

Exercice (1) – Suites numériques

Correction complète et détaillée

Énoncé

On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2) a) Dédire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$.

b) Déterminer la limite de $(U_n)_{n \geq 1}$.

1) Encadrement de $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Soit $k \geq 1$. Nous voulons comparer la différence

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

à des expressions contenant $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Idée clé

Lorsqu'une différence contient deux racines carrées, il est très utile de la multiplier par son expression conjuguée. Cela transforme la différence de racines en une fraction beaucoup plus facile à comparer.

On multiplie donc par le conjugué $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{(k+1) - k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}}.$$

Il reste maintenant à encadrer le dénominateur.

Comme $k \geq 1$, on a $k < k+1$, donc

$$\sqrt{k} < \sqrt{k+1}.$$

D'une part,

$$\sqrt{k} + \sqrt{k+1} \leq \sqrt{k+1} + \sqrt{k+1} = 2\sqrt{k+1}.$$

Les deux membres étant strictement positifs, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{k+1}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

D'autre part,

$$\sqrt{k} + \sqrt{k+1} \geq \sqrt{k} + \sqrt{k} = 2\sqrt{k}.$$

En prenant les inverses des deux nombres positifs, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Finalement, pour tout $k \geq 1$,

Résultat

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}}$$

2) Étude de la suite (U_n)

On rappelle que

$$U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour encadrer U_n , il faut donc encadrer la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La question 1 nous permet précisément de relier cette somme à des différences de la forme $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, qui se simplifient lorsqu'on les additionne.

2.a) Encadrement de U_n

Borne supérieure

À partir de l'inégalité de gauche obtenue à la question 1,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

on l'applique pour

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}} &\leq \sqrt{2} - 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} &\leq \sqrt{3} - \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2\sqrt{4}} &\leq \sqrt{4} - \sqrt{3}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} &\leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre toutes ces inégalités, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Dans le membre de droite, les termes intermédiaires s'annulent deux à deux :

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n} - 1.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq \sqrt{n} - 1.$$

En multipliant par 2 :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 2.$$

On ajoute $1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$ aux deux membres :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Comme $2\sqrt{n} > 0$, on peut diviser par $2\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\leq \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{U_n \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}}.$$

Remarque : pour $n = 1$, on a directement $U_1 = \frac{1}{2}$, et la borne ci-dessus donne également $U_1 \leq \frac{1}{2}$. Elle est

donc valable dès $n = 1$.

Borne inférieure

À partir de l'inégalité de droite de la question 1,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

on l'applique encore pour

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

On obtient

$$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}}.$$

En additionnant :

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right).$$

Le membre de gauche vaut $\sqrt{n} - 1$, donc

$$\sqrt{n} - 1 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En multipliant par 2 :

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Or tous les termes sont positifs, donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Par conséquent,

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En divisant par $2\sqrt{n} > 0$:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\geq \frac{2\sqrt{n} - 2}{2\sqrt{n}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{U_n \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Pour $n = 1$, cette inégalité reste vraie puisque

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1}} = 0 \leq U_1 = \frac{1}{2}.$$

Nous obtenons finalement, pour tout $n \geq 1$:

Résultat

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2.b) Limite de la suite (U_n)

Nous disposons de l'encadrement

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$$

et

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

La suite (U_n) est donc encadrée entre deux suites qui ont la même limite 1. D'après le théorème des gendarmes,

Résultat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1.$$

Synthèse de la méthode

1. Rationaliser $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ pour obtenir

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

2. Encadrer le dénominateur entre $2\sqrt{k}$ et $2\sqrt{k+1}$.

3. Additionner les inégalités : les différences de racines se simplifient par télescopage.

4. En déduire l'encadrement

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

5. Faire tendre n vers $+\infty$ et appliquer le théorème des gendarmes.

EXERCICE (2)

Suites numériques

On pose

$$u_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad \text{pour tout entier } n \text{ tel que } n \geq 2.$$

1) Montrer que

$$(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0.$$

2) Montrer que

$$(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2,$$

puis en déduire que

$$(\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

3) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

1) Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$

Pour tout entier $n \geq 2$, on a évidemment

$$n \geq 1.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. On peut donc prendre la racine n -ième des deux membres de l'inégalité $n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1.$$

En soustrayant 1 aux deux membres, on obtient

$$\sqrt[n]{n} - 1 \geq 0.$$

Or, par définition,

$$u_n = \sqrt[n]{n} - 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n \geq 0.}$$

Cette première information sera importante dans la question suivante, notamment lorsque nous passerons d'une inégalité portant sur u_n^2 à une inégalité portant sur u_n .

2) Majoration de u_n

a) Montrer que $n \geq C_n^2(u_n)^2$

Partons de la définition :

$$u_n = \sqrt[n]{n} - 1.$$

On ajoute 1 aux deux membres :

$$1 + u_n = \sqrt[n]{n}.$$

Élevons maintenant les deux membres à la puissance n . Comme n est un entier positif,

$$(1 + u_n)^n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n.$$

Nous avons donc l'égalité fondamentale

$$\boxed{n = (1 + u_n)^n.} \quad (1)$$

Comme $u_n \geq 0$, tous les termes du développement de $(1 + u_n)^n$ sont positifs ou nuls. On peut donc conserver seulement certains termes pour obtenir une minoration.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1 + u_n)^n = C_n^0 + C_n^1 u_n + C_n^2 u_n^2 + C_n^3 u_n^3 + \dots + C_n^n u_n^n.$$

Or

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n,$$

et, d'après la question 1,

$$u_n \geq 0.$$

Par conséquent,

$$1 \geq 0, \quad nu_n \geq 0, \quad C_n^3 u_n^3 \geq 0, \dots$$

Tous les termes du développement sont donc positifs ou nuls. En particulier,

$$(1 + u_n)^n \geq C_n^2 u_n^2.$$

En utilisant (1), on obtient immédiatement

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2.}$$

b) En déduire que $u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

On sait que

$$n \geq C_n^2 u_n^2.$$

Rappelons la valeur du coefficient binomial C_n^2 :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}.$$

Développons le quotient :

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

L'inégalité précédente devient alors

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} u_n^2.$$

Comme $n \geq 2$, on a $n > 0$. Nous pouvons donc diviser les deux membres par n sans changer le sens de l'inégalité :

$$1 \geq \frac{n-1}{2} u_n^2.$$

Puisque $n \geq 2$, on a également $n-1 > 0$. En multipliant par $\frac{2}{n-1} > 0$, on obtient

$$u_n^2 \leq \frac{2}{n-1}.$$

Nous savons d'après la question 1 que $u_n \geq 0$. De plus,

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq 0.$$

On peut donc prendre les racines carrées :

$$u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

3) Convergence de $(u_n)_n$ et calcul de sa limite

La question précédente nous donne, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Il suffit maintenant d'étudier la limite du terme situé à droite.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$n-1 \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\frac{2}{n-1} \rightarrow 0.$$

Comme la fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$, il vient

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0.$$

Nous avons donc

$$\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq u_n \leq \underbrace{\sqrt{\frac{2}{n-1}}}_{\rightarrow 0}.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ possède une limite finie : elle est donc convergente.

$(u_n)_n$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

Bilan

Les résultats essentiels sont donc

$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

Suites numériques

Correction détaillée de l'exercice (3)

EXERCICE (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_n définie sur $]0, 1[$ par

$$f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}.$$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n .

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente.

3) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

4) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n}.$$

Remarque de départ. Pour tout $n \geq 1$, la solution α_n recherchée appartient à $]0, 1[$. Ainsi

$$0 < \frac{\pi \alpha_n}{2} < \frac{\pi}{2},$$

et toutes les quantités trigonométriques utilisées ci-dessous sont bien définies et positives.

Fixons un entier $n \geq 1$. On étudie

$$f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi}{2nx}, \quad x \in]0, 1[.$$

Étape 1 : continuité de f_n .

Sur $]0, 1[$, on a

$$0 < \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ est donc continue sur $]0, 1[$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1[$. Par conséquent, f_n est continue sur $]0, 1[$.

Étape 2 : comportement de f_n au voisinage de 0.

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \rightarrow 0$$

tandis que

$$\frac{\pi}{2nx} \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty.$$

Étape 3 : comportement de f_n au voisinage de 1.

Lorsque $x \rightarrow 1^-$,

$$\frac{\pi x}{2} \rightarrow \frac{\pi^-}{2},$$

donc

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\pi}{2nx} \rightarrow \frac{\pi}{2n}.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = +\infty.$$

Comme f_n est continue et passe de valeurs négatives à des valeurs positives, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un nombre $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(\alpha_n) = 0.$$

Étape 4 : unicité.

Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\pi}{2nx^2}.$$

Or les deux termes sont strictement positifs. Donc

$$f'_n(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $]0, 1[$. Une fonction strictement croissante ne peut s'annuler qu'une seule fois.

On a donc établi que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in]0, 1[$.

$$\forall n \geq 1, \exists! \alpha_n \in]0, 1[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0.$$

En particulier,

$$\tan\left(\frac{\pi \alpha_n}{2}\right) = \frac{\pi}{2n\alpha_n}. \quad (1)$$

Cette relation sera essentielle dans toute la suite.

Nous allons comparer α_n et α_{n+1} .

Par définition de α_n ,

$$f_n(\alpha_n) = 0,$$

donc, d'après (1),

$$\tan\left(\frac{\pi \alpha_n}{2}\right) = \frac{\pi}{2n\alpha_n}.$$

Calculons maintenant $f_{n+1}(\alpha_n)$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) - \frac{\pi}{2(n+1)\alpha_n} \\ &= \frac{\pi}{2n\alpha_n} - \frac{\pi}{2(n+1)\alpha_n} \\ &= \frac{\pi}{2\alpha_n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2\alpha_n} \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2\alpha_n n(n+1)}}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_n > 0$, on obtient

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) > 0.} \quad (2)$$

D'autre part, α_{n+1} est l'unique zéro de f_{n+1} , donc

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0. \quad (3)$$

Or, d'après la première question, f_{n+1} est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Les relations (2) et (3) donnent alors

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) < f_{n+1}(\alpha_n).$$

Puisque f_{n+1} est strictement croissante, l'ordre des images est le même que l'ordre des antécédents. Par conséquent,

$$\boxed{\alpha_{n+1} < \alpha_n.}$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est strictement décroissante.

Convergence.

Pour tout $n \geq 1$, on sait que

$$\alpha_n \in]0, 1[,$$

donc

$$\alpha_n > 0.$$

Ainsi la suite $(\alpha_n)_n$ est minorée par 0.

Nous avons donc une suite décroissante et minorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

Il existe donc un réel $\ell \geq 0$ tel que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell.}$$

$$\boxed{(\alpha_n)_n \text{ est strictement décroissante et convergente.}}$$

Nous savons déjà qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que

$$\alpha_n \longrightarrow \ell.$$

À partir de la relation (1), multiplions les deux membres par $\alpha_n > 0$:

$$\alpha_n \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) = \frac{\pi}{2n}. \quad (4)$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\pi}{2n} \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après (4),

$$\alpha_n \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) \longrightarrow 0. \quad (5)$$

Comme $0 \leq \ell < 1$, la fonction

$$x \longmapsto x \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

est continue au point ℓ . En passant à la limite dans le membre de gauche de (5), on obtient

$$\ell \tan\left(\frac{\pi\ell}{2}\right) = 0. \quad (6)$$

Or, si $\ell > 0$, alors

$$0 < \frac{\pi\ell}{2} < \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\tan\left(\frac{\pi\ell}{2}\right) > 0.$$

Le produit dans (6) serait alors strictement positif, ce qui est impossible.

Il reste donc nécessairement

$$\ell = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

Nous repartons de la relation fondamentale

$$\tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) = \frac{\pi}{2n\alpha_n}. \quad (1)$$

Le but est de faire apparaître $n\alpha_n^2$, car

$$(\alpha_n\sqrt{n})^2 = n\alpha_n^2.$$

À partir de (1), on a

$$2n\alpha_n \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) = \pi.$$

Donc

$$n\alpha_n \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right) > 0$, on peut écrire

$$n\alpha_n = \frac{\pi}{2 \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right)}.$$

En multipliant par α_n , il vient

$$n\alpha_n^2 = \frac{\pi\alpha_n}{2 \tan\left(\frac{\pi\alpha_n}{2}\right)}.$$

Posons

$$t_n = \frac{\pi\alpha_n}{2}.$$

D'après la question 3,

$$\alpha_n \longrightarrow 0,$$

donc

$$t_n \longrightarrow 0.$$

La relation précédente devient

$$n\alpha_n^2 = \frac{t_n}{\tan t_n}. \quad (7)$$

Encadrement de $\frac{t_n}{\tan t_n}$.

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on connaît l'inégalité classique

$$\sin t \leq t \leq \tan t. \quad (8)$$

À partir de $t \leq \tan t$, et puisque $\tan t > 0$, on obtient

$$\frac{t}{\tan t} \leq 1. \quad (9)$$

À partir de $\sin t \leq t$, on multiplie par $\cos t > 0$:

$$\sin t \cos t \leq t \cos t.$$

Puis on divise par $\sin t > 0$:

$$\cos t \leq \frac{t \cos t}{\sin t}.$$

Or

$$\frac{t \cos t}{\sin t} = \frac{t}{\tan t}.$$

Donc

$$\cos t \leq \frac{t}{\tan t}. \quad (10)$$

En combinant (9) et (10), on a, pour $0 < t < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos t \leq \frac{t}{\tan t} \leq 1. \quad (11)$$

Appliquons (11) à $t = t_n$:

$$\cos t_n \leq \frac{t_n}{\tan t_n} \leq 1.$$

Comme $t_n \rightarrow 0$, on a

$$\cos t_n \longrightarrow 1.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\frac{t_n}{\tan t_n} \longrightarrow 1.$$

D'après (7), il en résulte

$$\boxed{n\alpha_n^2 \longrightarrow 1.} \quad (12)$$

Enfin,

$$\alpha_n \sqrt{n} = \sqrt{n\alpha_n^2}$$

car $\alpha_n > 0$. La fonction racine carrée étant continue sur $[0, +\infty[$, la relation (12) donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n} = 1.}$$

Bilan final :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad \exists! \alpha_n \in]0, 1[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0, \\ (\alpha_n)_n \text{ est strictement décroissante,} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n} = 1. \end{aligned}$$

EXERCICE (4)

Suites adjacentes

Énoncé. Dans chacun des deux cas, montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

1)

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n+1} \quad ; \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}.$$

2)

$$u_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Rappel : suites adjacentes. Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Lorsque, de plus, $u_n \leq v_n$, l'encadrement est particulièrement clair : les deux suites se rapprochent l'une de l'autre et convergent vers la même limite.

1) Premier cas

On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ainsi

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

Nous allons vérifier successivement que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante, puis que $v_n - u_n$ tend vers 0.

Étape 1 : montrer que (u_n) est croissante

Calculons $u_{n+1} - u_n$.

Comme

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - 2\sqrt{n+2}) - (S_n - 2\sqrt{n+1}) \\ &= S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}). \end{aligned}$$

Nous transformons la différence de racines par multiplication par le conjugué :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &= \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Or $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$, donc

$$\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \geq 2\sqrt{n+1}.$$

Les deux membres étant strictement positifs, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

En multipliant par 2,

$$2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \geq 0.$$

Ainsi

$$(u_n) \text{ est croissante.}$$

Étape 2 : montrer que (v_n) est décroissante

Calculons maintenant $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (S_{n+1} - 2\sqrt{n+1}) - (S_n - 2\sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

De nouveau,

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Comme $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$,

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}.$$

Les quantités étant strictement positives,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

puis

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0.$$

Par conséquent,

$$(v_n) \text{ est décroissante.}$$

Étape 3 : étudier la différence $v_n - u_n$

Les deux sommes S_n sont identiques dans u_n et v_n , donc elles s'éliminent :

$$\begin{aligned}v_n - u_n &= (S_n - 2\sqrt{n}) - (S_n - 2\sqrt{n+1}) \\&= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \\&= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).\end{aligned}$$

En utilisant encore le conjugué,

$$v_n - u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Cette quantité est positive, donc

$$\boxed{u_n \leq v_n.}$$

De plus,

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n},$$

d'où

$$0 \leq v_n - u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

Nous avons montré que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $v_n - u_n \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$$

Elles convergent donc vers une même limite.

2) Deuxième cas

On considère

$$u_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right), \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Étape 1 : calculer le premier facteur du produit

Dans le produit définissant u_n , le facteur correspondant à $k = 1$ vaut

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Or un produit qui contient un facteur nul est nul. Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{u_n = 0.}$$

Étape 2 : en déduire la valeur de v_n

Par définition,

$$v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Comme $u_n = 0$, on obtient immédiatement

$$\boxed{v_n = 0} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi les deux suites sont en réalité les suites constantes

$$u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_n = 0.$$

Étape 3 : vérifier les trois conditions d'adjacence

a) **Monotonie de (u_n) .** Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = 0 = u_n.$$

Donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante (elle est même constante).

b) **Monotonie de (v_n) .** Pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = 0 = v_n.$$

Donc $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est donc décroissante (elle est elle aussi constante).

c) **Différence des deux suites.** Pour tout $n \geq 1$,

$$v_n - u_n = 0 - 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.}$$

Les trois conditions sont satisfaites. Ainsi,

(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Dans ce cas particulier, elles sont même identiques et leur limite commune est

0 .

Observation importante sur le deuxième cas. Avec la formule donnée, le produit commence à $k = 1$, et le premier facteur est $\cos(\pi/2) = 0$. Le deuxième cas devient donc immédiatement un cas de deux suites constantes nulles. Toute étude plus compliquée serait inutile avec cette définition.

Bilan général

Cas	(u_n)	(v_n)	$v_n - u_n$
1	croissante	décroissante	$\longrightarrow 0$
2	constante, donc croissante	constante, donc décroissante	$= 0$

Dans chacun des deux cas,

(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE (4)

Question 2 – Suites adjacentes

Énoncé.

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes, où

$$u_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Rappel. Pour montrer que deux suites sont adjacentes, il suffit de montrer que :

- l'une des suites est croissante ;
 - l'autre est décroissante ;
 - la différence entre la plus grande et la plus petite tend vers 0.
- Les deux suites convergent alors vers une même limite.

1. Étude préliminaire des facteurs du produit

Pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$0 < \frac{\pi}{2^k} \leq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, le cosinus est strictement positif et strictement inférieur à 1. Ainsi,

$$0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) < 1.$$

Le nombre u_n est un produit de facteurs strictement positifs. Par conséquent,

$$u_n > 0 \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

De plus, chacun des facteurs est inférieur à 1, donc

$$0 < u_n \leq 1.$$

De même,

$$0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) < 1,$$

et comme

$$v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

on obtient immédiatement

$$0 < v_n < u_n.$$

En particulier, $u_n - v_n > 0$.

2. Montrons que (u_n) est décroissante

Écrivons u_{n+1} à partir de la définition :

$$u_{n+1} = \prod_{k=2}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right).$$

On sépare le dernier facteur, correspondant à $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Or

$$0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$$

et $u_n > 0$. En multipliant l'inégalité

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$$

par le nombre positif u_n , on trouve

$$u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < u_n.$$

Mais le membre de gauche est précisément u_{n+1} . Donc

$$\boxed{u_{n+1} < u_n.}$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. Montrons que (v_n) est croissante

Cette étape demande un peu plus de calcul.

Par définition,

$$v_{n+1} = u_{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Or nous venons de voir que

$$u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

En remplaçant u_{n+1} dans l'expression de v_{n+1} , on obtient

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= u_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{v_{n+1} = u_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).}$$

D'autre part,

$$v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Pour comparer v_{n+1} et v_n , calculons leur différence :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= u_n \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Posons, uniquement pour alléger l'écriture,

$$x = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Alors

$$2x = \frac{\pi}{2^n}.$$

La différence précédente devient

$$v_{n+1} - v_n = u_n (\cos^2 x - \cos(2x)).$$

Utilisons maintenant l'identité trigonométrique

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \cos(2x) &= \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1) \\ &= 1 - \cos^2 x \\ &= \sin^2 x. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$v_{n+1} - v_n = u_n \sin^2 x,$$

c'est-à-dire

$$v_{n+1} - v_n = u_n \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Or $u_n > 0$ et

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) > 0.$$

Ainsi

$$v_{n+1} - v_n > 0,$$

donc

$$v_{n+1} > v_n.$$

Par conséquent,

$$(v_n) \text{ est strictement croissante.}$$

Point important. La comparaison de v_{n+1} et v_n repose sur le fait que

$$\frac{\pi}{2^n} = 2 \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

ce qui permet d'utiliser directement la formule

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

4. Montrons que $u_n - v_n$ tend vers 0

Puisque

$$v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

on a

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= u_n - u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= u_n \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n - v_n = u_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right).$$

Nous avons déjà montré que

$$0 < u_n \leq 1.$$

Par ailleurs,

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \geq 0.$$

En multipliant l'encadrement $0 < u_n \leq 1$ par cette quantité positive, nous obtenons

$$0 \leq u_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) \leq 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Donc

$$0 \leq u_n - v_n \leq 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0.$$

La fonction cosinus étant continue en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos(0) = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = 0.$$

À l'aide du théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

5. Conclusion : les deux suites sont adjacentes

Nous avons établi les trois propriétés suivantes :

$$(u_n) \text{ est décroissante,}$$

$$(v_n) \text{ est croissante,}$$

et

$$u_n - v_n \longrightarrow 0.$$

De plus, pour tout $n \geq 2$,

$$v_n < u_n.$$

Toutes les conditions sont donc réunies :

$$(u_n)_{n \geq 2} \text{ et } (v_n)_{n \geq 2} \text{ sont adjacentes.}$$

En particulier, elles sont convergentes et ont la même limite.

6. Vérification sur les premiers termes

Cette vérification n'est pas une démonstration, mais elle permet de bien voir le comportement des deux suites.

Pour $n = 2$,

$$u_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et

$$v_2 = u_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$v_2 = \frac{1}{2} < u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour $n = 3$,

$$u_3 = u_2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) < u_2,$$

tandis que

$$v_3 - v_2 = u_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0,$$

donc

$$v_3 > v_2.$$

On retrouve bien le phénomène démontré : la suite (u_n) descend, la suite (v_n) monte, et l'écart entre elles tend vers zéro.

EXERCICE (5)

Suites numériques - Corrigé détaillé

On pose

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$$

et soit la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

1) Montrer que

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

2) Dédire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2,$$

et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

3) Montrer par récurrence que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Puis déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

1) Démonstration de l'inégalité

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Nous voulons prouver

$$2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

La différence de deux racines carrées se simplifie en utilisant l'identité

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{p+1} - \sqrt{p} &= \frac{(\sqrt{p+1} - \sqrt{p})(\sqrt{p+1} + \sqrt{p})}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \\ &= \frac{(p+1) - p}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) = \frac{2}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}.$$

Il reste donc à comparer

$$\frac{2}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs puisque $p \geq 1$. Nous pouvons donc multiplier sans changer le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} &\iff 2\sqrt{p} \leq \sqrt{p+1} + \sqrt{p} \\ &\iff \sqrt{p} \leq \sqrt{p+1}.\end{aligned}$$

Or $p \leq p+1$, et la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc

$$\sqrt{p} \leq \sqrt{p+1}.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}}.$$

2) Minoration de S_n et limite de (S_n)

D'après la question précédente, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \geq 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}).$$

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et additionnons ces inégalités pour

$$p = 1, 2, \dots, n.$$

On obtient

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}} \geq 2 \sum_{p=1}^n (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}).$$

Comme

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}},$$

nous avons

$$S_n \geq 2 \sum_{p=1}^n (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}).$$

Développons complètement la somme de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires se simplifient deux à deux :

$$+\sqrt{2} - \sqrt{2}, \quad +\sqrt{3} - \sqrt{3}, \quad \dots, \quad +\sqrt{n} - \sqrt{n}.$$

Il ne reste que

$$\sum_{p=1}^n (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Ainsi,

$$S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2}.$$

Détermination de la limite de S_n

Lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{n+1} \rightarrow +\infty,$$

donc

$$2\sqrt{n+1} - 2 \rightarrow +\infty.$$

Or, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Cela signifie que S_n est toujours au-dessus d'une quantité qui devient aussi grande que l'on veut.

Plus précisément, soit $A > 0$. Comme

$$2\sqrt{n+1} - 2 \rightarrow +\infty,$$

il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 > A.$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2 > A.$$

C'est exactement la définition de $S_n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

3) Majoration de S_n par récurrence

Nous voulons démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Notons cette propriété

$$(P_n) : \quad S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Étape 1 : initialisation

Pour $n = 1$,

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

D'autre part,

$$\sqrt{1} + \sqrt{1-1} = 1 + 0 = 1.$$

Donc

$$S_1 = 1 \leq 1 = \sqrt{1} + \sqrt{0}.$$

La propriété (P_1) est donc vraie.

Étape 2 : hérédité

Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel (P_n) est vraie, c'est-à-dire supposons

$$S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Nous devons montrer que (P_{n+1}) est vraie, c'est-à-dire

$$S_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}.$$

D'après la définition de S_n ,

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1},$$

nous obtenons

$$S_{n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit donc de montrer que

$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}.$$

Cette inégalité équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Calculons le membre de droite :

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

Nous devons donc vérifier

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Les dénominateurs étant positifs, cette inégalité équivaut à

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} &\leq 2\sqrt{n+1} \\ \iff \sqrt{n-1} &\leq \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $n-1 \leq n+1$.

Nous avons donc bien

$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}S_{n+1} &\leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi (P_{n+1}) est vraie.

Étape 3 : conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. Donc, par le principe de récurrence,

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

Détermination de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Nous savons que

$$U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Nous allons utiliser simultanément la minoration obtenue à la question 2 et la majoration obtenue à la question 3.

Pour tout $n \geq 1$,

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Comme $\sqrt{n} > 0$, nous pouvons diviser les trois membres par $\sqrt{n}$ sans changer le sens des inégalités :

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $U_n = S_n/\sqrt{n}$,

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Simplifions chaque borne.

Pour la borne inférieure :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} &= 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ &= 2\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ &= 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq U_n.$$

Pour la borne supérieure :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} &= 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ &= 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$U_n \leq 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Finalement,

$$\boxed{2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq U_n \leq 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Étudions maintenant les limites des deux bornes. Comme

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

nous avons, par continuité de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow 1.$$

Donc

$$2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 2 \times 1 - 0 = 2,$$

et

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow 1 + 1 = 2.$$

Ainsi U_n est encadrée entre deux suites qui ont la même limite 2. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2.$$

Bilan

Les résultats essentiels de l'exercice sont :

$$2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2.$$

EXERCICE (6)

Limites de suites

Déterminer, dans chacun des cas suivants, la limite de la suite $(U_n)_n$.

$$1) U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n.$$

$$2) U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right), \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

$$3) U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k, \quad U_n = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2 - 1}.$$

$$4) U_{n+1} \geq 2U_n, \quad U_0 \in \mathbb{R}^{*+}.$$

$$5) U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{4p^2 - 1}.$$

$$6) U_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}).$$

$$7) U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(kx), \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

$$8) U_n = \frac{2^n}{n^3}.$$

$$9) U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

$$10) U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}.$$

$$11) U_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}}.$$

$$12) U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}.$$

Dans la question 7, $E(t)$ désigne la partie entière de t .

$$1) U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n$$

On cherche à faire apparaître le terme exponentiel qui croît le plus vite. Écrivons les deux termes avec le facteur 5^n :

$$5 \times 3^{n+1} = 5 \times 3 \times 3^n = 15 \times 3^n = 5^n 15 \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Ainsi

$$U_n = 5^n \left[15 \left(\frac{3}{5}\right)^n - 2 \right].$$

Or

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \implies \left(\frac{3}{5}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Donc

$$15 \left(\frac{3}{5}\right)^n - 2 \longrightarrow -2.$$

En particulier, à partir d'un certain rang, le crochet est négatif et reste par exemple inférieur à -1 . Comme $5^n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$U_n \leq -5^n \longrightarrow -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

2) $U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right), x \in \mathbb{R}^*$

Posons

$$t_n = \frac{x}{2^{n+1}}.$$

Puisque $2^{n+1} \rightarrow +\infty$, on a

$$t_n \longrightarrow 0.$$

Pour $x \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} U_n &= 2^n \sin(t_n) \\ &= 2^n t_n \frac{\sin(t_n)}{t_n} \\ &= 2^n \times \frac{x}{2^{n+1}} \times \frac{\sin(t_n)}{t_n} \\ &= \frac{x}{2} \frac{\sin(t_n)}{t_n}. \end{aligned}$$

On utilise la limite trigonométrique fondamentale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Donc

$$\frac{\sin(t_n)}{t_n} \longrightarrow 1.$$

Par conséquent,

$$U_n \longrightarrow \frac{x}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{x}{2}$$

3) Deux suites données sur la même ligne

3-a) $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$

On connaît la somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Comme $1/n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

3-b) $U_n = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2 - 1}$

On factorise le dénominateur :

$$k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1).$$

Cherchons une écriture permettant un télescopage :

$$\frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1},$$

car

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1) - (k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{2}{k^2 - 1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Tous les termes de $1/3$ à $1/(n-1)$ s'annulent. Il reste

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $1/n \rightarrow 0$ et $1/(n+1) \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{2}$$

4) $U_{n+1} \geq 2U_n$ et $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$

L'hypothèse $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ signifie

$$U_0 > 0.$$

Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \geq 2^n U_0.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$U_0 = 2^0 U_0,$$

donc la propriété est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain n ,

$$U_n \geq 2^n U_0.$$

Alors, d'après l'énoncé,

$$U_{n+1} \geq 2U_n \geq 2 \times 2^n U_0 = 2^{n+1} U_0.$$

La propriété est donc héréditaire.

Ainsi, pour tout n ,

$$U_n \geq 2^n U_0.$$

Or $U_0 > 0$ est une constante et $2^n \rightarrow +\infty$, donc

$$2^n U_0 \longrightarrow +\infty.$$

Par comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

5)
$$U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{4p^2 - 1}$$

On factorise :

$$4p^2 - 1 = (2p - 1)(2p + 1).$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{4p^2 - 1} &= \frac{1}{(2p - 1)(2p + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p - 1} - \frac{1}{2p + 1} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p - 1} - \frac{1}{2p + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent :

$$U_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

Ainsi

$$U_n = \frac{n}{2n + 1}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par n ,

$$U_n = \frac{1}{2 + 1/n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

6) $U_n = \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right)$

La présence de n à l'intérieur du sinus empêche de prendre directement une limite. On isole donc la partie entière n :

$$\sqrt{n^2 + n} = n + \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right).$$

Posons

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

Rationalisons :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1}. \end{aligned}$$

Comme $1/n \rightarrow 0$,

$$a_n \longrightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} U_n &= \sin^2 \left(\pi(n + a_n) \right) \\ &= \sin^2(n\pi + \pi a_n). \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n ,

$$\sin(n\pi + y) = (-1)^n \sin y,$$

et donc, après élévation au carré,

$$\sin^2(n\pi + y) = \sin^2 y.$$

Ainsi

$$U_n = \sin^2(\pi a_n).$$

Puisque $a_n \rightarrow 1/2$ et que la fonction sinus est continue,

$$U_n \longrightarrow \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

7) $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(kx), \quad x \in \mathbb{R}^*$

Pour tout réel y , la partie entière vérifie

$$y - 1 < E(y) \leq y.$$

En prenant $y = kx$, on obtient

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx.$$

Additionnons pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$x \sum_{k=1}^n k - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \sum_{k=1}^n k.$$

Comme

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

on a

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n E(kx) \leq x \frac{n(n+1)}{2}.$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{x(n+1)}{2} - 1 < U_n \leq \frac{x(n+1)}{2}.$$

Il faut distinguer le signe de x .

Si $x > 0$: la borne inférieure

$$\frac{x(n+1)}{2} - 1 \longrightarrow +\infty.$$

Donc, par comparaison,

$$U_n \longrightarrow +\infty.$$

Si $x < 0$: la borne supérieure

$$\frac{x(n+1)}{2} \longrightarrow -\infty.$$

Donc, par comparaison,

$$U_n \longrightarrow -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

8) $U_n = \frac{2^n}{n^3}$

Les deux termes 2^n et n^3 tendent vers $+\infty$; il faut donc comparer leurs vitesses de croissance.

Calculons le quotient de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{2^n} \\ &= 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^3. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{n}{n+1} \longrightarrow 1,$$

donc

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \longrightarrow 2.$$

Choisissons par exemple le nombre $3/2$, strictement inférieur à 2. À partir d'un certain rang N ,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq \frac{3}{2}.$$

Donc, pour $n \geq N$,

$$U_n \geq U_N \left(\frac{3}{2}\right)^{n-N}.$$

Comme $U_N > 0$ et $(3/2)^{n-N} \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

9) $U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Ici encore, comparons deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Choisissons par exemple $q = 3/4$, avec $1/2 < 3/4 < 1$. À partir d'un certain rang N ,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}.$$

Donc, pour $n \geq N$,

$$0 \leq U_n \leq U_N \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N}.$$

Or $(3/4)^{n-N} \rightarrow 0$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

10) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$

Écrivons les premiers termes :

$$U_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}.$$

Il s'agit d'une somme géométrique de premier terme

$$a = \frac{1}{3}$$

et de raison

$$q = -\frac{1}{3}.$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est

$$a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{3} \frac{1 - (-1/3)^n}{1 + 1/3} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 - (-1/3)^n}{4/3} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Comme $|-1/3| < 1$,

$$\left(-\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{4}$$

$$11) U_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}}$$

Tous les termes de la somme sont positifs. Pour $1 \leq k \leq n^2$, on a

$$k \leq n^2.$$

En multipliant par $n > 0$,

$$kn \leq n^3.$$

Puis, en prenant les racines carrées,

$$\sqrt{kn} \leq n\sqrt{n}.$$

Ainsi

$$1 + \sqrt{kn} \leq 1 + n\sqrt{n}.$$

Les deux membres étant strictement positifs, le passage aux inverses renverse l'inégalité :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{kn}} \geq \frac{1}{1 + n\sqrt{n}}.$$

Cette minoration est valable pour chacun des n^2 termes de la somme. Donc

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{1 + n\sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2}{1 + n\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Simplifions la borne inférieure en divisant numérateur et dénominateur par $n\sqrt{n}$:

$$\frac{n^2}{1 + n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{1 + 1/(n\sqrt{n})}.$$

Or

$$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{n\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\frac{n^2}{1 + n\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty.$$

Comme U_n est supérieur à une suite qui tend vers $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

12)
$$U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}$$

Rationalisons chaque terme. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} &= \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{(\sqrt{p+1} + \sqrt{p})(\sqrt{p+1} - \sqrt{p})} \\ &= \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{(p+1) - p} \\ &= \sqrt{p+1} - \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{p=1}^n (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent :

$$U_n = \sqrt{n+1} - 1.$$

Comme $\sqrt{n+1} \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Tableau récapitulatif des résultats

Cas	Limite
1	$-\infty$
2	$\frac{x}{2}$
3-a	$\frac{1}{2}$
3-b	$\frac{3}{2}$
4	$+\infty$
5	$\frac{1}{2}$
6	1
7	$+\infty (x > 0), -\infty (x < 0)$
8	$+\infty$
9	0
10	$\frac{1}{4}$
11	$+\infty$
12	$+\infty$