

Exercice - Équivalents de suites

Correction entièrement détaillée

Énoncé

Donner un équivalent, le plus simple possible, de chacune des suites suivantes :

1.

$$u_n = \frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}.$$

2.

$$u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}.$$

3.

$$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}.$$

4.

$$u_n = e^{-n} + e^{-2n}.$$

5.

$$u_n = \frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)}.$$

6.

$$u_n = \frac{1}{n^2} + e^{-3n}.$$

7.

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}\right).$$

8.

$$u_n = \ln(1 + n^3).$$

9.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Principe de vérification

Rappel

Dire qu'une suite (v_n) est un équivalent de (u_n) lorsque n devient très grand signifie que le quotient

$$\frac{u_n}{v_n}$$

se rapproche de 1. Ainsi, pour justifier un équivalent proposé v_n , il suffit de calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$$

et d'obtenir 1.

Dans chaque question, on cherchera d'abord la partie qui gouverne le comportement de la suite, puis on vérifiera rigoureusement le résultat par un quotient de limite égale à 1.

1. Suite rationnelle

On considère

$$u_n = \frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont des sommes de puissances de n . Lorsque n devient très grand, les puissances les plus élevées jouent le rôle principal :

$$5n - n^2 + 2n^7 \text{ est dominé par } 2n^7,$$

et

$$n^8 - 3n + 12 \text{ est dominé par } n^8.$$

On s'attend donc à obtenir

$$\frac{2n^7}{n^8} = \frac{2}{n}.$$

Vérification complète

Calculons le quotient de u_n par $2/n$:

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{2/n} &= \frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12} \times \frac{n}{2} \\ &= \frac{5n^2 - n^3 + 2n^8}{2n^8 - 6n^2 + 24n}. \end{aligned}$$

Divisons maintenant le numérateur et le dénominateur par n^8 :

$$\frac{u_n}{2/n} = \frac{\frac{5}{n^6} - \frac{1}{n^5} + 2}{2 - \frac{6}{n^6} + \frac{24}{n^7}}.$$

Or

$$\frac{5}{n^6} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^5} \rightarrow 0, \quad \frac{6}{n^6} \rightarrow 0, \quad \frac{24}{n^7} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2/n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\frac{2}{n}.$$

2. Différence de deux racines carrées

On considère

$$u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}.$$

Si l'on remplace directement chaque racine par un ordre de grandeur voisin de $\sqrt{n}$, on obtient une différence de deux termes très proches. Il faut donc transformer l'expression à l'aide de l'expression conjuguée.

Rationalisation

On multiplie par le conjugué :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+3} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+3) - n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Factorisons $\sqrt{n}$ au dénominateur :

$$\sqrt{n+3} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n}}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{3}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)}.$$

Comme

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 1,$$

le facteur entre parenthèses se rapproche de 2. On prévoit donc l'équivalent

$$\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

Vérification complète

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{3/(2\sqrt{n})} &= \frac{3}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1 \right)} \times \frac{2\sqrt{n}}{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3/(2\sqrt{n})} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

3. Quotient avec une racine carrée

On considère

$$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}.$$

Pour dégager le comportement du dénominateur, factorisons n^2 sous la racine :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + n + 1} &= \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}},\end{aligned}$$

car $n > 0$ pour tout entier naturel non nul. Ainsi

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{n^2}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}.\end{aligned}$$

Comme

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1,$$

on obtient

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1.$$

Vérification

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$n.$$

4. Somme de deux exponentielles décroissantes

On considère

$$u_n = e^{-n} + e^{-2n}.$$

Le terme e^{-2n} décroît plus vite que e^{-n} . Factorisons e^{-n} :

$$u_n = e^{-n} (1 + e^{-n}).$$

Or

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} \rightarrow 0.$$

Donc

$$1 + e^{-n} \rightarrow 1.$$

Vérification

$$\frac{u_n}{e^{-n}} = 1 + e^{-n} \rightarrow 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$e^{-n}.$$

5. Exponentielle, logarithme et puissances

On considère

$$u_n = \frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)}.$$

Cette question demande d'analyser séparément le numérateur et le dénominateur.

Étude du numérateur

Le numérateur est

$$N_n = 2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n.$$

L'exponentielle e^{3n} croît beaucoup plus vite que les puissances de n et que $\ln n$. Pour le montrer sous une forme adaptée au calcul de limite, divisons par e^{3n} :

$$\frac{N_n}{e^{3n}} = \frac{2\sqrt{n}}{e^{3n}} + 1 - \frac{5 \ln n}{e^{3n}}.$$

On utilise les limites classiques

$$\frac{n^\alpha}{e^{an}} \rightarrow 0 \quad (a > 0), \quad \frac{\ln n}{e^{an}} \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$\frac{2\sqrt{n}}{e^{3n}} \rightarrow 0, \quad \frac{5 \ln n}{e^{3n}} \rightarrow 0,$$

et donc

$$\frac{N_n}{e^{3n}} \rightarrow 1.$$

Étude du dénominateur

Le dénominateur est

$$D_n = n^2 - 3 \ln(2n^4).$$

Utilisons les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln(2n^4) &= \ln 2 + \ln(n^4) \\ &= \ln 2 + 4 \ln n. \end{aligned}$$

Donc

$$D_n = n^2 - 3 \ln 2 - 12 \ln n.$$

Divisons par n^2 :

$$\frac{D_n}{n^2} = 1 - \frac{3 \ln 2}{n^2} - 12 \frac{\ln n}{n^2}.$$

Or

$$\frac{3 \ln 2}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln n}{n^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent

$$\frac{D_n}{n^2} \rightarrow 1.$$

Vérification de l'équivalent de la fraction

On propose

$$v_n = \frac{e^{3n}}{n^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{e^{3n}/n^2} &= \frac{N_n}{D_n} \times \frac{n^2}{e^{3n}} \\ &= \frac{N_n/e^{3n}}{D_n/n^2}. \end{aligned}$$

Nous avons montré que

$$\frac{N_n}{e^{3n}} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{D_n}{n^2} \rightarrow 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^{3n}/n^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\boxed{\frac{e^{3n}}{n^2}}.$$

6. Somme d'un terme polynomial décroissant et d'une exponentielle

On considère

$$u_n = \frac{1}{n^2} + e^{-3n}.$$

Écrivons

$$e^{-3n} = \frac{1}{e^{3n}}.$$

Pour comparer e^{-3n} à $1/n^2$, calculons leur quotient :

$$\frac{e^{-3n}}{1/n^2} = n^2 e^{-3n} = \frac{n^2}{e^{3n}} \rightarrow 0.$$

Ainsi e^{-3n} est négligeable devant $1/n^2$ lorsque n devient très grand.

Factorisons alors $1/n^2$:

$$u_n = \frac{1}{n^2} (1 + n^2 e^{-3n}).$$

Comme

$$n^2 e^{-3n} \rightarrow 0,$$

on a

$$1 + n^2 e^{-3n} \rightarrow 1.$$

Vérification

$$\frac{u_n}{1/n^2} = 1 + n^2 e^{-3n} \rightarrow 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\boxed{\frac{1}{n^2}}.$$

7. Logarithme d'une expression proche de 1

On considère

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}\right).$$

Regroupons les termes ajoutés à 1 :

$$-\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Posons

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}.$$

Alors

$$x_n \rightarrow 0$$

et

$$u_n = \ln(1 + x_n).$$

On utilise la limite classique

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

En remplaçant x par x_n , on obtient

$$\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \rightarrow 1.$$

Par ailleurs

$$\frac{x_n}{1/n} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}{1/n} = 1 - \frac{2}{n} \rightarrow 1.$$

Pour vérifier directement que $1/n$ est un équivalent de u_n , écrivons :

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{1/n} &= \frac{\ln(1+x_n)}{1/n} \\ &= \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \times \frac{x_n}{1/n}.\end{aligned}$$

Le premier facteur tend vers 1 et le second facteur tend également vers 1. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1 \times 1 = 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\boxed{\frac{1}{n}}.$$

8. Logarithme de $1+n^3$

On considère

$$u_n = \ln(1+n^3).$$

Pour faire apparaître la partie principale, factorisons n^3 à l'intérieur du logarithme :

$$1+n^3 = n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$$

Donc, par la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,

$$\begin{aligned}u_n &= \ln \left[n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &= \ln(n^3) + \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \\ &= 3 \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

Le second terme tend vers 0 puisque

$$1 + \frac{1}{n^3} \rightarrow 1$$

et que la fonction logarithme est continue en 1 :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Mais pour établir l'équivalent, il faut vérifier un quotient.

Vérification complète

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{3 \ln n} &= \frac{3 \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{3 \ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{3 \ln n}.\end{aligned}$$

Pour le dernier quotient, le numérateur tend vers 0 tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{3 \ln n} \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3 \ln n} = 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$3 \ln n.$$

9. Puissance de la forme $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

On considère

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Ici, un équivalent particulièrement simple est une constante. Pour savoir laquelle, déterminons la limite de u_n .

Prenons le logarithme :

$$\ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Écrivons ce produit sous une forme qui permet d'utiliser la limite classique du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln u_n &= n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} \right]. \end{aligned}$$

Comme $1/n^2 \rightarrow 0$, la limite classique

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

donne

$$\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} \rightarrow 1.$$

Et

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\ln u_n \rightarrow 0.$$

En appliquant la fonction exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$u_n = e^{\ln u_n} \rightarrow e^0 = 1.$$

Vérification de l'équivalent constant

Si l'on prend $v_n = 1$, alors

$$\frac{u_n}{1} = u_n \rightarrow 1.$$

Conclusion

Un équivalent simple de u_n est

$$\boxed{1}.$$

Tableau récapitulatif

Suite	Un équivalent simple
$\frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}$	$\frac{2}{n}$
$\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$	$\frac{3}{2\sqrt{n}}$
$\frac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$	n
$e^{-n} + e^{-2n}$	e^{-n}
$\frac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5 \ln n}{n^2 - 3 \ln(2n^4)}$	$\frac{e^{3n}}{n^2}$
$\frac{1}{n^2} + e^{-3n}$	$\frac{1}{n^2}$
$\ln \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \right)$	$\frac{1}{n}$
$\ln(1 + n^3)$	$3 \ln n$
$\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$	1

Idées à retenir

Méthode

1. Pour un quotient de polynômes, on met en évidence les plus grandes puissances de n .
2. Pour une différence de racines carrées, le conjugué est souvent la transformation décisive.
3. Sous une racine, on peut factoriser la plus grande puissance carrée de n .
4. Dans une somme d'exponentielles décroissantes, celle qui décroît le moins vite gouverne généralement le comportement.
5. Une exponentielle croissante domine les puissances de n , elles-mêmes plus fortes que le logarithme pour les comparaisons de croissance usuelles.
6. Pour une expression logarithmique proche de $\ln(1+x)$ avec $x \rightarrow 0$, la limite $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ est fondamentale.
7. Pour une puissance variable, le logarithme permet souvent de ramener le problème à une limite plus simple.

Exercice – Somme de termes $1/\sqrt{k}$

Correction complète et détaillée

Énoncé

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n) .
3. On pose désormais

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

Démontrer, à l'aide du théorème de convergence monotone, que la suite (u_n) converge.

4. En déduire un équivalent simple de S_n .

1. Encadrement de $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Nous devons démontrer, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Le terme central contient une différence de deux racines carrées. Dans ce type de situation, l'idée naturelle consiste à multiplier par l'expression conjuguée.

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Il reste donc à comparer

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

avec $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Première inégalité

Montrons que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Comme $n \geq 1$, toutes les quantités qui apparaissent dans les dénominateurs sont strictement positives. Nous pouvons donc multiplier sans changer le sens de l'inégalité.

L'inégalité précédente est équivalente à

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}.$$

En retranchant $\sqrt{n+1}$ des deux membres, on obtient

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1},$$

ce qui est vrai puisque

$$n \leq n+1$$

et que la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Deuxième inégalité

Montrons maintenant que

$$\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme les dénominateurs sont positifs, cette inégalité est équivalente à

$$2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

En retranchant $\sqrt{n}$ des deux membres, on trouve de nouveau

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1},$$

qui est vraie.

Donc

$$\boxed{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

En réunissant les deux résultats, nous obtenons bien, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

2. Limite de la suite (S_n)

Nous avons, pour tout entier $k \geq 1$,

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Nous allons additionner ces inégalités pour $k = 1, 2, \dots, n$.

On obtient

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Or, par définition,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = S_n.$$

Étudions maintenant la somme située à gauche :

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right].$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent : $+\sqrt{2}$ avec $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{3}$ avec $-\sqrt{3}$, etc. Il ne reste que le premier terme négatif et le dernier terme positif :

$$2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right] = 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Ainsi,

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n.$$

Or

$$\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \longrightarrow +\infty.$$

Puisque S_n est toujours supérieur ou égal à une quantité qui tend vers $+\infty$, on en déduit

$$S_n \longrightarrow +\infty.$$

Conclusion

La suite (S_n) diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

3. Convergence de $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$

Pour utiliser le théorème de convergence monotone, nous allons montrer deux propriétés :

- a) la suite (u_n) est monotone ;
- b) la suite (u_n) est bornée dans le sens convenable.

Rappel

Une suite décroissante et minorée est convergente. De même, une suite croissante et majorée est convergente.

a) Étude de la monotonie

Calculons $u_{n+1} - u_n$.

Par définition,

$$u_{n+1} = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1}$$

et

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} \\ &= (S_{n+1} - S_n) - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Mais

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

d'où

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

D'après la première inégalité de la question 1,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

En soustrayant $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ des deux membres, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite (u_n) est donc **décroissante**.

b) Recherche d'un minorant

Il faut maintenant montrer que les termes de (u_n) ne peuvent pas descendre indéfiniment vers $-\infty$.

D'après la deuxième inégalité de la question 1, pour tout $k \geq 1$,

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Additionnons cette fois de $k = 1$ à $k = n - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La somme de droite est S_{n-1} et la somme de gauche est télescopique :

$$2(\sqrt{n} - 1) \leq S_{n-1}.$$

Or

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Donc

$$S_n \geq 2(\sqrt{n} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En développant le membre de droite,

$$S_n \geq 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Soustrayons $2\sqrt{n}$ des deux côtés :

$$S_n - 2\sqrt{n} \geq -2 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$, cela donne

$$\boxed{u_n \geq -2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Et puisque

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 0,$$

on obtient en particulier

$$\boxed{u_n > -2}.$$

Ainsi, (u_n) est **minorée par -2** .

c) Application du théorème de convergence monotone

Nous avons démontré que :

$$(u_n) \text{ est décroissante}$$

et

$$(u_n) \text{ est minorée par } -2.$$

Le théorème de convergence monotone permet alors de conclure que

$$(u_n) \text{ converge.}$$

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

On peut même préciser l'intervalle dans lequel se trouve ℓ . Comme (u_n) est décroissante,

$$\ell \leq u_1.$$

Or

$$u_1 = S_1 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

D'autre part, $u_n > -2$. Ainsi,

$$-2 \leq \ell \leq -1.$$

Cette précision n'est pas nécessaire pour la suite de l'exercice, mais elle permet de mieux situer la limite.

4. Équivalent simple de S_n

Nous savons que

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

Donc

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n.$$

La question précédente montre que (u_n) converge vers un réel ℓ . En particulier, (u_n) est bornée.

Nous cherchons maintenant une expression simple v_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{v_n} = 1.$$

L'expression naturelle est $v_n = 2\sqrt{n}$. Calculons donc le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} &= \frac{2\sqrt{n} + u_n}{2\sqrt{n}} \\ &= 1 + \frac{u_n}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \rightarrow \ell$, la suite (u_n) reste bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que, pour tout n suffisamment grand,

$$|u_n| \leq M.$$

Alors

$$\left| \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \right| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.$$

Or

$$\frac{M}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{u_n}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1}.$$

Ainsi, un équivalent simple de S_n est

$$\boxed{2\sqrt{n}}.$$

Conclusion

Les résultats de l'exercice sont :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n+1}} &\leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ S_n &\longrightarrow +\infty, \\ u_n = S_n - 2\sqrt{n} &\text{converge,} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} &= 1.\end{aligned}$$

En particulier, l'expression $2\sqrt{n}$ est un équivalent simple de S_n .

Remarque pédagogique

Le cœur de l'exercice repose sur une somme dite *télescopique*. La différence

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

semble compliquée prise isolément, mais lorsqu'on additionne plusieurs termes consécutifs,

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

toutes les racines intermédiaires disparaissent. Cette idée permet à la fois d'obtenir une estimation de S_n et de faire apparaître naturellement le terme principal $2\sqrt{n}$.

Exercice – Suite définie par récurrence et équivalent

Correction entièrement détaillée

Énoncé. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2^n u_n.$$

On définit également la suite auxiliaire (v_n) par

$$v_n = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Étudier la convergence de la suite (v_n) , puis en déduire un équivalent de la suite (u_n) .

1. Comprendre la suite (u_n)

La relation

$$u_{n+1} = 2^n u_n$$

signifie que, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie le terme précédent par 2^n . Calculons les premiers termes afin de comprendre la structure de la suite.

Pour $n = 0$:

$$u_1 = 2^0 u_0 = 1 \times 1 = 1.$$

Pour $n = 1$:

$$u_2 = 2^1 u_1 = 2 \times 1 = 2.$$

Pour $n = 2$:

$$u_3 = 2^2 u_2 = 4 \times 2 = 8.$$

Pour $n = 3$:

$$u_4 = 2^3 u_3 = 8 \times 8 = 64.$$

Ainsi,

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 8, \quad u_4 = 64, \dots$$

On remarque déjà que les exposants de 2 obtenus sont

$$0, 0, 1, 3, 6, \dots$$

qui sont précisément les nombres

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

La suite auxiliaire donnée dans l'énoncé est donc très naturelle : elle sert à comparer u_n à la puissance de 2 qui semble décrire exactement sa croissance.

2. Étude de la suite auxiliaire (v_n)

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Pour étudier (v_n) , calculons v_{n+1} en utilisant la relation de récurrence vérifiée par (u_n) .

Étape 1 : écrire v_{n+1}

En remplaçant n par $n + 1$ dans la définition de v_n , on obtient

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}}}.$$

Or

$$(n+1) - 1 = n,$$

donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Étape 2 : utiliser la relation $u_{n+1} = 2^n u_n$

Puisque

$$u_{n+1} = 2^n u_n,$$

on peut remplacer u_{n+1} dans l'expression précédente :

$$v_{n+1} = \frac{2^n u_n}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Il faut maintenant comparer l'exposant du dénominateur avec celui qui apparaît dans la définition de v_n . Calculons :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

D'autre part,

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{n(n+1)}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Par conséquent,

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n + \frac{n(n-1)}{2}} = 2^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On obtient alors

$$v_{n+1} = \frac{2^n u_n}{2^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Comme $2^n \neq 0$, on simplifie par 2^n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Mais, par définition,

$$\frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = v_n.$$

Donc

$$v_{n+1} = v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Étape 3 : identifier la suite (v_n)

L'égalité

$$v_{n+1} = v_n$$

pour tout n montre que (v_n) est une suite constante. Il suffit donc de calculer son premier terme.

Pour $n = 0$,

$$v_0 = \frac{u_0}{2^{\frac{0(0-1)}{2}}} = \frac{1}{2^0} = 1.$$

Ainsi,

$$v_n = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Conclusion sur la convergence. La suite (v_n) est constante, égale à 1. Elle est donc convergente et sa limite est

$$1.$$

3. En déduire un équivalent de (u_n)

Critère utilisé. Pour montrer qu'une suite (w_n) est un équivalent de (u_n) , on vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1.$$

Ici, la définition de v_n donne immédiatement

$$v_n = \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Or nous venons de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 1.$$

Par conséquent,

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

est un équivalent de u_n lorsque n devient grand.

Réponse demandée :

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ est un équivalent de } u_n.$$

4. Remarque importante : ici, on peut dire encore mieux

Dans cet exercice, nous avons obtenu non seulement

$$\frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \longrightarrow 1,$$

mais même

$$\frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$u_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, l'expression trouvée n'est pas seulement une approximation du comportement de u_n pour les grandes valeurs de n : c'est la formule exacte de u_n .

5. Vérification indépendante par récurrence

Vérifions directement que

$$P(n) : \quad u_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$2^{\frac{0(0-1)}{2}} = 2^0 = 1 = u_0.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

À l'aide de la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = 2^n u_n.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = 2^n \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Avec la règle $2^a 2^b = 2^{a+b}$,

$$u_{n+1} = 2^{n + \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Or

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc

$$u_{n+1} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Mais

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = 2^{\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Par le principe de récurrence,

$$u_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

6. Bilan de la méthode

L'idée essentielle de l'exercice est de choisir une suite auxiliaire qui neutralise le facteur 2^n de la relation

$$u_{n+1} = 2^n u_n.$$

Le dénominateur

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

a précisément été choisi parce que ses exposants vérifient

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n.$$

C'est exactement le facteur 2^n qui intervient lorsque l'on passe de u_n à u_{n+1} .

On obtient ainsi la chaîne logique suivante :

$$v_{n+1} = v_n \implies v_n = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 1.$$

Et, dans ce cas particulier, la relation est même exacte :

$$u_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice – Fonction réciproque et équivalent d'une suite

Correction détaillée

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution, notée x_n , pour tout entier n (ne cherchez pas à la calculer, vous n'y arriverez pas).
3. Expliquer pourquoi la suite (x_n) est croissante, et quelle est sa limite.
4. Déterminer un équivalent simple de x_n .

Correction détaillée

1. Montrer que f est bijective

La fonction logarithme népérien $\ln x$ est définie pour $x > 0$. La fonction f est donc étudiée sur

$$]0, +\infty[.$$

Pour montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, nous allons montrer qu'elle est strictement croissante et que ses valeurs parcourent tout $\mathbb{R}$.

a) Étude des variations

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x} > 0,$$

donc

$$1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Ainsi,

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Limite au voisinage de 0

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \ln x \rightarrow -\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

c) Limite lorsque $x \rightarrow +\infty$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

d) Conclusion

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Elle prend donc une fois et une seule toute valeur réelle.

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ est bijective.}$$

2. Existence et unicité de x_n

Soit n un entier. L'équation demandée est

$$f(x) = n,$$

c'est-à-dire

$$x + \ln x = n.$$

D'après la question précédente, f est bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Par définition d'une bijection, pour toute valeur réelle y , l'équation

$$f(x) = y$$

admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

En particulier, pour $y = n$, il existe un unique réel positif x_n tel que

$$f(x_n) = n.$$

Ainsi,

$$x_n + \ln x_n = n.$$

Cette relation sera la relation fondamentale pour la suite (x_n) .

Il n'est pas nécessaire de chercher une formule explicite de x_n . Toute l'étude peut être faite à partir de l'identité

$$x_n + \ln x_n = n.$$

3. Sens de variation et limite de (x_n)

a) Montrons que (x_n) est croissante

Par définition,

$$f(x_n) = n$$

et

$$f(x_{n+1}) = n + 1.$$

On a évidemment

$$n < n + 1.$$

Donc

$$f(x_n) < f(x_{n+1}).$$

Or f est strictement croissante. Une fonction strictement croissante conserve l'ordre :

$$f(a) < f(b) \implies a < b.$$

On obtient alors

$$x_n < x_{n+1}.$$

Ainsi,

$$(x_n) \text{ est strictement croissante.}$$

b) Déterminons sa limite

Puisque (x_n) est croissante, deux situations seulement sont possibles : soit elle est majorée et elle converge vers une limite réelle, soit elle tend vers $+\infty$.

Supposons, pour raisonner par l'absurde, que (x_n) soit majorée. Comme elle est croissante, elle convergerait alors vers un réel $\ell > 0$.

La fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$, on aurait

$$f(x_n) \longrightarrow f(\ell).$$

Mais, par définition de x_n ,

$$f(x_n) = n.$$

Or

$$n \longrightarrow +\infty.$$

Il est impossible qu'une même suite $f(x_n)$ tende à la fois vers le réel $f(\ell)$ et vers $+\infty$.

L'hypothèse selon laquelle (x_n) est majorée est donc impossible.

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

4. Déterminer un équivalent simple de x_n

Nous repartons de la relation fondamentale

$$x_n + \ln x_n = n.$$

L'objectif est de comparer x_n à une expression simple. La présence du terme n dans le membre de droite suggère de comparer x_n à n .

a) Première comparaison : $x_n \leq n$

Pour $n \geq 1$, on a $x_n \geq x_1$ puisque la suite est croissante.

Or $x = 1$ vérifie

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1.$$

L'unicité de la solution de $f(x) = 1$ donne donc

$$x_1 = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\ln x_n \geq 0.$$

À partir de

$$x_n + \ln x_n = n,$$

on obtient

$$x_n = n - \ln x_n.$$

Comme $\ln x_n \geq 0$,

$$x_n \leq n.$$

Nous avons donc, pour $n \geq 1$,

$$1 \leq x_n \leq n.$$

b) Encadrement du logarithme

La fonction logarithme est croissante sur $]0, +\infty[$. De

$$1 \leq x_n \leq n,$$

on déduit

$$0 = \ln 1 \leq \ln x_n \leq \ln n.$$

Donc

$$0 \leq \ln x_n \leq \ln n.$$

Divisons par $n > 0$:

$$0 \leq \frac{\ln x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Or la limite classique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

donne, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_n}{n} = 0.$$

c) Étude du quotient $\frac{x_n}{n}$

Divisons maintenant l'égalité

$$x_n + \ln x_n = n$$

par n :

$$\frac{x_n}{n} + \frac{\ln x_n}{n} = 1.$$

Ainsi,

$$\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln x_n}{n}.$$

En passant à la limite et en utilisant le résultat précédent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1 - 0 = 1.$$

Donc

Un équivalent simple de x_n est

$$n.$$

En effet,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

Bilan de l'exercice

Nous avons établi successivement :

$$f(x) = x + \ln x \text{ est bijective de }]0, +\infty[\text{ vers } \mathbb{R},$$

$$\forall n, \exists ! x_n > 0 \text{ tel que } x_n + \ln x_n = n,$$

$$(x_n) \text{ est strictement croissante et } x_n \rightarrow +\infty,$$

et enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1,$$

ce qui confirme que l'équivalent simple recherché est n .

Exercice (d'après EML)

Étude complète d'une suite définie par récurrence

Énoncé

On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$$

et une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

u_0 étant un réel quelconque.

1. Étudier les variations de la fonction f , et déterminer le nombre d'antécédents par f d'un réel m en fonction des valeurs de m . Résoudre en particulier $f(x) = -1$.
2. Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2.$$

En déduire la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0 .

Correction détaillée

1. Étude de la fonction f et nombre d'antécédents

On a

$$f(x) = x^2 + 4x + 2.$$

Pour étudier les variations de f , calculons sa dérivée :

$$f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2).$$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc de celui de $x + 2$:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } x < -2, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = -2, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$

Ainsi :

- f est strictement décroissante sur $] -\infty, -2]$;
- f est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$.

Calculons la valeur de f au point où la dérivée s'annule :

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2.$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

car le terme x^2 domine dans le polynôme $x^2 + 4x + 2$.

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -2 \nearrow$	$+\infty$

On peut retrouver immédiatement ce minimum en écrivant f sous forme canonique :

$$f(x) = (x + 2)^2 - 2.$$

Comme $(x + 2)^2 \geq 0$ pour tout réel x , on obtient

$$f(x) \geq -2.$$

Le minimum de f est donc -2 , atteint uniquement pour $x = -2$.

Nombre d'antécédents d'un réel m

Chercher les antécédents de m revient à résoudre

$$f(x) = m.$$

Avec la forme canonique :

$$(x + 2)^2 - 2 = m,$$

d'où

$$(x + 2)^2 = m + 2.$$

Il suffit alors de discuter selon le signe de $m + 2$.

Premier cas : $m < -2$. Alors $m + 2 < 0$. Or un carré est toujours positif ou nul. L'équation

$$(x + 2)^2 = m + 2$$

n'a donc aucune solution réelle.

Ainsi, si $m < -2$, le réel m n'a **aucun antécédent** par f .

Deuxième cas : $m = -2$. On obtient

$$(x + 2)^2 = 0,$$

donc

$$x = -2.$$

Le réel -2 possède donc **un unique antécédent**, qui est -2 .

Troisième cas : $m > -2$. Alors $m + 2 > 0$ et

$$(x + 2)^2 = m + 2$$

donne

$$x + 2 = \sqrt{m + 2} \quad \text{ou} \quad x + 2 = -\sqrt{m + 2}.$$

Ainsi

$$x = -2 + \sqrt{m + 2} \quad \text{ou} \quad x = -2 - \sqrt{m + 2}.$$

Il y a donc **deux antécédents distincts**.

Conclusion

Pour un réel m :

Valeur de m	Nombre d'antécédents par f
$m < -2$	0
$m = -2$	1
$m > -2$	2

Résolution de $f(x) = -1$

On résout

$$x^2 + 4x + 2 = -1.$$

En utilisant la forme canonique :

$$(x + 2)^2 - 2 = -1,$$

donc

$$(x + 2)^2 = 1.$$

Ainsi

$$x + 2 = 1 \quad \text{ou} \quad x + 2 = -1,$$

d'où

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

2. Valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est stationnaire

La suite vérifie

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour qu'elle devienne constante à partir d'un certain rang, il faut qu'à un certain moment elle atteigne une valeur ℓ telle que

$$f(\ell) = \ell.$$

En effet, si $u_p = \ell$ et si $f(\ell) = \ell$, alors

$$u_{p+1} = f(u_p) = f(\ell) = \ell,$$

puis de même

$$u_{p+2} = f(u_{p+1}) = f(\ell) = \ell,$$

et ainsi de suite. La suite est alors constante à partir du rang p .

Commençons donc par chercher les points fixes de f .

On résout

$$f(x) = x.$$

Cela donne

$$x^2 + 4x + 2 = x,$$

puis

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Factorisons :

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Donc

$$(x + 1)(x + 2) = 0,$$

et finalement

$$\boxed{x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -2.}$$

Les deux valeurs fixes sont donc -1 et -2 .

Premier choix : $u_0 = -1$. On a

$$u_1 = f(-1) = -1.$$

Puis, de proche en proche,

$$u_n = -1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est constante dès le rang 0.

Deuxième choix : $u_0 = -2$. De même,

$$u_1 = f(-2) = -2,$$

et donc

$$u_n = -2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est constante dès le rang 0.

Peut-on obtenir encore une autre valeur de u_0 ? Oui. La suite peut devenir constante sans l'être dès le départ. Il suffit que u_0 soit envoyé sur l'un des points fixes.

Cherchons d'abord les antécédents de -1 . D'après la question 1,

$$f(x) = -1$$

a exactement les deux solutions

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = -3.$$

La valeur $u_0 = -1$ est déjà connue. Prenons donc

$$u_0 = -3.$$

Alors

$$u_1 = f(-3) = 9 - 12 + 2 = -1.$$

Comme -1 est un point fixe,

$$u_2 = f(-1) = -1,$$

puis

$$u_n = -1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

La suite est donc stationnaire à partir du rang 1.

Cherchons maintenant d'éventuels autres antécédents de -2 . D'après la question 1, -2 possède un seul antécédent, qui est -2 lui-même. On n'obtient donc aucune nouvelle valeur.

Enfin, pourrait-on atteindre -3 à un rang précédent, puis -1 au rang suivant ? Non, car $-3 < -2$ et la question 1 a montré que $f(x) \geq -2$ pour tout réel x . Ainsi -3 n'a aucun antécédent par f .

Il n'existe donc aucune autre possibilité.

Conclusion

Les trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire sont

$$u_0 \in \{-3, -2, -1\}.$$

Plus précisément :

- si $u_0 = -2$, alors $u_n = -2$ pour tout n ;
- si $u_0 = -1$, alors $u_n = -1$ pour tout n ;
- si $u_0 = -3$, alors $u_0 = -3$ et $u_n = -1$ pour tout $n \geq 1$.

3. Étude de la suite selon la valeur de u_0

Partons de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2.$$

Ajoutons 2 aux deux membres :

$$u_{n+1} + 2 = u_n^2 + 4u_n + 4.$$

Or

$$u_n^2 + 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2.}$$

Cette relation suggère de considérer la suite auxiliaire

$$v_n = u_n + 2.$$

Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2 = v_n^2.$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} = v_n^2}$$

avec

$$v_0 = u_0 + 2.$$

Idée essentielle

L'étude de (u_n) revient donc à étudier une suite très simple :

$$v_{n+1} = v_n^2.$$

Chaque terme est le carré du précédent.

Expression de v_n

Calculons les premiers termes :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0^2, \\ v_2 &= v_1^2 = (v_0^2)^2 = v_0^4, \\ v_3 &= v_2^2 = (v_0^4)^2 = v_0^8. \end{aligned}$$

Les exposants sont

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad \dots$$

c'est-à-dire

$$2^1, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad \dots$$

On obtient donc

$$\boxed{v_n = v_0^{2^n}.$$

Puisque $v_0 = u_0 + 2$,

$$v_n = (u_0 + 2)^{2^n}.$$

Et comme $u_n = v_n - 2$,

$$u_n = (u_0 + 2)^{2^n} - 2.$$

Cette formule permet de distinguer tous les cas en fonction de la position de $u_0 + 2$ par rapport à -1 , 0 et 1 .

Cas 1 : $u_0 = -2$

Alors

$$u_0 + 2 = 0.$$

Pour tout n ,

$$u_n + 2 = 0^{2^n} = 0,$$

donc

$$\boxed{u_n = -2.}$$

La suite est constante et converge vers -2 .

Cas 2 : $u_0 = -1$

Alors

$$u_0 + 2 = 1.$$

Pour tout n ,

$$u_n + 2 = 1^{2^n} = 1,$$

donc

$$\boxed{u_n = -1.}$$

La suite est constante et converge vers -1 .

Cas 3 : $u_0 = -3$

Alors

$$u_0 + 2 = -1.$$

Au rang 1,

$$u_1 + 2 = (-1)^2 = 1,$$

donc

$$u_1 = -1.$$

À partir de ce rang, on reste sur le point fixe -1 :

$$\boxed{u_n = -1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.}$$

La suite est stationnaire à partir du rang 1 et converge vers -1 .

Cas 4 : $-3 < u_0 < -2$

Dans ce cas,

$$-1 < u_0 + 2 < 0.$$

Ainsi

$$|u_0 + 2| < 1.$$

À partir du rang 1, l'exposant 2^n est pair, donc

$$0 < (u_0 + 2)^{2^n} < 1.$$

De plus, puisque tout nombre de $]0, 1[$ devient plus petit lorsqu'on le met au carré, on a pour $n \geq 1$:

$$0 < v_{n+1} = v_n^2 < v_n < 1.$$

Ainsi (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 1 et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $L \geq 0$.

En passant à la limite dans

$$v_{n+1} = v_n^2,$$

on obtient

$$L = L^2,$$

donc

$$L(L - 1) = 0.$$

Ainsi

$$L = 0 \quad \text{ou} \quad L = 1.$$

Mais, à partir du rang 1, $0 < v_n < 1$ et la suite est décroissante. Elle ne peut donc pas converger vers 1. Par conséquent,

$$L = 0.$$

Donc

$$v_n \longrightarrow 0,$$

et comme $u_n = v_n - 2$,

$$\boxed{u_n \longrightarrow -2.}$$

Remarquons toutefois que la suite (u_n) n'est pas décroissante dès le rang 0. En effet, $u_0 < -2$, tandis que

$$u_1 + 2 = (u_0 + 2)^2 > 0,$$

donc

$$u_1 > -2 > u_0.$$

Elle effectue d'abord un saut vers le haut, puis elle décroît vers -2 à partir du rang 1.

Cas 5 : $-2 < u_0 < -1$

Ici,

$$0 < u_0 + 2 < 1.$$

Donc

$$0 < v_0 < 1.$$

Puis, pour tout n ,

$$0 < v_n < 1.$$

Par conséquent,

$$v_{n+1} = v_n^2 < v_n.$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante et minorée par 0. Elle converge vers une limite $L \geq 0$.

Comme précédemment,

$$L = L^2,$$

donc $L = 0$ ou $L = 1$. Puisque (v_n) est décroissante et $v_0 < 1$, elle ne peut pas converger vers 1. Donc

$$L = 0.$$

Ainsi

$$v_n \longrightarrow 0 \implies u_n = v_n - 2 \longrightarrow -2.$$

De plus, comme $u_n = v_n - 2$, la monotonie de (u_n) est la même que celle de (v_n) . Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante et converge vers } -2.}$$

Cas 6 : $u_0 > -1$

Alors

$$u_0 + 2 > 1,$$

donc

$$v_0 > 1.$$

Si $v_n > 1$, alors

$$v_{n+1} = v_n^2 > v_n.$$

Ainsi (v_n) est strictement croissante.

Montrons qu'elle n'est pas majorée. Supposons au contraire qu'elle soit majorée. Étant croissante et majorée, elle convergerait vers une limite réelle $L \geq v_0 > 1$. En passant à la limite dans

$$v_{n+1} = v_n^2,$$

on aurait

$$L = L^2,$$

donc $L = 0$ ou $L = 1$, ce qui est impossible puisque $L > 1$.

Par conséquent,

$$v_n \longrightarrow +\infty.$$

Donc

$$\boxed{u_n \longrightarrow +\infty.}$$

Et puisque (v_n) est strictement croissante, (u_n) l'est également.

Cas 7 : $u_0 < -3$

Alors

$$u_0 + 2 < -1.$$

Donc

$$|u_0 + 2| > 1.$$

Au rang 1,

$$v_1 = v_0^2 > 1.$$

À partir de là, on se retrouve dans la situation précédente :

$$v_{n+1} = v_n^2 > v_n > 1 \quad (n \geq 1).$$

Ainsi

$$v_n \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\boxed{u_n \longrightarrow +\infty.}$$

Notons également que

$$u_0 < -3 < -1 < u_1,$$

car $v_1 > 1$ implique $u_1 = v_1 - 2 > -1$. Il y a donc dès le premier pas une augmentation. Puis la suite continue de croître strictement.

On peut donc écrire :

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante et tend vers } +\infty.}$$

Bilan général

Toutes les situations sont maintenant déterminées.

Valeur de u_0	Comportement de (u_n)	Limite
$u_0 < -3$	strictement croissante	$+\infty$
$u_0 = -3$	stationnaire à partir du rang 1	-1
$-3 < u_0 < -2$	augmente au premier pas, puis décroît	-2
$u_0 = -2$	constante	-2
$-2 < u_0 < -1$	strictement décroissante	-2
$u_0 = -1$	constante	-1
$u_0 > -1$	strictement croissante	$+\infty$

Conclusion

La relation décisive est

$$u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2.$$

En posant $v_n = u_n + 2$, on transforme la récurrence initiale en

$$v_{n+1} = v_n^2.$$

On obtient même la formule explicite

$$u_n = (u_0 + 2)^{2^n} - 2.$$

Cette expression rend immédiatement visibles les seuils essentiels

$$u_0 = -3, \quad u_0 = -2, \quad u_0 = -1,$$

qui correspondent respectivement à

$$u_0 + 2 = -1, \quad 0, \quad 1.$$

Vérification rapide des trois valeurs stationnaires

Pour terminer, vérifions directement :

$$u_0 = -3 \implies u_1 = f(-3) = -1 \implies u_n = -1 \text{ pour } n \geq 1,$$

$$u_0 = -2 \implies u_1 = f(-2) = -2 \implies u_n = -2 \text{ pour tout } n,$$

$$u_0 = -1 \implies u_1 = f(-1) = -1 \implies u_n = -1 \text{ pour tout } n.$$

Ainsi la réponse de la question 2 est bien

$$u_0 \in \{-3, -2, -1\}.$$

Exercice (d'après EDHEC)

Étude d'une suite définie implicitement

Énoncé

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

1. Étudier les variations de f_n .

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que

$$f_n(u_n) = 0.$$

3. Montrer que

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}$$

et en déduire la convergence de la suite (u_n) .

4. Montrer que $\frac{1}{n}$ est un équivalent de u_n , c'est-à-dire établir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1.$$

5. Déterminer un équivalent simple de

$$\frac{1}{n} - u_n.$$

Correction détaillée

1. Étude des variations de f_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

La fonction f_n est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons sa dérivée :

$$f'_n(x) = 5x^4 + n.$$

Or, pour tout réel x ,

$$x^4 \geq 0,$$

donc

$$5x^4 \geq 0.$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a aussi

$$n \geq 0.$$

Ainsi,

$$f'_n(x) = 5x^4 + n \geq 0.$$

Pour $n \geq 1$, on a même

$$f'_n(x) = 5x^4 + n \geq n > 0,$$

ce qui montre immédiatement que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = 0$,

$$f_0(x) = x^5 - 1,$$

et la fonction $x \mapsto x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi f_0 est également strictement croissante.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Étudions maintenant les limites aux extrémités de $\mathbb{R}$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le terme x^5 domine et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} nx = +\infty \quad (n \geq 1),$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

et nx est également négatif ou nul. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty.$$

On peut résumer les variations de f_n par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

2. Existence et unicité de u_n

On suppose maintenant $n \geq 1$.

Nous cherchons les solutions de

$$f_n(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^5 + nx - 1 = 0.$$

D'après la question précédente, f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons deux valeurs simples.

Pour $x = 0$:

$$f_n(0) = 0^5 + n \cdot 0 - 1 = -1.$$

Donc

$$\boxed{f_n(0) = -1 < 0.}$$

Pour $x = \frac{1}{n}$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 + n\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Or

$$n\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

donc

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5}.$$

Comme $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^5} > 0.$$

Ainsi

$$\boxed{f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0.}$$

Nous avons donc

$$f_n(0) < 0 < f_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction f_n étant continue sur l'intervalle

$$\left[0, \frac{1}{n}\right],$$

le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un réel u_n tel que

$$0 < u_n < \frac{1}{n}$$

et

$$f_n(u_n) = 0.$$

Enfin, puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que

$$f_n(u_n) = 0.$$

De plus,

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

L'encadrement obtenu ici est déjà très précieux : il permettra immédiatement de déterminer la limite de (u_n) .

3. Convergence de la suite (u_n)

D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

En particulier,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Ainsi la suite (u_n) est convergente et sa limite est 0.

$$u_n \longrightarrow 0.$$

Remarquons que cette conclusion ne nécessite pas d'étudier la monotonie de (u_n) : l'encadrement

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

suffit à lui seul.

4. Recherche d'un équivalent simple de u_n

Nous savons que u_n est défini par

$$f_n(u_n) = 0.$$

Par définition de f_n ,

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Donc

$$nu_n = 1 - u_n^5.$$

Nous voulons comparer u_n à $\frac{1}{n}$.

Calculons le quotient :

$$\frac{u_n}{1/n} = nu_n.$$

D'après l'égalité précédente,

$$\frac{u_n}{1/n} = 1 - u_n^5.$$

Or nous avons montré que

$$u_n \longrightarrow 0.$$

Donc, par continuité de la fonction $x \mapsto x^5$,

$$u_n^5 \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - u_n^5 \longrightarrow 1.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1.$$

Un équivalent simple de u_n est

$$\frac{1}{n}.$$

L'égalité

$$nu_n = 1 - u_n^5$$

est beaucoup plus efficace que d'essayer de calculer explicitement u_n , ce qui serait inutilement compliqué.

5. Équivalent de $\frac{1}{n} - u_n$

Nous repartons de l'équation exacte satisfaite par u_n :

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Elle donne

$$1 - nu_n = u_n^5.$$

Divisons les deux membres par n :

$$\frac{1 - nu_n}{n} = \frac{u_n^5}{n}.$$

Or

$$\frac{1 - nu_n}{n} = \frac{1}{n} - u_n.$$

Ainsi nous obtenons l'identité exacte

$$\boxed{\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n}.$$

Cette égalité explique déjà pourquoi la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{n}$.

À la question précédente, nous avons établi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1.$$

Nous allons donc comparer

$$\frac{1}{n} - u_n$$

à

$$\frac{1}{n^6}.$$

Calculons le quotient :

$$\frac{\frac{1}{n} - u_n}{1/n^6} = n^6 \left(\frac{1}{n} - u_n \right).$$

En utilisant

$$\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n},$$

on obtient

$$n^6 \left(\frac{1}{n} - u_n \right) = n^6 \frac{u_n^5}{n} = n^5 u_n^5.$$

Or

$$n^5 u_n^5 = (nu_n)^5.$$

Donc

$$\frac{\frac{1}{n} - u_n}{1/n^6} = (nu_n)^5.$$

Comme

$$nu_n \longrightarrow 1,$$

la continuité de la fonction $x \mapsto x^5$ donne

$$(nu_n)^5 \longrightarrow 1^5 = 1.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - u_n}{1/n^6} = 1.$$

Un équivalent simple de

$$\frac{1}{n} - u_n$$

est

$$\frac{1}{n^6}.$$

Synthèse de la méthode

L'exercice repose sur trois idées essentielles.

1. Exploiter la monotonie de la fonction

La dérivée

$$f'_n(x) = 5x^4 + n$$

est positive pour $n \geq 1$. La fonction f_n est donc strictement croissante. Une fois que l'on trouve deux nombres entre lesquels f_n change de signe, l'existence et l'unicité de la racine sont immédiates.

Ici,

$$f_n(0) = -1 < 0$$

et

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} > 0.$$

D'où

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

2. Utiliser l'équation exacte satisfaite par u_n

La relation

$$f_n(u_n) = 0$$

s'écrit

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Elle permet d'obtenir immédiatement

$$nu_n = 1 - u_n^5.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$,

$$nu_n \rightarrow 1.$$

C'est exactement ce qu'il faut pour prouver que $\frac{1}{n}$ est un équivalent de u_n .

3. Transformer la différence demandée

Pour la dernière question, on ne cherche pas à soustraire deux expressions proches de façon approximative. On utilise encore l'équation exacte :

$$1 - nu_n = u_n^5,$$

d'où

$$\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n}.$$

Ensuite,

$$\frac{\frac{1}{n} - u_n}{1/n^6} = (nu_n)^5 \longrightarrow 1.$$

Résultats finaux

$$u_n \longrightarrow 0,$$

$$\frac{1}{n} \text{ est un équivalent de } u_n,$$

$$\frac{1}{n^6} \text{ est un équivalent de } \frac{1}{n} - u_n.$$

Exercice

Suites définies à l'aide de maximums et de minimums

Énoncé

Soit (u_n) une suite bornée. On introduit alors deux suites auxiliaires définies par

$$a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad \text{et} \quad b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n).$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) si elles ont la même limite ?
3. On pose désormais

$$c_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n}).$$

Cette suite est-elle nécessairement convergente ?

Correction détaillée

Préliminaire : ce que signifie “ (u_n) est bornée”

Dire que la suite (u_n) est bornée signifie qu’il existe deux réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq u_n \leq M.$$

Autrement dit, aucun terme de la suite ne descend au-dessous de m et aucun terme ne dépasse M .

Cette information va être essentielle pour appliquer le théorème de convergence monotone.

Idée clé

Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge.

1. Convergence de (a_n) et de (b_n)

A. Étude de la suite (a_n)

Par définition,

$$a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n).$$

Au rang suivant,

$$a_{n+1} = \max(u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}).$$

Mais le maximum des $n + 1$ premiers termes est précisément a_n . On peut donc écrire

$$a_{n+1} = \max(a_n, u_{n+1}).$$

Or le maximum de deux nombres est toujours supérieur ou égal à chacun d’eux. En particulier,

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

Ainsi,

$$(a_n) \text{ est croissante.}$$

Il faut maintenant montrer qu’elle est majorée.

Comme (u_n) est bornée, il existe un réel M tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k \leq M.$$

Donc, pour un entier n fixé,

$$u_0 \leq M, \quad u_1 \leq M, \quad \dots, \quad u_n \leq M.$$

Le maximum de ces nombres ne peut donc pas dépasser M :

$$a_n = \max(u_0, \dots, u_n) \leq M.$$

Par conséquent,

$$(a_n) \text{ est majorée.}$$

La suite (a_n) est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone,

$$(a_n) \text{ converge.}$$

Notons sa limite α :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha.$$

B. Étude de la suite (b_n)

Par définition,

$$b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n).$$

Au rang suivant,

$$b_{n+1} = \min(u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}).$$

Donc

$$b_{n+1} = \min(b_n, u_{n+1}).$$

Le minimum de deux nombres est inférieur ou égal à chacun d'eux. Ainsi,

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

Donc

$$(b_n) \text{ est décroissante.}$$

Comme (u_n) est bornée, il existe un réel m tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_k.$$

Ainsi, pour tout n ,

$$m \leq u_0, \quad m \leq u_1, \quad \dots, \quad m \leq u_n.$$

Le minimum de ces nombres est encore supérieur ou égal à m :

$$m \leq b_n.$$

Donc

$$(b_n) \text{ est minorée.}$$

La suite (b_n) est décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence monotone,

$$(b_n) \text{ converge.}$$

Notons sa limite β :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta.$$

Conclusion

Les deux suites auxiliaires sont convergentes :

$$a_n \longrightarrow \alpha \quad \text{et} \quad b_n \longrightarrow \beta.$$

2. Que se passe-t-il si (a_n) et (b_n) ont la même limite ?

Pour tout entier naturel n , le terme u_n appartient à la liste

$$u_0, u_1, \dots, u_n.$$

Or b_n est le minimum de cette liste et a_n son maximum. On a donc nécessairement

$$b_n \leq u_n \leq a_n.$$

Supposons maintenant que (a_n) et (b_n) aient la même limite. Notons-la ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell.$$

L'encadrement précédent devient

$$b_n \leq u_n \leq a_n.$$

Les deux suites qui encadrent u_n convergent vers le même réel ℓ . D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Idée clé

Les suites (b_n) et (a_n) jouent ici le rôle d'une "barrière inférieure" et d'une "barrière supérieure" pour u_n . Si ces deux barrières finissent par se rejoindre vers la même valeur ℓ , alors u_n est forcée de rejoindre elle aussi ℓ .

Conclusion

Si (a_n) et (b_n) ont la même limite ℓ , alors

$$(u_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

3. La suite $c_n = \max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n})$ est-elle toujours convergente ?

La réponse est

non.

Il suffit de construire une suite bornée (u_n) pour laquelle (c_n) ne converge pas.

Construction d'un contre-exemple

Considérons la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est une puissance de } 3, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 1, \quad u_4 = 0, \dots, \quad u_9 = 1, \dots$$

Tous les termes valent 0 ou 1. La suite est donc bornée :

$$\boxed{0 \leq u_n \leq 1.}$$

Nous allons montrer que (c_n) prend la valeur 1 pour une infinité d'indices et la valeur 0 pour une autre infinité d'indices.

Premier choix d'indices : $n = 3^k$

Prenons

$$n = 3^k.$$

Par définition,

$$c_{3^k} = \max(u_{3^k}, u_{3^k+1}, \dots, u_{2 \cdot 3^k}).$$

Mais 3^k est une puissance de 3, donc

$$u_{3^k} = 1.$$

Tous les termes de la suite étant au plus égaux à 1, le maximum du bloc vaut donc exactement 1 :

$$\boxed{c_{3^k} = 1.}$$

Cela est vrai pour tout k .

Ainsi, la sous-suite (c_{3^k}) est constante égale à 1 et donc

$$\boxed{c_{3^k} \longrightarrow 1.}$$

Deuxième choix d'indices : $n = 3^k + 1$

Prenons maintenant

$$n = 3^k + 1.$$

Le bloc utilisé pour calculer c_n va de

$$3^k + 1 \quad \text{à} \quad 2(3^k + 1) = 2 \cdot 3^k + 2.$$

Nous cherchons à savoir si ce bloc contient une puissance de 3.

La puissance de 3 qui précède est 3^k , mais elle n'appartient pas au bloc puisque

$$3^k < 3^k + 1.$$

La puissance de 3 suivante est

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k.$$

Pour $k \geq 1$, on a $3^k \geq 3$, donc

$$2 \cdot 3^k + 2 < 3 \cdot 3^k.$$

En effet,

$$2 \cdot 3^k + 2 < 3 \cdot 3^k \iff 2 < 3^k,$$

ce qui est vrai pour $k \geq 1$.

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, l'intervalle d'indices

$$\{3^k + 1, 3^k + 2, \dots, 2 \cdot 3^k + 2\}$$

ne contient aucune puissance de 3.

Par définition de (u_n) , tous les termes correspondants valent donc 0. Ainsi,

$$c_{3^k+1} = 0 \quad (k \geq 1).$$

Donc

$$c_{3^k+1} \longrightarrow 0.$$

Conclusion sur (c_n)

Nous avons trouvé deux sous-suites de (c_n) :

$$c_{3^k} \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad c_{3^k+1} \longrightarrow 0.$$

Si (c_n) était convergente, toutes ses sous-suites convergeraient vers la même limite. Ici, les deux limites obtenues sont différentes.

Par conséquent,

$$(c_n) \text{ n'est pas nécessairement convergente.}$$

Conclusion

Même lorsque (u_n) est bornée, la suite

$$c_n = \max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n})$$

peut ne pas converger. Un contre-exemple est donné par

$$u_n = 1 \text{ si } n \text{ est une puissance de } 3, \quad u_n = 0 \text{ sinon.}$$

Synthèse

Objet	Résultat
$a_n = \max(u_0, \dots, u_n)$	(a_n) est croissante et majorée, donc convergente.
$b_n = \min(u_0, \dots, u_n)$	(b_n) est décroissante et minorée, donc convergente.
Même limite pour a_n et b_n	Comme $b_n \leq u_n \leq a_n$, le théorème des gendarmes entraîne que (u_n) converge vers cette même limite.
$c_n = \max(u_n, \dots, u_{2n})$	La convergence n'est pas garantie. Une suite bornée peut produire une suite (c_n) non convergente.

À retenir

- Ajouter un nouveau terme à une liste ne peut pas faire diminuer son maximum.
- Ajouter un nouveau terme à une liste ne peut pas faire augmenter son minimum.
- Le caractère borné de (u_n) fournit automatiquement une borne supérieure à (a_n) et une borne inférieure à (b_n) .
- Pour montrer qu'une affirmation du type "toujours convergente" est fausse, il suffit de construire un seul contre-exemple.
- Pour prouver qu'une suite ne converge pas, on peut chercher deux sous-suites ayant deux limites différentes.

Remarque importante

Pour montrer qu'une suite (c_n) ne converge pas, il n'est pas nécessaire d'étudier tous ses termes. Il suffit de trouver deux sous-suites qui ont des limites différentes.

En effet, si (c_n) convergeait vers L , alors toutes ses sous-suites devraient également converger vers L .

Ici,

$$c_{3^k} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad c_{3^k+1} \rightarrow 0.$$

Les indices 3^k et $3^k + 1$ ne couvrent pas tout $\mathbb{N}$, mais ce n'est pas nécessaire. Les deux limites étant différentes, la suite (c_n) ne peut pas converger.

Deux sous-suites de limites différentes suffisent pour prouver qu'une suite diverge.

Exercice

Moyenne des premiers termes d'une suite convergente

Énoncé

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite finie ℓ . On définit la suite (v_n) par

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Autrement dit, v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n) .

Montrer que la suite (v_n) converge également vers ℓ . On commencera par le cas plus simple où $\ell = 0$, en revenant à la définition de la limite.

Correction détaillée

1. Comprendre ce qu'il faut démontrer

On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Cela signifie que, lorsque n devient grand, les termes u_n sont aussi proches que l'on veut de ℓ .

La suite (v_n) est constituée des moyennes successives :

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad v_3 = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}, \quad \dots$$

Nous devons prouver que ces moyennes se rapprochent, elles aussi, de ℓ .

Idée essentielle

Dans une moyenne comportant un très grand nombre de termes, les quelques premiers termes de la suite peuvent être éloignés de ℓ , mais leur influence devient de plus en plus faible, car leur somme est divisée par n . En revanche, tous les termes d'indice suffisamment grand sont déjà proches de ℓ .

2. Premier cas : $\ell = 0$

Supposons d'abord que

$$u_n \longrightarrow 0.$$

Nous voulons montrer que

$$v_n \longrightarrow 0.$$

Rappel

Dire que $u_n \rightarrow 0$ signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$n \geq N \implies |u_n| < \varepsilon.$$

Prenons donc un réel arbitraire

$$\varepsilon > 0.$$

Notre objectif est de montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$|v_n| < \varepsilon.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, on peut appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon/2$ à la place de ε . Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que

$$k \geq N \implies |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons maintenant un entier $n \geq N$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Nous séparons la somme en deux parties :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} u_k}_{\text{premiers termes}} + \underbrace{\sum_{k=N}^n u_k}_{\text{termes d'indice } \geq N}.$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n u_k.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|v_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|.$$

Posons

$$A = \sum_{k=1}^{N-1} |u_k|.$$

Le nombre A est un réel fixe : il ne dépend plus de n , car il contient seulement les termes $u_1, \dots, u_{N-1}$.

On obtient alors

$$|v_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|.$$

Or, pour tout $k \geq N$,

$$|u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il y a $n - N + 1$ termes dans la somme allant de $k = N$ à $k = n$. Donc

$$\sum_{k=N}^n |u_k| < (n - N + 1) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| < \frac{n - N + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme

$$0 < \frac{n - N + 1}{n} \leq 1,$$

on en déduit

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il reste à contrôler le premier morceau A/n . Puisque A est fixé et

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

on a

$$\frac{A}{n} \longrightarrow 0.$$

Il existe donc un entier N_1 tel que

$$n \geq N_1 \implies \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout

$$n \geq \max(N, N_1),$$

nous avons alors simultanément

$$\frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la définition de la limite donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.}$$

Conclusion

Nous avons démontré le résultat dans le cas $u_n \rightarrow 0$:

$$\boxed{u_n \rightarrow 0 \implies \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \rightarrow 0.}$$

3. Cas général : $u_n \rightarrow \ell$

Revenons maintenant au cas général :

$$u_n \longrightarrow \ell.$$

L'idée consiste à ramener ce cas au cas précédent en soustrayant ℓ . Définissons une nouvelle suite (w_n) par

$$w_n = u_n - \ell.$$

Puisque $u_n \rightarrow \ell$, on a immédiatement

$$w_n \longrightarrow 0.$$

D'après la première partie, la moyenne des n premiers termes de (w_n) tend donc vers 0 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \longrightarrow 0.$$

Calculons cette moyenne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell).$$

En séparant les sommes,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \ell = n\ell.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = v_n - \frac{n\ell}{n} = v_n - \ell.$$

Nous avons donc obtenu

$$v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell).$$

Le membre de droite tend vers 0. Par conséquent,

$$v_n - \ell \longrightarrow 0,$$

ce qui équivaut à

$$v_n \longrightarrow \ell.$$

Conclusion

Si une suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ , alors la suite des moyennes de ses premiers termes

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge elle aussi vers ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

4. Pourquoi les premiers termes ne gênent-ils pas ?

Cette démonstration repose sur une idée importante qu'il faut bien comprendre.

Fixons un rang N . Dans la moyenne

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n} + \frac{u_N + \cdots + u_n}{n},$$

les $N - 1$ premiers termes sont en nombre fixe. Leur contribution est

$$\frac{u_1 + \cdots + u_{N-1}}{n}.$$

Le numérateur est fixe alors que le dénominateur n devient arbitrairement grand. Cette contribution tend donc vers 0.

À l'inverse, lorsque n est grand, la grande majorité des termes de la deuxième partie

$$u_N, u_{N+1}, \dots, u_n$$

sont tous proches de la limite ℓ . La moyenne complète est donc forcée de se rapprocher de ℓ .

Idée essentielle

Quelques termes éloignés de la limite ne peuvent pas modifier la limite d'une moyenne portant sur un nombre de termes qui tend vers l'infini.

5. Exemple numérique pour visualiser le résultat

Considérons par exemple

$$u_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

On a

$$u_n \longrightarrow 2.$$

La moyenne correspondante est

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{1}{k} \right).$$

Donc

$$v_n = \frac{1}{n} \left(2n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Le théorème démontré ci-dessus permet immédiatement d'affirmer que

$$\boxed{v_n \longrightarrow 2.}$$

Cet exemple illustre bien le phénomène : même si tous les termes de la suite ne sont pas égaux à 2, leur moyenne finit par se rapprocher de 2.

6. Schéma de démonstration à retenir

Pour démontrer ce résultat dans un exercice, on peut retenir le plan suivant :

Étape 1. Traiter d'abord le cas $u_n \rightarrow 0$.

Étape 2. Fixer $\varepsilon > 0$ et choisir N tel que

$$k \geq N \implies |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Étape 3. Séparer la moyenne en deux morceaux :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n u_k.$$

Étape 4. Montrer que la première partie devient petite car son numérateur est fixe et son dénominateur tend vers $+\infty$.

Étape 5. Montrer que la deuxième partie est petite car tous les termes qui la composent sont petits.

Étape 6. Pour le cas général $u_n \rightarrow \ell$, poser

$$w_n = u_n - \ell$$

et appliquer le résultat précédent à (w_n) .

Une suite convergente et la suite des moyennes de ses premiers termes ont la même limite.

EMLyon 1991, Exercice 2**Énoncé**

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1. \end{aligned}$$

I. Étude de f .

1. Former le tableau de variation de f .
2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
(b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé d'unité 5 cm, et préciser la position relative de (C) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion).

Correction détaillée**Avant de commencer : domaine de définition**

Pour tout réel x , on a

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Ainsi $\sqrt{x^2 + 1}$ existe et n'est jamais nul. La fonction f est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

Idée générale

Pour construire la courbe de f , nous allons successivement déterminer ses limites, le signe de sa dérivée, ses variations, quelques points remarquables et enfin sa position par rapport à la droite $y = x$.

1. Tableau de variation de f

On écrit

$$f(x) = (x+1)(x^2+1)^{-1/2} - 1.$$

La dérivée de $(x+1)$ est 1 et

$$\frac{d}{dx} \left((x^2+1)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x = -x(x^2+1)^{-3/2}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+1)^{-1/2} + (x+1)[-x(x^2+1)^{-3/2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Mettons au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + 1 - x(x+1)}{(x^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{(x^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \boxed{\frac{1-x}{(x^2 + 1)^{3/2}}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur $(x^2 + 1)^{3/2}$ est strictement positif pour tout x . Le signe de $f'(x)$ est donc exactement celui de $1 - x$:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x < 1, \\ f'(1) = 0, & x = 1, \\ f'(x) < 0, & x > 1. \end{cases}$$

Donc f est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Calcul des limites aux deux infinis

Le point délicat est le signe de x lorsqu'on extrait x^2 de la racine :

$$\sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$. Alors $|x| = x$, donc

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}.$$

Comme $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$,

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

La droite $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à droite.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$. Alors $|x| = -x$, donc

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= -\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \longrightarrow -1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2}.$$

La droite $y = -2$ est donc une asymptote horizontale à gauche.

Valeur au sommet des variations

Au point $x = 1$,

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1+1}{\sqrt{1^2+1}} - 1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 \\ &= \boxed{\sqrt{2} - 1}. \end{aligned}$$

On peut maintenant dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2} - 1$	$\searrow$	0

Réponse à la question 1

La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, 1]$, atteint son maximum $\sqrt{2} - 1$ en $x = 1$, puis est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2(a). Résolution de l'équation $f(x) = x$

Nous devons résoudre

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = x.$$

Ajoutons 1 aux deux membres :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = x+1.$$

On ramène tout du même côté en factorisant $x+1$:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) &= 0, \\ (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Premier cas :

$$x+1=0 \implies \boxed{x=-1}.$$

Deuxième cas :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \implies \sqrt{x^2+1} = 1.$$

Les deux membres sont positifs, donc nous pouvons élever au carré :

$$x^2+1=1 \implies x^2=0 \implies \boxed{x=0}.$$

Les deux valeurs conviennent bien :

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0.$$

Réponse à la question 2(a)

$$\boxed{f(x) = x \iff x \in \{-1, 0\}}.$$

La courbe (C) coupe donc la première bissectrice $y = x$ aux points $(-1, -1)$ et $(0, 0)$.

2(b). Résolution de l'inéquation $f(x) \leq x$

Partons de

$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x.$$

Comme $-1 - x = -(x+1)$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1) \\ &= (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) - x = (x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right).$$

Étudions le deuxième facteur. Puisque $x^2 + 1 \geq 1$,

$$\sqrt{x^2 + 1} \geq 1.$$

En prenant les inverses de deux nombres strictement positifs, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 1.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \leq 0,$$

et l'égalité a lieu seulement lorsque $x = 0$.

Le premier facteur $x + 1$ est négatif si $x < -1$, nul si $x = -1$, positif si $x > -1$.

Nous obtenons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$	$-$	$-$	0	$-$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$-$

Or

$$f(x) \leq x \iff f(x) - x \leq 0.$$

Nous lisons donc dans le tableau :

$$x \in [-1, +\infty[.$$

Lecture géométrique

Lorsque $f(x) > x$, la courbe (C) est au-dessus de la droite $y = x$. Lorsque $f(x) < x$, elle est au-dessous. Les égalités correspondent aux points d'intersection.

Réponse à la question 2(b)

$$f(x) \leq x \iff x \in [-1, +\infty[.$$

Ainsi (C) est au-dessus de la première bissectrice pour $x < -1$, la rencontre en $x = -1$, puis reste au-dessous pour $x > -1$, sauf qu'elle la touche de nouveau en $x = 0$.

3. Tracé de la courbe et position relative avec la première bissectrice

Pour réaliser un tracé précis, rassemblons toutes les informations obtenues.

a) Asymptotes horizontales

Nous avons montré que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2,$$

donc $y = -2$ est une asymptote horizontale à gauche, et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

donc $y = 0$ est une asymptote horizontale à droite.

b) Points remarquables

Nous connaissons :

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \sqrt{2} - 1.$$

Ainsi la courbe passe par

$$A(-1, -1), \quad O(0, 0), \quad M(1, \sqrt{2} - 1).$$

Le point M est le maximum de la courbe puisque f' change de signe de $+$ vers $-$ en $x = 1$.

c) Une information utile au point O

Calculons la dérivée en 0 :

$$f'(0) = \frac{1 - 0}{(0^2 + 1)^{3/2}} = 1.$$

La tangente à (C) au point $O(0, 0)$ a donc pour pente 1 et pour équation

$$y = x.$$

Cela explique pourquoi la courbe touche la première bissectrice en O sans la traverser : de part et d'autre de 0 (tout en restant > -1), nous avons $f(x) \leq x$.

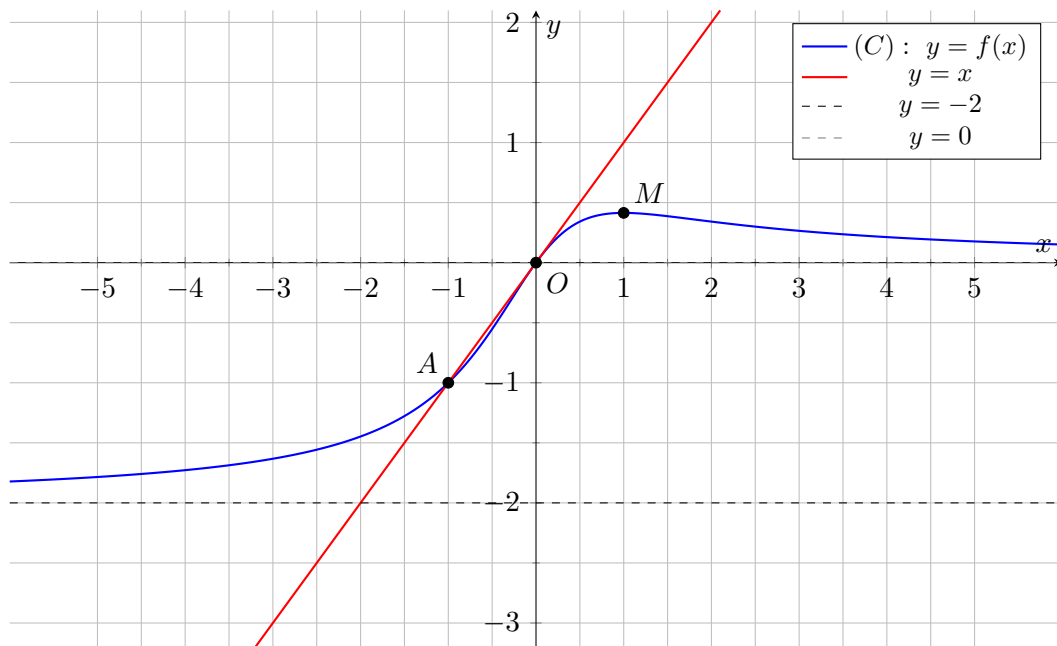
d) Position relative avec $y = x$

D'après la question 2(b) :

$$\begin{cases} f(x) > x, & x < -1, \\ f(x) = x, & x = -1 \text{ ou } x = 0, \\ f(x) < x, & x > -1, x \neq 0. \end{cases}$$

Donc :

- sur $] -\infty, -1[$, (C) est **au-dessus** de $y = x$;
- en $A(-1, -1)$, (C) **coupe** la droite $y = x$;
- sur $] -1, 0[$, (C) est **au-dessous** de $y = x$;
- en $O(0, 0)$, (C) **touche** la droite $y = x$;
- sur $] 0, +\infty[$, (C) reste **au-dessous** de $y = x$.



Bilan de l'étude

La courbe (C) part, lorsque x devient très négatif, au voisinage de l'asymptote $y = -2$. Elle croît, coupe la première bissectrice en $A(-1, -1)$, passe par $O(0, 0)$ où elle est tangente à $y = x$, puis atteint son maximum

$$M(1, \sqrt{2} - 1).$$

Ensuite elle décroît et se rapproche de l'axe des abscisses $y = 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Résumé à retenir

Dérivée

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Variations

croissante sur $] -\infty, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$

Maximum

$$f(1) = \sqrt{2} - 1$$

Limite à gauche

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

Limite à droite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Solutions de $f(x) = x$

$$x = -1 \text{ ou } x = 0$$

Solutions de $f(x) \leq x$

$$x \in [-1, +\infty[$$

Points communs avec $y = x$ $(-1, -1)$ et $(0, 0)$

EMLyon 1991 – Exercice 2**II. Étude d'une suite récurrente****Énoncé**

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?
2. On suppose ici $u_0 < -1$.
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.
 - (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - (c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.
3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. On suppose ici $u_0 > 0$. Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ce cas ?

Rappels utiles sur la fonction f

Dans la première partie de l'exercice, on a étudié la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Nous aurons surtout besoin de comparer $f(x)$ à x , et de savoir où se trouve $f(x)$ selon la position de x .

Les deux points fixes de f sont les solutions de $f(x) = x$:

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 0.$$

Nous utiliserons également les comparaisons suivantes :

$$\begin{array}{ll} x < -1 & \implies -1 > f(x) > x, \\ -1 < x < 0 & \implies -1 < f(x) < x < 0, \\ x > 0 & \implies 0 < f(x) < x. \end{array}$$

Ces trois lignes seront justifiées au fur et à mesure afin que la correction reste autonome.

1. Cas $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$ **Premier cas : $u_0 = -1$**

Calculons u_1 :

$$u_1 = f(u_0) = f(-1).$$

Or

$$f(-1) = \frac{-1+1}{\sqrt{(-1)^2+1}} - 1 = \frac{0}{\sqrt{2}} - 1 = -1.$$

Ainsi

$$u_1 = -1 = u_0.$$

Puis, si un terme vaut -1 , le terme suivant vaut encore

$$f(-1) = -1.$$

Donc tous les termes sont égaux à -1 :

$$u_n = -1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est donc constante, et en particulier convergente vers -1 .

Deuxième cas : $u_0 = 0$

De même,

$$f(0) = \frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Donc

$$u_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est constante et converge vers 0 .

Conclusion

Les nombres -1 et 0 sont des **points fixes** de f . Si la suite commence sur l'un de ces deux nombres, elle y reste pour toujours.

2. Cas $u_0 < -1$ **2(a). Montrer que $u_n < -1$ pour tout n**

Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

Initialisation. Par hypothèse,

$$u_0 < -1.$$

La propriété est donc vraie au rang 0 .

Hérédité. Supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, que

$$u_n < -1.$$

Alors

$$u_n + 1 < 0.$$

De plus,

$$\sqrt{u_n^2 + 1} > 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 0.$$

Mais

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1.$$

En retranchant 1 à un nombre négatif, on obtient un nombre strictement inférieur à -1 :

$$u_{n+1} < -1.$$

La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < -1.}$$

Idée à retenir

L'intervalle $] -\infty, -1[$ est ici **stable** par f : dès qu'un terme de la suite appartient à cet intervalle, tous les termes suivants y restent.

2(b). Montrer que (u_n) est croissante

Nous savons maintenant que, pour tout n ,

$$u_n < -1.$$

Il suffit donc de montrer que

$$f(x) > x \quad \text{lorsque } x < -1.$$

Partons de

$$f(x) - x = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 - x.$$

Comme

$$-1 - x = -(x + 1),$$

on peut factoriser par $x + 1$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - (x + 1) \\ &= (x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pour $x < -1$:

$$x + 1 < 0.$$

Et puisque $x^2 > 1$, on a

$$x^2 + 1 > 2 > 1,$$

donc

$$\sqrt{x^2 + 1} > 1 \implies \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0.$$

Nous avons donc le produit de deux nombres négatifs :

$$(x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) > 0.$$

Ainsi

$$f(x) - x > 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) > x \text{ pour } x < -1.}$$

En prenant $x = u_n$, puisque $u_n < -1$, on obtient

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$

Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

2(c). Convergence et limite

Nous avons démontré deux propriétés :

$$\boxed{u_{n+1} > u_n} \quad \text{et} \quad \boxed{u_n < -1}.$$

Ainsi, (u_n) est croissante et majorée par -1 .

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge. Notons sa limite L :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Comme $u_n < -1$ pour tout n , on a nécessairement

$$L \leq -1.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Puisque

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

en passant à la limite dans cette relation, on obtient

$$L = f(L).$$

La limite doit donc être un point fixe de f .

Or les seules solutions de $f(x) = x$ sont

$$-1 \quad \text{et} \quad 0.$$

Mais nous savons déjà que $L \leq -1$. La valeur 0 est donc impossible.

Par conséquent,

$$\boxed{L = -1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1}.$$

Conclusion

Si $u_0 < -1$, alors la suite reste toujours strictement inférieure à -1 , elle est croissante et elle se rapproche de -1 :

$$\boxed{u_0 < u_1 < u_2 < \dots < -1 \quad \text{et} \quad u_n \longrightarrow -1}.$$

3. Cas $-1 < u_0 < 0$

L'objectif est de montrer que la suite reste dans l'intervalle $] -1, 0[$, qu'elle est monotone, puis d'utiliser le théorème de convergence monotone.

Étape 1 : stabilité de l'intervalle $] -1, 0[$

Soit x tel que

$$-1 < x < 0.$$

Montrons d'abord que $f(x) > -1$. Comme $x > -1$, on a

$$x + 1 > 0.$$

Et comme $\sqrt{x^2 + 1} > 0$,

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0.$$

Donc

$$f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 > -1.$$

Montrons maintenant que $f(x) < 0$. Il suffit de vérifier que

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1.$$

Les deux membres sont positifs, donc nous pouvons comparer leurs carrés :

$$(x + 1)^2 < x^2 + 1$$

équivalent à

$$x^2 + 2x + 1 < x^2 + 1,$$

donc à

$$2x < 0,$$

ce qui est vrai puisque $x < 0$.

Ainsi

$$-1 < f(x) < 0.$$

Donc l'intervalle $] -1, 0[$ est stable par f .

Comme $-1 < u_0 < 0$, une récurrence immédiate donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 < u_n < 0.}$$

Étape 2 : sens de variation

Pour $-1 < x < 0$, reprenons

$$f(x) - x = (x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right).$$

Dans cet intervalle,

$$x + 1 > 0.$$

De plus, $x \neq 0$, donc $x^2 > 0$, d'où

$$\sqrt{x^2 + 1} > 1 \quad \implies \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0.$$

Le produit est donc négatif :

$$f(x) - x < 0.$$

Ainsi

$$f(x) < x.$$

En prenant $x = u_n$,

$$u_{n+1} < u_n.$$

Donc

$$(u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Étape 3 : convergence

La suite est décroissante et, puisque $u_n > -1$, elle est minorée par -1 . Elle est donc convergente.

Notons L sa limite. Puisque $u_n < 0$ pour tout n et que la suite est décroissante,

$$L \leq u_0 < 0.$$

Ainsi L ne peut pas être égal à 0.

Comme précédemment, la continuité de f et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donnent

$$L = f(L).$$

Les seuls points fixes étant -1 et 0 , et 0 étant impossible, il reste

$$L = -1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Conclusion

Si $-1 < u_0 < 0$, alors

$$-1 < u_{n+1} < u_n < 0$$

pour tout n , et la suite décroît vers -1 .

4. Cas $u_0 > 0$

L'énoncé demande ici seulement le résultat. On obtient :

$$\boxed{\text{si } u_0 > 0, \text{ alors } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

Pour comprendre ce résultat, observons brièvement ce qui se passe. Si $x > 0$, alors

$$x + 1 > \sqrt{x^2 + 1},$$

car, les deux membres étant positifs,

$$(x + 1)^2 - (x^2 + 1) = 2x > 0.$$

Donc

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 1,$$

et ainsi

$$f(x) > 0.$$

D'autre part,

$$f(x) - x = (x + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) < 0,$$

car $x + 1 > 0$ et $1/\sqrt{x^2 + 1} - 1 < 0$.

Ainsi, pour $x > 0$,

$$0 < f(x) < x.$$

Cela conduit à

$$0 < u_{n+1} < u_n.$$

La suite est donc positive et décroissante ; sa limite ne peut être qu'un point fixe non négatif de f , donc 0.

Bilan complet selon la valeur de u_0

Valeur de u_0	Comportement de (u_n)	Limite
$u_0 < -1$	croissante, toujours < -1	-1
$u_0 = -1$	constante : $u_n = -1$	-1
$-1 < u_0 < 0$	décroissante, toujours dans $] -1, 0[$	-1
$u_0 = 0$	constante : $u_n = 0$	0
$u_0 > 0$	décroissante, toujours > 0	0

Point important

Le point clé d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est souvent le suivant :

- trouver un intervalle dans lequel la suite reste enfermée ;
- comparer $f(x)$ à x sur cet intervalle pour déterminer le sens de variation ;
- appliquer le théorème de convergence monotone ;
- enfin, si la suite converge vers L , utiliser la continuité de f pour écrire $L = f(L)$.

Maths III HEC/ESCP 2002 – Parties A et B du problème

Énoncé et correction détaillée

Énoncé

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Partie A : Exemples**1. Premiers exemples**

Pour tout entier naturel n , calculer w_n en fonction de n , dans chacun des cas suivants :

- (a) pour tout entier naturel n , $u_n = 2$ et $v_n = 3$;
- (b) pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n , qui calcule et affiche les valeurs $w_0, w_1, \dots, w_n$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

- (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n.$$

- (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n$$

et

$$w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n.$$

- (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Soit u' la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A .

2. Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On définit alors la suite c par :

$$c_0 = a_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?

(c) Soit ε la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = c_n - \ell,$$

et d la suite $b \times \varepsilon$. En utilisant le résultat de la question 3 de la partie A, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité :

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Correction détaillée

Préliminaire : comprendre le produit $u \times v$

Par définition,

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Cela signifie qu'on associe les termes de u et de v dont les indices ont pour somme n :

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$$

Par exemple,

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0.$$

Idée clé

Dans presque toutes les questions, la première étape consiste à écrire cette somme puis à la découper de façon intelligente.

Partie A : Exemples

1. Premiers exemples

(a) Cas $u_n = 2$ et $v_n = 3$

Pour tout k ,

$$u_k = 2 \quad \text{et} \quad v_{n-k} = 3.$$

Donc chaque produit vaut

$$u_k v_{n-k} = 2 \times 3 = 6.$$

Ainsi,

$$w_n = \sum_{k=0}^n 6.$$

Il y a exactement $n + 1$ termes dans cette somme, car k prend les valeurs

$$0, 1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent,

$$w_n = 6(n + 1).$$

(b) Cas $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$

On part de la définition :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Donc

$$w_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}.$$

Factorisons 3^n :

$$2^k 3^{n-k} = 3^n \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Ainsi,

$$w_n = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

La somme est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. On utilise

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} w_n &= 3^n \cdot 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \\ &= 3^{n+1} - 3^{n+1} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$w_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

2. Programmation

Ici,

$$u_k = \ln(k+1) \quad \text{et} \quad v_{j-k} = \frac{1}{j-k+1}.$$

Pour calculer w_j , il faut donc calculer

$$w_j = \sum_{k=0}^j \frac{\ln(k+1)}{j-k+1}.$$

Le programme doit faire ceci :

1. demander à l'utilisateur n ;
2. pour chaque j allant de 0 à n , initialiser w à 0 ;
3. additionner les termes correspondant à $k = 0, 1, \dots, j$;
4. afficher w_j .

Listing 1 – Programme Turbo-Pascal

```
program ProduitSuites;
uses crt;

var
  n, j, k : integer;
  w : real;

begin
  clrscr;
  write('Donner un entier naturel n : ');
  readln(n);

  for j := 0 to n do
```

```

begin
  w := 0;

  for k := 0 to j do
    w := w + ln(k + 1) / (j - k + 1);

    writeln('w[', j, '] = ', w:0:8);
  end;

  readln;
end.

```

Point important

Le compteur extérieur j indique le terme w_j que l'on veut calculer. Le compteur intérieur k parcourt ensuite tous les termes de la somme qui définit w_j .

3. Un résultat de convergence

On a désormais

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

La suite (v_n) est positive, décroissante à partir du rang 1 et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

(a) Majoration d'une somme de termes de (u_n)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n < m$.

On doit montrer

$$\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n.$$

Comme $u_k = 2^{-k}$,

$$\sum_{k=n+1}^m u_k = \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Il s'agit d'une somme géométrique. Factorisons $u_{n+1} = 2^{-(n+1)}$:

$$\sum_{k=n+1}^m u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right).$$

La somme entre parenthèses est strictement inférieure à la somme géométrique infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^m u_k \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n} = u_n.$$

On peut aussi le vérifier exactement :

$$\sum_{k=n+1}^m u_k = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Conclusion

$$\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n.$$

(b) Majoration de w_{2n} et w_{2n+1}

C'est la partie la plus technique. L'idée est de **découper la somme** en plusieurs morceaux afin d'utiliser :

- la décroissance de (v_n) ;
- la positivité ;
- le résultat de la question (a).

1. Majoration de w_{2n} . Par définition,

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k}.$$

Découpons en trois morceaux :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^n u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0.$$

Premier morceau : $0 \leq k \leq n$.

Dans ce cas,

$$2n - k \geq n.$$

Comme (v_n) est décroissante à partir du rang 1,

$$v_{2n-k} \leq v_n.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n u_k v_{2n-k} \leq v_n \sum_{k=0}^n u_k.$$

Or

$$\sum_{k=0}^n u_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n u_k v_{2n-k} \leq 2v_n.$$

Deuxième morceau : $n+1 \leq k \leq 2n-1$.

Ici,

$$1 \leq 2n - k \leq n - 1.$$

La suite (v_n) étant décroissante à partir de 1,

$$v_{2n-k} \leq v_1.$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} \leq v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k.$$

D'après la question (a), avec $m = 2n - 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq u_n.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} \leq v_1 u_n.$$

En additionnant les trois morceaux,

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n.$$

2. Majoration de w_{2n+1} . On écrit

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k}.$$

Découpons :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^n u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1} v_0.$$

Pour $0 \leq k \leq n$,

$$2n+1-k \geq n+1,$$

donc

$$v_{2n+1-k} \leq v_{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^n u_k v_{2n+1-k} \leq v_{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \leq 2v_{n+1}.$$

Pour $n+1 \leq k \leq 2n$,

$$1 \leq 2n+1-k \leq n,$$

donc

$$v_{2n+1-k} \leq v_1.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n+1-k} \leq v_1 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

D'après (a),

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq u_n.$$

Donc

$$w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n.$$

(c) Convergence de (w_n) vers 0

Tous les termes sont positifs, donc

$$0 \leq w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n.$$

Or

$$u_{2n} \rightarrow 0, \quad v_n \rightarrow 0, \quad u_n \rightarrow 0.$$

Les nombres v_0 et v_1 sont fixes. Ainsi,

$$v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \rightarrow 0.$$

Par encadrement,

$$w_{2n} \rightarrow 0.$$

De même,

$$0 \leq w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n,$$

et le membre de droite tend vers 0. Donc

$$w_{2n+1} \rightarrow 0.$$

Il reste à conclure pour toute la suite (w_n) .

Idée clé

Tout entier naturel est soit pair, soit impair. Si les termes d'indice pair et les termes d'indice impair tendent vers la même limite, alors la suite entière tend vers cette limite.

Ici, les deux limites valent 0. Donc

$$w_n \rightarrow 0.$$

(d) Cas $u'_n = (-\frac{1}{2})^n$

Posons

$$y = u' \times v.$$

Alors

$$y_n = \sum_{k=0}^n u'_k v_{n-k}.$$

Prenons la valeur absolue :

$$|y_n| \leq \sum_{k=0}^n |u'_k| v_{n-k},$$

car $v_{n-k} \geq 0$.

Or

$$|u'_k| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^k = u_k.$$

Donc

$$|y_n| \leq \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = w_n.$$

Comme $w_n \rightarrow 0$,

$$0 \leq |y_n| \leq w_n \rightarrow 0.$$

Par encadrement,

$$|y_n| \rightarrow 0,$$

donc

$$y_n \rightarrow 0.$$

Conclusion

La suite $u' \times v$ converge vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

On rappelle que A est l'ensemble des suites positives (a_n) telles que

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

1. Suites décroissantes et suites strictement croissantes

Toute suite décroissante positive appartient à A

Supposons (a_n) décroissante et positive.

Pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{et} \quad a_n \leq a_{n-1}.$$

La deuxième inégalité donne

$$a_n + a_n \leq a_n + a_{n-1}.$$

En divisant par 2,

$$a_n \leq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Comme $a_{n+1} \leq a_n$, on obtient

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Donc

$$(a_n) \in A.$$

Une suite strictement croissante ne peut pas appartenir à A

Supposons maintenant (a_n) strictement croissante. Alors, pour $n \geq 1$,

$$a_{n-1} < a_n < a_{n+1}.$$

Comme $a_{n-1} < a_n$,

$$a_{n-1} + a_n < 2a_n,$$

donc

$$\frac{a_n + a_{n-1}}{2} < a_n.$$

Mais $a_n < a_{n+1}$, donc

$$\frac{a_n + a_{n-1}}{2} < a_{n+1}.$$

C'est exactement le contraire de la condition exigée pour appartenir à A .

Conclusion

Toute suite décroissante positive appartient à A , tandis qu'une suite strictement croissante ne peut pas appartenir à A .

2. Étude de la relation $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$

(a) Forme générale de z_n

On veut montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nous allons donner une démonstration par récurrence, qui ne nécessite pas de méthode supplémentaire.

Cherchons d'abord α et β pour que la formule soit vraie aux rangs 0 et 1.

Pour $n = 0$:

$$z_0 = \alpha + \beta.$$

Pour $n = 1$:

$$z_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta.$$

On résout donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta = z_0, \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta = z_1. \end{cases}$$

Soustrayons la deuxième équation de la première :

$$\frac{3}{2}\beta = z_0 - z_1,$$

d'où

$$\boxed{\beta = \frac{2}{3}(z_0 - z_1)}.$$

Puis

$$\alpha = z_0 - \beta = z_0 - \frac{2}{3}(z_0 - z_1) = \frac{1}{3}z_0 + \frac{2}{3}z_1.$$

Ainsi

$$\boxed{\alpha = \frac{z_0 + 2z_1}{3}}.$$

Vérification par récurrence. Supposons que, pour un certain $n \geq 1$,

$$z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

et

$$z_{n-1} = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left[2\alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Factorisons $\beta \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \alpha + \frac{1}{4}\beta \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

car

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

La formule est donc vraie pour tout n .

Conclusion

$$\boxed{z_n = \frac{z_0 + 2z_1}{3} + \frac{2}{3}(z_0 - z_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

(b) Existence de suites de A non monotones

Prenons par exemple

$$z_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette suite vérifie l'égalité

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}),$$

donc elle vérifie a fortiori l'inégalité qui définit A .

De plus, ses termes sont positifs. En effet,

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq 1,$$

donc

$$z_n \geq 1 > 0.$$

Calculons quelques termes :

$$z_0 = 3, \quad z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{9}{4}, \quad z_3 = \frac{15}{8}.$$

On voit que

$$z_0 > z_1 < z_2 > z_3.$$

La suite n'est donc ni croissante ni décroissante.

Conclusion

Il existe bien des suites appartenant à A qui ne sont pas monotones.

3. Étude d'une suite quelconque $a \in A$

On pose

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

et

$$c_0 = a_0, \quad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

(a) La suite (c_n) est décroissante et convergente

Pour $n \geq 1$,

$$c_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n.$$

Comme $a \in A$,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) + \frac{1}{2}a_n \\ &= a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \\ &= c_n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$c_{n+1} \leq c_n \quad (n \geq 1).$$

La suite (c_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

D'autre part, tous les a_n sont positifs, donc

$$c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \geq 0.$$

La suite (c_n) est donc minorée par 0.

Une suite décroissante et minorée est convergente. Il existe donc un réel $\ell \geq 0$ tel que

$$\boxed{c_n \rightarrow \ell.}$$

(b) Calcul du produit $b \times c$

On veut montrer

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.}$$

Pour comprendre les annulations, il est plus pratique de changer l'indice et d'écrire

$$(b \times c)_n = \sum_{j=0}^n b_{n-j} c_j.$$

On sépare le terme $j = 0$:

$$(b \times c)_n = b_n a_0 + \sum_{j=1}^n b_{n-j} \left(a_j + \frac{1}{2}a_{j-1}\right).$$

Donc

$$(b \times c)_n = b_n a_0 + \sum_{j=1}^n b_{n-j} a_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{n-j} a_{j-1}.$$

Dans la dernière somme, posons $r = j - 1$. Alors

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{n-j} a_{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} b_{n-1-r} a_r.$$

Or la suite b vérifie

$$b_{q+1} = -\frac{1}{2}b_q.$$

Ainsi, pour $0 \leq r \leq n-1$,

$$b_{n-r} + \frac{1}{2}b_{n-1-r} = 0.$$

Tous les coefficients de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ s'annulent donc deux à deux.

Il ne reste que le terme correspondant à a_n , provenant de $j = n$:

$$b_0 a_n = a_n.$$

D'où

$$\boxed{(b \times c)_n = a_n.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{b \times c = a.}$$

Méthode

Le rôle très particulier du nombre $-\frac{1}{2}$ vient de l'identité

$$b_{q+1} + \frac{1}{2}b_q = 0,$$

qui provoque toutes les annulations.

(c) Convergence de $d = b \times \varepsilon$

On définit

$$\varepsilon_n = c_n - \ell.$$

Puisque (c_n) est décroissante et converge vers ℓ , on a pour tout n suffisamment grand, et même ici pour tout $n \geq 1$,

$$c_n \geq \ell.$$

Donc

$$\varepsilon_n \geq 0.$$

De plus, (ε_n) est décroissante, car (c_n) l'est, et

$$\varepsilon_n = c_n - \ell \rightarrow 0.$$

Nous sommes donc exactement dans la situation étudiée à la question A.3(d) :

- $b_n = (-\frac{1}{2})^n$;
- (ε_n) est positive ;
- elle est décroissante ;
- elle tend vers 0.

Le résultat déjà démontré donne alors

$$d_n = (b \times \varepsilon)_n \rightarrow 0.$$

(d) Expression de d_n et limite de (a_n)

Par définition,

$$d_n = (b \times \varepsilon)_n = \sum_{k=0}^n b_k \varepsilon_{n-k}.$$

Or

$$\varepsilon_{n-k} = c_{n-k} - \ell.$$

Donc

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n b_k (c_{n-k} - \ell) \\ &= \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} - \ell \sum_{k=0}^n b_k. \end{aligned}$$

D'après la question (b),

$$\sum_{k=0}^n b_k c_{n-k} = a_n.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

C'est une somme géométrique de raison $-\frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Ainsi,

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Maintenant, faisons tendre n vers $+\infty$.

Nous savons que

$$d_n \rightarrow 0.$$

D'autre part,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0,$$

donc

$$1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 1.$$

À partir de l'égalité

$$a_n = d_n + \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),$$

on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 + \frac{2}{3}\ell \cdot 1.$$

Conclusion

Toute suite $a \in A$ converge, et sa limite vaut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}\ell,$$

où ℓ est la limite de la suite c définie par

$$c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Synthèse des idées à retenir

1. Pour calculer un produit de suites défini par

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k},$$

il faut souvent écrire explicitement quelques termes puis chercher une somme géométrique ou un découpage utile.

2. Pour majorer une telle somme, on peut la partager en plusieurs blocs et utiliser la monotonie de l'une des suites sur chaque bloc.
3. Si les sous-suites d'indices pairs et impairs ont la même limite, alors la suite entière a cette limite.
4. La valeur absolue permet de transformer le produit avec $(-\frac{1}{2})^n$ en un produit avec $(\frac{1}{2})^n$, déjà étudié.
5. Pour une suite définie par une inégalité à trois termes, introduire une nouvelle suite bien choisie peut faire apparaître une monotonie cachée. Ici,

$$c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$$

est précisément le bon choix.

6. Enfin, l'égalité $b \times c = a$ repose sur des annulations dues à

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n.$$

C'est cette structure qui permet de ramener la convergence de a à celle de c .