmentation d'au moins 2 sur les carrés, on obtient

$$u_n^2 \geq u_0^2 + 2n,$$

puis, puisque $u_n > 0$,

$$u_n \geq \sqrt{u_0^2 + 2n} \longrightarrow +\infty.$$

Exercice 4 (*)**

Somme de factorielles et encadrement

ÉnoncéOn définit une suite (u_n) par

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} k!$$

(je rappelle que par convention $0! = 1$). Montrer à l'aide d'un encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1.$$

Correction détaillée

Par définition,

$$u_n = \sum_{k=0}^n k! = 0! + 1! + 2! + \cdots + (n-1)! + n!.$$

Nous voulons étudier

$$\frac{u_n}{n!}.$$

Idée essentielle

Le terme le plus grand de la somme est $n!$. Il est donc naturel de l'isoler. Ensuite, on isole $(n-1)!$, puis on majore tous les termes qui restent par $(n-2)!$. Cette méthode fournit immédiatement un encadrement dont les deux bornes tendent vers 1.

1. MinorationTous les termes $k!$ sont strictement positifs. En particulier,

$$u_n = 0! + 1! + \cdots + (n-1)! + n! \geq n!.$$

Comme $n! > 0$, on peut diviser les deux membres de cette inégalité par $n!$ sans changer son sens :

$$\boxed{\frac{u_n}{n!} \geq 1.}$$

Ainsi,

$$1 \leq \frac{u_n}{n!}.$$

2. MajorationPrenons $n \geq 2$. Écrivons la somme en séparant ses deux derniers termes :

$$u_n = \underbrace{(0! + 1! + \cdots + (n-2)!)}_{\text{termes restants}} + (n-1)! + n!.$$

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-2$, on a

$$k! \leq (n-2)!.$$

En effet, la factorielle est croissante sur $\mathbb{N}$ à partir de 0 :

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \dots$$

Or la somme

$$0! + 1! + \dots + (n-2)!$$

contient exactement $n-1$ termes, correspondant aux indices

$$0, 1, 2, \dots, n-2.$$

Chacun de ces $n-1$ termes étant inférieur ou égal à $(n-2)!$, on obtient

$$0! + 1! + \dots + (n-2)! \leq (n-1)(n-2)!.$$

Mais

$$(n-1)(n-2)! = (n-1)!.$$

Donc

$$0! + 1! + \dots + (n-2)! \leq (n-1)!.$$

En revenant à u_n , il vient

$$\begin{aligned} u_n &= (0! + 1! + \dots + (n-2)!) + (n-1)! + n! \\ &\leq (n-1)! + (n-1)! + n! \\ &= n! + 2(n-1)!. \end{aligned}$$

Comme $n! > 0$, on divise par $n!$:

$$\frac{u_n}{n!} \leq 1 + 2 \frac{(n-1)!}{n!}.$$

Or

$$n! = n(n-1)!,$$

donc

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{u_n}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n}}.$$

3. Encadrement final

En réunissant la minoration et la majoration, nous avons, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{1 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n}}.$$

Étudions maintenant les deux bornes lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 + 0 = 1,$$

car

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $\frac{u_n}{n!}$ est encadré entre deux suites qui ont la même limite 1. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1.$$

Conclusion

On a donc démontré, uniquement à l'aide d'un encadrement, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0! + 1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = 1.$$

Autrement dit, lorsque n est grand, le dernier terme $n!$ est tellement plus grand que les factorielles précédentes que la somme entière est, au sens de la limite demandée, dominée par $n!$.

Méthode à retenir

La démonstration peut être résumée en trois lignes : pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} n! &\leq u_n, \\ u_n &= \sum_{k=0}^{n-2} k! + (n-1)! + n! \leq (n-1)! + (n-1)! + n!, \\ \text{donc} \quad 1 &\leq \frac{u_n}{n!} \leq 1 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Puis

$$1 \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{2}{n} \longrightarrow 1,$$

d'où, par encadrement,

$$\frac{u_n}{n!} \longrightarrow 1.$$

Exercice 5 (*)**

Correction détaillée

Énoncé

On considère une suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que la suite est croissante.

2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a.$$

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Idée clé

La suite $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ est la forme classique qui conduit au nombre e . Deux idées suffisent ici :

- pour la croissance, on peut utiliser directement le développement binomial ;
- pour la convergence et la limite, on encadre $\ln u_n$ grâce à la question 2.

Cette démarche évite tout développement limité et tout calcul compliqué.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante

On suppose d'abord $a \geq 0$ et $n \geq 1$.

Par la formule du binôme de Newton,

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{n}\right)^k.$$

Or

$$\binom{n}{k} \left(\frac{a}{n}\right)^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{a^k}{n^k}.$$

Pour $k \geq 1$, on peut écrire

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Ainsi

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

(avec, pour $k = 0$, le produit vide égal à 1).

Comparons maintenant avec u_{n+1} . Pour tout $j \geq 0$,

$$\frac{j}{n+1} \leq \frac{j}{n},$$

donc

$$1 - \frac{j}{n+1} \geq 1 - \frac{j}{n}.$$

Pour $0 \leq j \leq k-1 \leq n-1$, tous ces facteurs sont positifs. Par conséquent,

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \geq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Comme $a \geq 0$, on a également $a^k/k! \geq 0$. Ainsi, pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, le terme d'indice k dans le développement de u_{n+1} est supérieur ou égal au terme correspondant dans u_n .

De plus, u_{n+1} contient un terme supplémentaire d'indice $n+1$, qui est positif ou nul :

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \geq 0.$$

En additionnant, on obtient donc

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi,

(u_n) est croissante.

Si $a = 0$, alors $u_n = 1$ pour tout n , donc la suite est constante, et donc bien croissante au sens large.

2. Encadrement de $\ln(1+t)$ pour $t \geq 0$

Nous voulons démontrer

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

La méthode la plus directe consiste à étudier deux fonctions.

Majoration : $\ln(1+t) \leq t$

Posons

$$f(t) = t - \ln(1+t), \quad t \geq 0.$$

On a

$$f(0) = 0.$$

De plus,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Pour $t \geq 0$, $t \geq 0$ et $1+t > 0$, donc

$$f'(t) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) \geq 0.$$

C'est-à-dire

$$t - \ln(1+t) \geq 0,$$

d'où

$$\boxed{\ln(1+t) \leq t.}$$

Minoration : $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$

Posons cette fois

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

On a

$$g(0) = 0.$$

Calculons la dérivée :

$$\left(\frac{t}{1+t}\right)' = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1+t-1}{(1+t)^2} \\ &= \frac{t}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$,

$$g'(t) \geq 0.$$

Donc g est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$,

$$g(t) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t).}$$

En réunissant les deux résultats :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

3. Encadrement de $\ln u_n$

Nous avons

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Comme $a \geq 0$ et $n \geq 1$, on peut appliquer la question 2 avec

$$t = \frac{a}{n} \geq 0.$$

On obtient

$$\frac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \leq \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right) \leq \frac{a}{n}.$$

Simplifions le membre de gauche :

$$\frac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} = \frac{a}{n} \times \frac{n}{n+a} = \frac{a}{n+a}.$$

Donc

$$\frac{a}{n+a} \leq \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \leq \frac{a}{n}.$$

Comme $n > 0$, on peut multiplier les trois membres par n sans changer le sens des inégalités :

$$\frac{na}{n+a} \leq n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \leq a.$$

Or

$$\ln u_n = \ln \left[\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n \right] = n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right).$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a.$$

4. Montrer que (u_n) est convergente

Il existe deux conclusions utiles à tirer de ce qui précède.

Première méthode : croissante et majorée

D'après la question 1, (u_n) est croissante.

D'après la question 3,

$$\ln u_n \leq a.$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante,

$$u_n \leq e^a.$$

Ainsi, (u_n) est majorée par e^a .

Nous avons donc une suite croissante et majorée. Par le théorème de convergence des suites monotones,

$$(u_n) \text{ est convergente.}$$

On peut même déterminer sa limite

La question 3 donne

$$\frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a.$$

Étudions le membre de gauche :

$$\frac{na}{n+a} = \frac{a}{1 + \frac{a}{n}}.$$

Or

$$\frac{a}{n} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\frac{a}{1 + \frac{a}{n}} \longrightarrow a.$$

Le membre de droite est la constante a , donc il tend également vers a .

Ainsi,

$$\frac{na}{n+a} \longrightarrow a \quad \text{et} \quad a \longrightarrow a.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\ln u_n \longrightarrow a.$$

La fonction exponentielle étant continue,

$$u_n = e^{\ln u_n} \longrightarrow e^a.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

En particulier, la convergence demandée est établie, et sa limite est explicitement e^a .

5. Cas particulier $a = 1$

En prenant $a = 1$, on obtient

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

D'après le résultat précédent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De plus, la question 1 montre que cette suite est croissante.

La question 3 devient également

$$\frac{n}{n+1} \leq \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \leq 1,$$

ou encore

$$\frac{n}{n+1} \leq n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

En exponentiant,

$$e^{\frac{n}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Le résultat classique obtenu est donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$$

au sens où la suite est croissante et converge vers le nombre e .

Bilan

$$\begin{aligned} & (u_n) \text{ est croissante,} \\ & \forall t \geq 0, \quad \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t, \\ & \frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a, \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a, \\ & a = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

Exercice 6 (*)

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 < u_n \leq 1,$$

puis prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Remarque préalable sur l'énoncé

Si l'on adopte la convention usuelle $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, alors

$$u_0 = \frac{0(0+2)}{(0+1)^2} = 0.$$

Ainsi, l'inégalité stricte $0 < u_n$ n'est pas vraie pour $n = 0$.

La formulation rigoureusement exacte est donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < 1}$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{0 < u_n < 1.}$$

Si, dans le cours, la notation $\mathbb{N}$ désigne seulement les entiers strictement positifs, alors l'énoncé initial ne pose évidemment aucun problème.

Correction détaillée

1. Trouver la forme la plus simple de u_n

La méthode la plus rapide consiste à remarquer que le numérateur est presque égal au dénominateur :

$$n(n+2) = n^2 + 2n.$$

Or

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Donc

$$n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\&= \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\&= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Cette écriture est la clé de tout l'exercice.

2. Encadrement de la suite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n+1 \geq 1,$$

donc

$$(n+1)^2 \geq 1.$$

Comme $(n+1)^2 > 0$, on peut prendre les inverses :

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1.$$

En soustrayant chaque membre à 1, on obtient

$$0 \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

Mais

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < 1.$$

Si $n \geq 1$, alors $n+1 \geq 2$, donc

$$(n+1)^2 \geq 4 \implies 0 < \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Ainsi

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n < 1.$$

En particulier, on a bien, pour $n \geq 1$,

$$0 < u_n \leq 1,$$

ce qui correspond à l'encadrement demandé dans l'énoncé.

3. Calcul de la limite

Nous repartons de la forme simplifiée :

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$n+1 \rightarrow +\infty,$$

puis

$$(n+1)^2 \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

Autre démonstration de la limite par encadrement

La forme

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

donne aussi directement

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} \leq u_n \leq 1.$$

Ici le membre de gauche est exactement u_n , mais cet encadrement fait apparaître le mécanisme du théorème des gendarmes. En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

On retrouve donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

Méthode la plus courte à retenir

Tout l'exercice peut se résumer à l'identité

$$\boxed{n(n+2) = (n+1)^2 - 1.}$$

Elle donne immédiatement

$$u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

À partir de là :

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 \implies 0 \leq u_n < 1,$$

et, pour $n \geq 1$,

$$0 < u_n < 1.$$

Enfin,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0 \implies \boxed{u_n \rightarrow 1}.$$

Conclusion

Avec la convention $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n < 1}$$

et

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 < u_n < 1}.$$

Dans tous les cas,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

Exercice 7 (**) — Correction détaillée

Énoncé

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

1. Ce qu'il faut montrer

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* lorsqu'on vérifie les trois propriétés suivantes :

- 1) (u_n) est croissante ;
- 2) (v_n) est décroissante ;
- 3) $v_n - u_n \rightarrow 0$.

Idée essentielle

Ici, les trois vérifications sont très courtes : pour étudier les variations, on calcule les différences $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$, puis on calcule directement $v_n - u_n$.

2. Montrons que (u_n) est croissante

Par définition,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Au rang suivant,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} > u_n},$$

et donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. Montrons que (v_n) est décroissante

On a

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Au rang $n + 1$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Comme

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2},$$

on obtient

$$v_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Calculons alors la différence :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Regroupons les deux derniers termes :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Mettons au même dénominateur $n(n+1)^2$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, le dénominateur est strictement positif ; par conséquent

$$-\frac{1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} < v_n},$$

et finalement

$$\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

4. Montrons que l'écart $v_n - u_n$ tend vers 0

La définition de v_n donne immédiatement

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Remarquons également que

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} > 0,$$

donc

$$u_n < v_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Cette inégalité est cohérente avec l'image intuitive de deux suites adjacentes : la suite inférieure monte, la suite supérieure descend, et l'écart entre elles se referme.

5. Conclusion : les deux suites sont adjacentes

Nous avons établi successivement :

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante,} \\ (v_n) \text{ est décroissante,} \\ v_n - u_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Ce sont exactement les conditions d'adjacence. Ainsi,

Conclusion

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

6. Quelle est cette limite commune ?

L'exercice ne demande pas de démontrer sa valeur. Il indique seulement que

$$\ell = \frac{\pi^2}{6}.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ce résultat célèbre est appelé le *problème de Bâle*. Il n'est pas nécessaire pour prouver l'adjacence des deux suites.

7. Méthode la plus rapide à retenir

Pour une copie d'examen, l'essentiel peut être résumé très efficacement par les trois calculs suivants :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0,$$

et

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 8 (**) – Suites et encadrement

Correction complète, détaillée et intuitive

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}.$$

1. Montrer que

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

2. Dédire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Idée essentielle

La somme contient des termes de la forme

$$\frac{n}{n^2 + k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Le numérateur n ne dépend pas de k . Il suffit donc d'encadrer le dénominateur $n^2 + k$ en utilisant

$$1 \leq k \leq n.$$

On encadre ensuite chaque terme, puis on additionne les n inégalités obtenues.

1. Démonstration de l'encadrement

Soit $n \geq 1$ fixé. Dans la somme qui définit u_n , l'indice k prend les valeurs

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$1 \leq k \leq n.$$

Étape 1 – Encadrer le dénominateur

En ajoutant n^2 aux trois membres de l'inégalité précédente, on obtient

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n.$$

Tous ces nombres sont strictement positifs puisque $n \geq 1$.

Or, sur les nombres strictement positifs, prendre l'inverse renverse le sens des inégalités. Ainsi,

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

En multipliant les trois membres par $n > 0$, le sens des inégalités est conservé :

$$\boxed{\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}}.$$

Cette inégalité est vraie pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$.

Étape 2 – Additionner les n inégalités

On additionne maintenant ces inégalités pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Le terme du milieu est précisément u_n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = u_n.$$

Dans la somme de gauche, le terme $\frac{n}{n^2 + n}$ ne dépend pas de k . Il est donc répété exactement n fois :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} = n \times \frac{n}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n^2 + n}.$$

De même,

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1} = n \times \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Nous obtenons donc exactement l'encadrement demandé :

$$\boxed{\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}}.$$

Idée essentielle

Pourquoi cette méthode est-elle la plus courte ? Parce que la somme elle-même n'a pas besoin d'être calculée. On remplace simplement chaque terme par un terme plus petit et un terme plus grand, faciles à sommer.

2. Convergence et limite de (u_n)

Nous savons maintenant que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Pour utiliser le théorème des gendarmes, calculons les limites des deux suites qui encadrent u_n .

Limite du membre de gauche

On divise le numérateur et le dénominateur par n^2 :

$$\frac{n^2}{n^2 + n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Or

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1,$$

et par continuité de la fonction $x \mapsto 1/x$ en 1,

$$\boxed{\frac{n^2}{n^2 + n} \longrightarrow 1}.$$

Limite du membre de droite

De la même manière,

$$\frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Comme

$$\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$\boxed{\frac{n^2}{n^2 + 1} \longrightarrow 1}.$$

Application du théorème des gendarmes

Nous avons donc

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1},$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1.$$

Les deux suites qui encadrent u_n ont la même limite. Le théorème des gendarmes donne alors

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est convergente et sa limite est 1.

Conclusion

(u_n) converge vers 1

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = 1.$$

Méthode rapide à retenir

Pour $1 \leq k \leq n$,

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n,$$

donc

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}.$$

En sommant pour $k = 1, \dots, n$:

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Or

$$\frac{n^2}{n^2 + n} = \frac{1}{1 + 1/n} \rightarrow 1, \quad \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1/n^2} \rightarrow 1.$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{u_n \rightarrow 1}.$$

Exercice 9 (*)**

Correction détaillée

Énoncé

Soient a et b deux réels vérifiant

$$0 < a < b.$$

On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}}.$$

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
5. Écrire un programme Pascal permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à ε près (ε étant choisi par l'utilisateur). On utilisera une boucle **WHILE** ou **REPEAT**.

1. Vérifier que les deux suites sont bien définies

La seule opération qui pourrait poser un problème est la racine carrée dans

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Pour que cette racine existe dans $\mathbb{R}$, il suffit d'avoir $u_n v_n \geq 0$. Nous allons même montrer que tous les termes sont strictement positifs.

Au rang 0,

$$u_0 = a > 0 \quad \text{et} \quad v_0 = b > 0.$$

Supposons qu'à un certain rang n ,

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0.$$

Alors

$$u_n v_n > 0,$$

donc

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0.$$

De plus,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0,$$

car la somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive.

Ainsi, par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0.}$$

Les racines carrées sont donc toujours définies et les deux suites sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $u_n \leq v_n$

Idée essentielle

Il ne faut pas comparer directement u_n et v_n à partir de u_0 et v_0 . Il suffit d'utiliser l'inégalité classique

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0),$$

qui dit que la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.

Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

En développant,

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0,$$

donc

$$2\sqrt{xy} \leq x + y,$$

et finalement

$$\boxed{\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}.$$

Appliquons cette inégalité à $x = u_n$ et $y = v_n$, qui sont strictement positifs d'après la question 1 :

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Or, par définition,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \leq v_{n+1}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela donne pour tout rang $m \geq 1$:

$$u_m \leq v_m.$$

Et au rang 0, l'hypothèse $a < b$ donne déjà

$$u_0 = a < b = v_0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.}$$

3. Monotonie des deux suites

3.1. La suite (u_n) est croissante

Nous savons que

$$0 < u_n \leq v_n.$$

Comme $u_n > 0$, on peut multiplier l'inégalité $u_n \leq v_n$ par u_n sans changer son sens :

$$u_n^2 \leq u_n v_n.$$

Les deux membres étant positifs, on peut prendre leurs racines carrées :

$$u_n \leq \sqrt{u_n v_n}.$$

Or

$$\sqrt{u_n v_n} = u_{n+1}.$$

Donc

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$(u_n) \text{ est croissante.}$$

3.2. La suite (v_n) est décroissante

Toujours grâce à $u_n \leq v_n$, on a

$$u_n + v_n \leq v_n + v_n = 2v_n.$$

En divisant par $2 > 0$,

$$\frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n.$$

Or

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Donc

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

Ainsi,

$$(v_n) \text{ est décroissante.}$$

Résultat

Pour tout n ,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

Les termes de (u_n) montent, ceux de (v_n) descendent, et les deux suites restent ordonnées.

4. Convergence vers une même limite

4.1. Chacune des deux suites converge

Puisque $u_n \leq v_n \leq v_0 = b$, on a

$$u_n \leq b.$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente. Notons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

De même, puisque

$$a = u_0 \leq u_n \leq v_n,$$

on a

$$v_n \geq a.$$

La suite (v_n) est donc décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Notons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L.$$

Il reste à montrer que $\ell = L$.

4.2. L'écart $v_n - u_n$ tend vers zéro

Calculons l'écart au rang suivant :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}.$$

Comme $u_n \leq v_n$, nous avons

$$\sqrt{u_n v_n} \geq u_n.$$

En effet, $v_n \geq u_n > 0$ implique

$$u_n v_n \geq u_n^2,$$

donc

$$\sqrt{u_n v_n} \geq u_n.$$

Par conséquent,

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{u_n + v_n}{2} - u_n.$$

Or

$$\frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Ainsi,

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Appliquons cette inégalité plusieurs fois :

$$v_1 - u_1 \leq \frac{v_0 - u_0}{2},$$

$$v_2 - u_2 \leq \frac{v_1 - u_1}{2} \leq \frac{v_0 - u_0}{2^2},$$

et, de proche en proche,

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_0 - u_0}{2^n}.$$

Comme $v_0 = b$ et $u_0 = a$,

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

Or

$$\frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$v_n - u_n \rightarrow 0.$$

En passant à la limite,

$$L - \ell = 0,$$

donc

$$L = \ell.$$

Les deux suites convergent donc vers une même limite, que l'on peut noter λ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda.$$

De plus, pour tout n ,

$$u_n \leq \lambda \leq v_n.$$

C'est précisément la situation de deux suites adjacentes.

5. Programme Pascal donnant une valeur approchée à ε près

Principe de l'algorithme

Comme

$$u_n \leq \lambda \leq v_n,$$

la limite est toujours enfermée dans l'intervalle $[u_n, v_n]$.

Si l'on continue les calculs jusqu'à avoir

$$v_n - u_n \leq \varepsilon,$$

alors u_n lui-même est une valeur approchée de λ à ε près, puisque

$$0 \leq \lambda - u_n \leq v_n - u_n \leq \varepsilon.$$

On peut faire encore un peu mieux en prenant le milieu

$$m_n = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Comme $\lambda \in [u_n, v_n]$,

$$|m_n - \lambda| \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Ainsi, dès que $v_n - u_n \leq \varepsilon$, le milieu est même à moins de $\varepsilon/2$ de la limite.

Attention lors de la mise à jour

Les deux formules

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

doivent utiliser les *mêmes anciennes valeurs* u_n et v_n .

Il ne faut donc pas remplacer u puis utiliser ce nouveau u pour calculer v . On utilise deux variables temporaires.

Programme Pascal avec une boucle WHILE

```
program Moyennes;

var
  a, b, epsilon : real;
  u, v, uSuiv, vSuiv, approx : real;
  n : integer;

begin
  writeln('Entrer a et b avec 0 < a < b : ');
  readln(a, b);

  writeln('Entrer epsilon > 0 : ');
  readln(epsilon);

  u := a;
  v := b;
  n := 0;

  while (v - u > epsilon) do
    begin
      uSuiv := sqrt(u * v);
```

```

    vSuiv := (u + v) / 2;

    u := uSuiv;
    v := vSuiv;
    n := n + 1;
end;

approx := (u + v) / 2;

writeln('Rang atteint : ', n);
writeln('Valeur approchée de la limite : ', approx:0:10);
writeln('Largeur de l'encadrement : ', (v-u):0:10);
end.

```

Pourquoi ce programme est correct ?

La boucle s'arrête lorsque

$$v - u \leq \varepsilon.$$

À cet instant, la vraie limite λ vérifie

$$u \leq \lambda \leq v.$$

Le nombre affiché est

$$\text{approx} = \frac{u + v}{2}.$$

Par conséquent,

$$|\text{approx} - \lambda| \leq \frac{v - u}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Le nombre affiché est donc bien une valeur approchée de la limite à ε près.

Résumé à retenir

Les étapes essentielles sont :

$$0 < u_n \leq v_n,$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq u_n,$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n,$$

puis

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b - a}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Ainsi les suites sont adjacentes et

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

Exercice 10 (*)**

Correction détaillée

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \neq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 2(1 + \sqrt{2}),$$

puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.

5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.

1. Montrer que la suite est bien définie

La relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$$

n'a de sens que si le dénominateur n'est jamais nul. Il faut donc vérifier que

$$u_n \neq 1$$

pour tout n .

On sait déjà que $u_0 = a \neq 1$.

Supposons maintenant qu'un terme u_n soit défini et différent de 1. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Il suffit de vérifier que u_{n+1} ne peut pas être égal à 1.

Cherchons donc les réels $x \neq 1$ tels que

$$f(x) = 1.$$

Cela donne

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = 1.$$

Comme $x \neq 1$, on peut multiplier par $x - 1$:

$$x^2 + 1 = x - 1.$$

Donc

$$x^2 - x + 2 = 0.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Cette équation n'a donc **aucune solution réelle**.

Ainsi,

$$f(x) \neq 1 \quad \text{pour tout } x \neq 1.$$

Par conséquent, dès qu'un terme u_n est défini et différent de 1, le terme suivant u_{n+1} est lui aussi défini et différent de 1.

Comme $u_0 \neq 1$, le raisonnement se répète à tous les rangs.

Conclusion

La suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 1.$$

2. Variations de la fonction f

On considère

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

2.1. Une écriture plus pratique

Effectuons la division :

$$x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2.$$

Donc

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Cette écriture rend la dérivée très simple.

2.2. Calcul de la dérivée

Pour $x \neq 1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2}.$$

Or

$$(x - 1)^2 - 2 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

Le dénominateur $(x - 1)^2$ est strictement positif pour $x \neq 1$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de

$$(x - 1)^2 - 2.$$

Ainsi,

$$f'(x) = 0 \iff (x - 1)^2 = 2 \iff x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt{2}.$$

On obtient :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc f est :

- croissante sur $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$;
- décroissante sur $[1 - \sqrt{2}, 1)$;
- décroissante sur $(1, 1 + \sqrt{2}]$;
- croissante sur $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

2.3. Valeurs aux points critiques

Avec

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1},$$

on calcule :

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt{2}) &= 2 + \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 2 + 2\sqrt{2} \\ &= \boxed{2(1 + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(1 - \sqrt{2}) &= 2 - \sqrt{2} + \frac{2}{-\sqrt{2}} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 2 - 2\sqrt{2} \\ &= \boxed{2(1 - \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

En particulier, sur $(1, +\infty)$, f atteint son minimum en $1 + \sqrt{2}$:

$$\boxed{\forall x > 1, \quad f(x) \geq 2(1 + \sqrt{2}).}$$

Et sur $(-\infty, 1)$, f atteint son maximum en $1 - \sqrt{2}$:

$$\boxed{\forall x < 1, \quad f(x) \leq 2(1 - \sqrt{2}) < 1.}$$

Idée à retenir

Les deux résultats vraiment utiles pour la suite sont donc :

$$x > 1 \implies f(x) \geq 2(1 + \sqrt{2}) > 1,$$

et

$$x < 1 \implies f(x) \leq 2(1 - \sqrt{2}) < 1.$$

Ainsi, les deux intervalles $(-\infty, 1)$ et $(1, +\infty)$ sont stables par f .

3. Signe de $f(x) - x$

Calculons :

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \\
 &= \frac{x^2 + 1 - x(x - 1)}{x - 1} \\
 &= \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} \\
 &= \boxed{\frac{x + 1}{x - 1}}.
 \end{aligned}$$

Les valeurs importantes sont -1 (zéro du numérateur) et 1 (valeur interdite).

Ainsi :

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	non défini	$+$

Donc

$$\begin{cases} f(x) > x & \text{si } x < -1, \\ f(-1) = -1, \\ f(x) < x & \text{si } -1 < x < 1, \\ f(x) > x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4. Cas $a > 1$

On suppose désormais

$$u_0 = a > 1.$$

4.1. Montrer que $u_n \geq 2(1 + \sqrt{2})$ pour tout $n \geq 1$

Puisque $u_0 = a > 1$,

$$u_1 = f(u_0) = f(a).$$

Or, d'après l'étude de f sur $(1, +\infty)$,

$$f(x) \geq 2(1 + \sqrt{2}) \quad \text{pour tout } x > 1.$$

Donc

$$u_1 \geq 2(1 + \sqrt{2}) > 1.$$

Comme $u_1 > 1$, le même résultat donne

$$u_2 = f(u_1) \geq 2(1 + \sqrt{2}).$$

Et le raisonnement se répète à tous les rangs.

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n \geq 2(1 + \sqrt{2}).}$$

4.2. Monotonie

Nous savons que $u_n > 1$ pour tout n .

Or, pour $x > 1$, la question 3 a montré que

$$f(x) - x > 0.$$

En prenant $x = u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0.$$

Par conséquent,

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

4.3. Limite

Une suite croissante possède deux possibilités :

- elle est majorée et converge vers une limite réelle ;
- elle n'est pas majorée et tend vers $+\infty$.

Supposons, pour obtenir une contradiction, que (u_n) soit majorée. Comme elle est croissante, elle convergerait vers un réel ℓ .

Comme $u_n > 1$, on aurait nécessairement $\ell \geq u_0 > 1$, donc $\ell \neq 1$. La fonction f est continue en ℓ , et la relation

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

donnerait, en passant à la limite,

$$\ell = f(\ell) = \frac{\ell^2 + 1}{\ell - 1}.$$

Donc

$$\ell(\ell - 1) = \ell^2 + 1.$$

Ainsi

$$\ell^2 - \ell = \ell^2 + 1,$$

d'où

$$-\ell = 1, \quad \text{soit} \quad \ell = -1.$$

Mais c'est impossible puisque $\ell > 1$.

La suite n'est donc pas majorée. Étant croissante,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Conclusion

Si $a > 1$, alors

$$u_n \geq 2(1 + \sqrt{2}) \quad (n \geq 1),$$

$$(u_n) \text{ est croissante,}$$

$$u_n \rightarrow +\infty.$$

5. Cas $a < 1$

Cette partie demande un peu plus d'attention, car le comportement de départ dépend de la position de a par rapport à -1 et 0 .

Nous allons montrer que, dans **tous les cas** $a < 1$,

$$\boxed{u_n \longrightarrow -1.}$$

Pour savoir de quel côté de -1 se trouve $f(x)$, calculons une nouvelle expression très simple :

$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= \frac{x^2 + 1}{x - 1} + 1 \\ &= \frac{x^2 + 1 + x - 1}{x - 1} \\ &= \boxed{\frac{x(x + 1)}{x - 1}}. \end{aligned}$$

Cas 1 : $a < -1$

Si $x < -1$, alors :

$$x < 0, \quad x + 1 < 0, \quad x - 1 < 0.$$

Donc

$$\frac{x(x + 1)}{x - 1} < 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) + 1 < 0, \quad \text{donc} \quad f(x) < -1.$$

Ainsi l'intervalle $(-\infty, -1)$ est stable par f .

Par conséquent,

$$\forall n, \quad u_n < -1.$$

D'autre part, pour $x < -1$, la question 3 donne

$$f(x) - x > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} > u_n.$$

La suite est donc croissante et majorée par -1 . Elle converge vers un réel $\ell \leq -1$.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient comme précédemment

$$\ell = f(\ell) \implies \ell = -1.$$

Donc

$$\boxed{a < -1 \implies u_n \rightarrow -1.}$$

Cas 2 : $a = -1$

On calcule

$$u_1 = f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1 - 1} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Donc

$$u_n = -1 \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi

$$\boxed{a = -1 \implies u_n \rightarrow -1.}$$

Cas 3 : $-1 < a < 0$

Si $-1 < x < 0$, alors

$$x < 0, \quad x + 1 > 0, \quad x - 1 < 0.$$

Donc

$$\frac{x(x+1)}{x-1} > 0,$$

et par conséquent

$$f(x) > -1.$$

D'autre part, puisque $-1 < x < 1$, la question 3 donne

$$f(x) - x < 0,$$

donc

$$f(x) < x.$$

Finalement,

$$-1 < f(x) < x < 0.$$

L'intervalle $(-1, 0)$ est donc stable, et la suite y est décroissante.

Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par -1 . Elle converge. Si sa limite est ℓ , la relation $\ell = f(\ell)$ impose encore

$$\ell = -1.$$

Donc

$$\boxed{-1 < a < 0 \implies u_n \rightarrow -1.}$$

Cas 4 : $a = 0$

On a

$$u_1 = f(0) = \frac{1}{-1} = -1.$$

Puis tous les termes suivants sont égaux à -1 . Donc

$$\boxed{a = 0 \implies u_n \rightarrow -1.}$$

Cas 5 : $0 < a < 1$

Cette fois, a est entre 0 et 1.

Comme

$$f(a) + 1 = \frac{a(a+1)}{a-1},$$

le numérateur est positif et le dénominateur est négatif. Donc

$$f(a) + 1 < 0.$$

Ainsi

$$u_1 = f(a) < -1.$$

À partir du rang 1, on retombe exactement dans le cas 1 : la suite reste dans $(-\infty, -1)$, elle est croissante et majorée par -1 .

Elle converge donc vers -1 :

$$\boxed{0 < a < 1 \implies u_n \rightarrow -1.}$$

Conclusion

Pour tout $a < 1$, quel que soit le sous-cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Plus précisément :

Valeur de a	Comportement de la suite
$a < -1$	croissante, majorée par -1
$a = -1$	constante égale à -1
$-1 < a < 0$	décroissante, minorée par -1
$a = 0$	$u_1 = -1$ puis constante
$0 < a < 1$	$u_1 < -1$ puis croissante vers -1

Bilan général

$$\begin{cases} a > 1 & \implies u_n \longrightarrow +\infty, \\ a < 1 & \implies u_n \longrightarrow -1. \end{cases}$$

La valeur $a = 1$ est exclue dès le départ, car elle annulerait le dénominateur dans le calcul de u_1 .

Idée à retenir

Pour résoudre rapidement cet exercice, les quatre calculs essentiels à retenir sont :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1},$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2},$$

$$f(x) - x = \frac{x+1}{x-1},$$

et, pour le cas $a < 1$,

$$f(x) + 1 = \frac{x(x+1)}{x-1}.$$

Ils donnent presque tout le comportement de la suite.