

Suites numériques

Exercice (1) - Corrigé détaillé

EXERCICE (1)

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

a) Montrer que

$$(\forall k \geq 2) \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

b) Dédurre que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est majorée.

a) Comparaison de $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$

Soit k un entier tel que $k \geq 2$.

Nous voulons démontrer

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Idée clé

Les deux fractions sont positives. Pour les comparer, on peut comparer leurs dénominateurs. Plus un dénominateur positif est grand, plus son inverse est petit.

Comme $k \geq 2$, on a en particulier

$$k > 0 \quad \text{et} \quad k-1 > 0.$$

De plus,

$$k-1 \leq k.$$

Comme $k > 0$, on peut multiplier les deux membres par k sans changer le sens de l'inégalité :

$$k(k-1) \leq k \times k = k^2.$$

Ainsi,

$$0 < k(k-1) \leq k^2.$$

Or, pour deux nombres strictement positifs, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité.

On obtient donc

$$\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout entier $k \geq 2$.

Résultat

$$(\forall k \geq 2) \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

b) Montrer que (U_n) est majorée

On rappelle que

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Le but est de trouver un nombre réel M , indépendant de n , tel que

$$U_n \leq M \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Étape 1 : utiliser l'inégalité de la question a)

Pour tout entier $k \geq 2$, nous savons que

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Pour $n \geq 2$, on peut donc additionner ces inégalités pour

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

On obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}.$$

Il reste à calculer la somme située à droite.

Étape 2 : transformer $\frac{1}{k(k-1)}$

Nous cherchons une écriture de la forme

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k}.$$

Mais ici une observation directe suffit :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}.$$

Idée clé

Cette écriture est particulièrement utile parce que, lorsque l'on additionne les termes successifs, presque tous se simplifient. On obtient une **somme télescopique**.

Étape 3 : calcul détaillé de la somme télescopique

Écrivons les premiers et les derniers termes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).\end{aligned}$$

Regardons les simplifications :

$$\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \right).$$

Tous les termes intermédiaires s'annulent deux à deux. Il reste seulement

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Étape 4 : encadrer U_n

Pour $n \geq 2$, nous avons donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Or

$$U_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}.$$

En ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité précédente, il vient

$$U_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Comme

$$\frac{1}{n} > 0,$$

on a

$$2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Par conséquent,

$$U_n < 2 \quad (n \geq 2).$$

Vérifions également le premier terme :

$$U_1 = \frac{1}{1^2} = 1 < 2.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$,

$$U_n \leq 2.$$

Résultat

La suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est donc **majorée**. Un majorant simple est

$$2.$$

Plus précisément, pour tout $n \geq 1$,

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Pourquoi cette méthode fonctionne-t-elle ?

La difficulté principale n'est pas de calculer exactement

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2},$$

mais de trouver une somme plus simple qui soit plus grande que U_n .

La question a) fournit précisément la comparaison

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Le terme de droite est intéressant car il se décompose en

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

et cette différence produit des annulations lorsqu'on additionne. On remplace donc une somme difficile à calculer exactement par une somme facile à calculer et qui la majore.

Synthèse de la démonstration

1. Pour $k \geq 2$,

$$k(k-1) \leq k^2,$$

donc, en prenant les inverses,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

2. On utilise

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

3. On additionne de $k = 2$ à $k = n$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

4. Ainsi,

$$U_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

5. Finalement,

$$\boxed{U_n \leq 2 \text{ pour tout } n \geq 1}.$$

Donc (U_n) est majorée.

EXERCICE (2) – SUITES NUMÉRIQUES

Correction complète et détaillée

ÉnoncéSoit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite telle que

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

1) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n \geq \frac{1}{2}.$$

2) Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$.3) Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente.**1) Montrer que $U_n \geq \frac{1}{2}$** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Par définition,

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

La somme contient exactement n termes : en effet, l'indice k prend successivement les valeurs

$$1, 2, \dots, n.$$

Pour minorer une somme de termes positifs, on peut chercher une même borne inférieure valable pour chacun des termes, puis additionner ces bornes.

Pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$k \leq n.$$

En ajoutant n aux deux membres,

$$n+k \leq 2n.$$

Comme $n+k > 0$ et $2n > 0$, le passage aux inverses renverse le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}.$$

Cette inégalité est vraie pour chacun des indices $k = 1, 2, \dots, n$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}.$$

En additionnant membre à membre les n inégalités, on obtient

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}}.$$

Le membre de droite vaut

$$n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$U_n \geq \frac{1}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n \geq \frac{1}{2}.$$

2) Étudier la monotonie de (U_n)

Pour étudier la monotonie, nous allons comparer deux termes consécutifs U_{n+1} et U_n .

Commençons par réécrire U_n sous une forme très lisible :

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Au rang $n+1$, on a

$$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.$$

En développant cette somme,

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Comparons maintenant les deux expressions :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \\ U_{n+1} &= \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Les termes

$$\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, \dots, \frac{1}{2n}$$

sont communs aux deux sommes. En calculant la différence $U_{n+1} - U_n$, ils se simplifient donc :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$2n+2 = 2(n+1),$$

donc

$$\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}.$$

Nous allons comparer $\frac{1}{2n+1}$ à $\frac{1}{2n+2}$. Comme

$$2n+1 < 2n+2,$$

et que ces deux nombres sont strictement positifs, on a

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc

$$U_{n+1} - U_n > 0.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$U_{n+1} > U_n.$$

Ainsi,

$(U_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

Une seconde vérification algébrique de la monotonie

On peut également mettre la différence au même dénominateur afin de confirmer son signe.

Nous avons

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Comme

$$\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)},$$

on obtient

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)}.$$

Donc

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}.$$

Au numérateur,

$$2(n+1) - (2n+1) = 2n+2 - 2n-1 = 1.$$

Ainsi,

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

Le dénominateur étant strictement positif pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

Donc, une nouvelle fois,

$$U_{n+1} > U_n.$$

La première méthode est souvent plus rapide : elle compare directement deux fractions positives. La seconde méthode donne une expression exacte de $U_{n+1} - U_n$ et rend son signe immédiatement visible.

3) Montrer que (U_n) est convergente

Nous savons maintenant que la suite (U_n) est strictement croissante.

Pour conclure qu'elle converge, il suffit donc de montrer qu'elle est majorée.

Théorème utilisé : toute suite croissante et majorée est convergente.

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$n+k \geq n+1.$$

Les deux membres étant strictement positifs, le passage aux inverses donne

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Cette inégalité est vraie pour chacun des n termes de la somme. Par conséquent,

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1}.$$

Le membre de droite contient n fois le même terme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} = n \times \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi,

$$U_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Or

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

car $n < n+1$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$U_n < 1.$$

La suite est donc majorée par 1.

Nous avons établi :

$$\left. \begin{array}{l} (U_n) \text{ est croissante,} \\ (U_n) \text{ est majorée par 1.} \end{array} \right\}$$

D'après le théorème de convergence des suites monotones,

$$\boxed{(U_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente.}}$$

Encadrement global obtenu

Les raisonnements des questions 1 et 3 donnent simultanément, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n}{n+1} < 1.}$$

Cet encadrement permet de visualiser le comportement de la suite : ses termes restent dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et, d'après la question 2, ils augmentent lorsque n augmente.

Calculons les premiers termes pour vérifier ce comportement :

$$U_1 = \frac{1}{2},$$

$$U_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$U_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15 + 12 + 10}{60} = \frac{37}{60}.$$

Numériquement,

$$U_1 = 0,5, \quad U_2 \approx 0,5833, \quad U_3 \approx 0,6167.$$

On observe bien

$$U_1 < U_2 < U_3 < 1,$$

ce qui est cohérent avec la démonstration précédente.

Bilan final

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{U_n \geq \frac{1}{2}}.$$

2) Pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0},$$

donc

$$\boxed{(U_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3) Comme

$$\boxed{U_n \leq \frac{n}{n+1} < 1},$$

la suite est majorée. Étant croissante et majorée,

$$\boxed{(U_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente.}}$$

EXERCICE (3)**Suites numériques - Correction complète et détaillée****Énoncé**

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par

$$\boxed{x_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}}.$$

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < 2.$$

2) Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante, puis qu'elle est convergente.

3) On pose

$$U_n = x_n^3 - 2$$

pour tout entier naturel n .

Montrer que $(U_n)_n$ est géométrique et calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

1) Montrer que $0 < x_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La relation de récurrence contient x_n^3 . Pour la suite de l'exercice, il est utile de démontrer une propriété un peu plus précise :

$$\boxed{0 < x_n < \sqrt[3]{2}}.$$

Comme $\sqrt[3]{2} < 2$, cette propriété donnera immédiatement le résultat demandé.

Pourquoi chercher $\sqrt[3]{2}$?

Si $x_n^3 < 2$, alors

$$1 + \frac{1}{2}x_n^3 < 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2,$$

ce qui permet de retrouver exactement la borne $\sqrt[3]{2}$ après avoir pris la racine cubique.

Nous allons donc démontrer par récurrence la propriété

$$(P_n) : \quad 0 < x_n < \sqrt[3]{2}.$$

Étape 1 : initialisation

Pour $n = 0$, on a

$$x_0 = 1.$$

Or

$$0 < 1 < \sqrt[3]{2},$$

car $1^3 = 1 < 2$.

Donc

$$0 < x_0 < \sqrt[3]{2}.$$

La propriété (P_0) est vraie.

Étape 2 : hérédité

Supposons que, pour un entier naturel n , la propriété (P_n) soit vraie :

$$0 < x_n < \sqrt[3]{2}.$$

La fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En élevant les trois membres au cube, on obtient

$$0 < x_n^3 < 2.$$

En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$,

$$0 < \frac{1}{2}x_n^3 < 1.$$

Puis en ajoutant 1 aux trois membres,

$$1 < 1 + \frac{1}{2}x_n^3 < 2.$$

Or, par définition de la suite,

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}.$$

La fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc prendre la racine cubique dans l'encadrement précédent :

$$1 < \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3} < \sqrt[3]{2}.$$

Ainsi,

$$1 < x_{n+1} < \sqrt[3]{2}.$$

En particulier,

$$0 < x_{n+1} < \sqrt[3]{2}.$$

La propriété (P_{n+1}) est donc vraie.

Étape 3 : conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < \sqrt[3]{2}.$$

Comme

$$\sqrt[3]{2} < 2,$$

on en déduit finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < 2.$$

2) Montrer que (x_n) est croissante puis convergente

a) Étude de la monotonie

Nous voulons comparer x_{n+1} et x_n .

Comme les deux nombres sont positifs, et comme la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante, il suffit de comparer leurs cubes.

D'après la définition de la suite,

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}.$$

Donc

$$x_{n+1}^3 = 1 + \frac{1}{2}x_n^3.$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned} x_{n+1}^3 - x_n^3 &= 1 + \frac{1}{2}x_n^3 - x_n^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x_n^3 \\ &= \frac{2 - x_n^3}{2}. \end{aligned}$$

Or la question 1 nous a donné le résultat plus précis

$$x_n < \sqrt[3]{2}.$$

En élevant au cube,

$$x_n^3 < 2.$$

Ainsi,

$$2 - x_n^3 > 0,$$

et donc

$$x_{n+1}^3 - x_n^3 > 0.$$

Par conséquent,

$$x_{n+1}^3 > x_n^3.$$

Comme la fonction cube est strictement croissante,

$$x_{n+1} > x_n.$$

(x_n) est strictement croissante.

b) Convergence de la suite

Nous avons montré que (x_n) est croissante.

De plus, la question 1 donne

$$x_n < \sqrt[3]{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la suite (x_n) est majorée, par exemple par $\sqrt[3]{2}$ (et donc aussi par 2).

Nous avons donc une suite qui est :

croissante et majorée.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, toute suite croissante et majorée est convergente.

(x_n) est convergente.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell.$$

D'après l'encadrement précédent,

$$1 \leq \ell \leq \sqrt[3]{2}.$$

3) Étude de la suite $U_n = x_n^3 - 2$ et calcul de la limite de x_n

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = x_n^3 - 2.$$

a) Montrons que (U_n) est géométrique

Pour reconnaître une suite géométrique, nous allons exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

Par définition,

$$U_{n+1} = x_{n+1}^3 - 2.$$

Or la relation de récurrence donne

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}.$$

En élevant au cube,

$$x_{n+1}^3 = 1 + \frac{1}{2}x_n^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= x_{n+1}^3 - 2 \\&= 1 + \frac{1}{2}x_n^3 - 2 \\&= \frac{1}{2}x_n^3 - 1.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant -1 sous la forme $-\frac{2}{2}$:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^3 - \frac{2}{2}.$$

On factorise par $\frac{1}{2}$:

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^3 - 2).$$

Mais

$$x_n^3 - 2 = U_n.$$

Ainsi,

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n.$$

C'est exactement la relation caractéristique d'une suite géométrique.

La suite (U_n) est géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2}.$$

b) Calcul du premier terme U_0

On a

$$U_0 = x_0^3 - 2.$$

Comme $x_0 = 1$,

$$U_0 = 1^3 - 2 = -1.$$

Donc

$$U_0 = -1.$$

La formule d'une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q est

$$U_n = U_0 q^n.$$

Ici,

$$U_0 = -1 \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$U_n = -1 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc

$$U_n = -\frac{1}{2^n}.$$

c) Expression de x_n^3

Puisque

$$U_n = x_n^3 - 2,$$

et

$$U_n = -\frac{1}{2^n},$$

on obtient

$$x_n^3 - 2 = -\frac{1}{2^n}.$$

En ajoutant 2 aux deux membres,

$$x_n^3 = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Comme $x_n > 0$, on peut écrire également

$$x_n = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{2^n}}.$$

Cette formule explicite confirme immédiatement les résultats précédents :

$$2 - \frac{1}{2^n} < 2 \implies x_n < \sqrt[3]{2},$$

et comme $\frac{1}{2^n}$ décroît, le nombre $2 - \frac{1}{2^n}$ croît ; par conséquent x_n croît également.

d) Calcul de la limite de x_n

Nous savons que

$$x_n^3 = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Or

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Donc

$$\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$x_n^3 = 2 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 2.$$

La fonction racine cubique est continue sur $\mathbb{R}$. En prenant la racine cubique, on obtient

$$x_n \longrightarrow \sqrt[3]{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt[3]{2}.$$

Bilan final

Les résultats principaux sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < \sqrt[3]{2} < 2$$

(x_n) est strictement croissante et convergente

$$U_n = x_n^3 - 2 \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}$$

$$U_n = -\frac{1}{2^n}$$

$$x_n^3 = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sqrt[3]{2}$$

Méthodes à retenir

1. Pour une suite définie par une racine cubique, on peut souvent comparer les cubes, car la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante.
2. Pour montrer qu'une suite récurrente reste dans un intervalle, la récurrence est souvent la méthode naturelle.
3. Une suite croissante et majorée est convergente.
4. Lorsqu'une relation contient x_n^3 et une constante, introduire une nouvelle suite de la forme $U_n = x_n^3 - a$ peut transformer la relation en une suite géométrique.
5. Une fois la formule explicite obtenue, la limite devient immédiate.

EXERCICE (4) – SUITES NUMÉRIQUES

Correction complète et détaillée

Énoncé

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère la fonction F_n définie sur $]0, 1]$ par

$$F_n(x) = (1 - x)(x + 1)^n.$$

1) Étudier le sens de variation de F_n .

2) Montrer que l'équation

$$F_n(x) = 1$$

admet une unique solution x_n .

3) a) Montrer que

$$\forall x \in]0, 1], \quad F_{n+1}(x) < F_n(x).$$

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} \in \left] \frac{n-1}{n+1}, 1 \right[.$$

c) Dédurre la monotonie de $(x_n)_n$ et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Point mathématique important

Avec la définition $F_n(x) = (1 - x)(1 + x)^n$, deux détails de l'énoncé doivent être signalés avant de commencer :

- pour $n = 1$, on a $F_1(x) = 1 - x^2 < 1$ pour tout $x \in]0, 1]$; l'équation $F_1(x) = 1$ n'a donc aucune solution dans $]0, 1]$; la suite (x_n) commence naturellement à $n = 2$;
- pour tout $x \in]0, 1]$, on a $1 + x > 1$, donc

$$F_{n+1}(x) = (1 + x)F_n(x) > F_n(x).$$

Le signe “<” de la question 3.a est donc incompatible avec la formule donnée. Dans la résolution, nous utilisons la relation mathématiquement correcte

$$F_{n+1}(x) > F_n(x).$$

1) Étude du sens de variation de F_n

Pour $x \in]0, 1]$,

$$F_n(x) = (1 - x)(1 + x)^n.$$

La fonction est dérivable sur $]0, 1[$. Calculons sa dérivée avec la formule du produit.

Posons

$$u(x) = 1 - x, \quad v(x) = (1 + x)^n.$$

Alors

$$u'(x) = -1$$

et, par dérivation de la puissance,

$$v'(x) = n(1 + x)^{n-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -(1 + x)^n + (1 - x)n(1 + x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Factorisons par $(1 + x)^{n-1}$:

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= (1 + x)^{n-1} \left[-(1 + x) + n(1 - x) \right] \\ &= (1 + x)^{n-1} \left[-1 - x + n - nx \right] \\ &= (1 + x)^{n-1} \left[(n - 1) - (n + 1)x \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F'_n(x) = (1 + x)^{n-1} \left((n - 1) - (n + 1)x \right)}.$$

Or, pour $x \in]0, 1]$,

$$1 + x > 0,$$

donc

$$(1 + x)^{n-1} > 0.$$

Le signe de $F'_n(x)$ est donc exactement le signe de

$$(n - 1) - (n + 1)x.$$

Réolvons

$$(n - 1) - (n + 1)x = 0.$$

Comme $n + 1 > 0$,

$$(n + 1)x = n - 1$$

d'où

$$\boxed{x = \frac{n - 1}{n + 1}}.$$

Cas $n = 1$

On obtient

$$F'_1(x) = (1 + x)^0(0 - 2x) = -2x < 0 \quad (x \in]0, 1]).$$

Donc F_1 est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

D'ailleurs,

$$F_1(x) = (1-x)(1+x) = 1-x^2.$$

Cas $n \geq 2$

Posons

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Pour $n \geq 2$, on a

$$0 < a_n < 1.$$

Ainsi :

x	0	a_n	1
$(n-1) - (n+1)x$	+	0	-
$F'_n(x)$	+	0	-
F_n	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

Donc, pour tout $n \geq 2$:

- F_n est strictement croissante sur $]0, a_n]$;
- F_n est strictement décroissante sur $[a_n, 1]$.

Le maximum est atteint en a_n .

Résultat

Pour $n \geq 2$,

F_n est croissante sur $]0, \frac{n-1}{n+1}]$ puis décroissante sur $[\frac{n-1}{n+1}, 1]$.

Pour $n = 1$, F_1 est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

2) Existence et unicité de la solution de $F_n(x) = 1$

Comme vu précédemment, il faut distinguer $n = 1$ et $n \geq 2$.

Pour $n = 1$

On a

$$F_1(x) = 1 - x^2.$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, $x^2 > 0$, donc

$$F_1(x) = 1 - x^2 < 1.$$

Ainsi l'équation $F_1(x) = 1$ n'a pas de solution dans $]0, 1]$.

Pour $n \geq 2$

Nous allons montrer que l'équation admet exactement une solution dans $]0, 1]$.

Rappelons

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

La fonction F_n est continue sur $]0, 1]$, croissante sur $]0, a_n]$ et décroissante sur $[a_n, 1]$.

Tout d'abord,

$$F_n(1) = (1-1)(1+1)^n = 0 < 1.$$

Calculons ensuite le maximum $F_n(a_n)$:

$$1 - a_n = 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{n+1} = \frac{2}{n+1},$$

et

$$1 + a_n = 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1) + (n-1)}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Ainsi

$$F_n(a_n) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^n.$$

Pour établir simplement que cette valeur est > 1 , on peut remarquer que F_n est strictement croissante sur $]0, a_n]$ et que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = 1.$$

Comme $a_n > 0$, toute valeur de F_n prise en un point de $]0, a_n]$ est strictement supérieure à cette limite de départ. En particulier,

$$\boxed{F_n(a_n) > 1}.$$

Nous avons donc

$$F_n(a_n) > 1 \quad \text{et} \quad F_n(1) = 0 < 1.$$

Sur l'intervalle $[a_n, 1]$, la fonction F_n est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un

$$x_n \in]a_n, 1[$$

tel que

$$F_n(x_n) = 1.$$

De plus, F_n est strictement décroissante sur $[a_n, 1]$. Une fonction strictement décroissante ne peut prendre la même valeur qu'une seule fois. Cette solution est donc unique sur $[a_n, 1]$.

Reste à vérifier qu'il n'existe pas de deuxième solution dans $]0, a_n]$. Sur cet intervalle, F_n est strictement croissante et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = 1.$$

Donc, pour tout $x \in]0, a_n]$,

$$F_n(x) > 1.$$

Il n'y a donc aucune solution de $F_n(x) = 1$ dans $]0, a_n]$.

Finalement, pour chaque $n \geq 2$, il existe une unique solution x_n telle que

$$F_n(x_n) = 1$$

et cette solution vérifie

$$\frac{n-1}{n+1} < x_n < 1.$$

Résultat

Pour tout $n \geq 2$, l'équation $F_n(x) = 1$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1]$, et plus précisément

$$x_n \in \left] \frac{n-1}{n+1}, 1 \right[.$$

3.a) Comparaison de F_{n+1} et F_n

Pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= (1-x)(1+x)^{n+1} \\ &= (1-x)(1+x)^n(1+x) \\ &= F_n(x)(1+x). \end{aligned}$$

Or, pour $x \in]0, 1]$,

$$1+x > 1.$$

De plus,

$$F_n(x) = (1-x)(1+x)^n \geq 0,$$

et pour $x \in]0, 1[$, on a même $F_n(x) > 0$.

Ainsi, pour $x \in]0, 1[$,

$$F_{n+1}(x) = (1+x)F_n(x) > F_n(x).$$

Au point $x = 1$,

$$F_{n+1}(1) = F_n(1) = 0.$$

Donc la formulation précise est

$$F_{n+1}(x) > F_n(x) \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[$$

et

$$F_{n+1}(1) = F_n(1) = 0.$$

Idée clé

L'identité

$$F_{n+1}(x) = (1+x)F_n(x)$$

est la comparaison la plus rapide. Sur $]0, 1[$, le facteur $1+x$ est strictement supérieur à 1 et $F_n(x) > 0$: la fonction d'indice $n+1$ est donc au-dessus de celle d'indice n .

3.b) Encadrement de x_{n+1}

Appliquons le résultat de la question 2 à l'indice $n+1$.

Pour une fonction F_m , la solution x_m vérifie

$$\frac{m-1}{m+1} < x_m < 1.$$

Prenons

$$m = n+1.$$

Alors

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} < x_{n+1} < 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{n+2} < x_{n+1} < 1.$$

Nous avons donc même l'encadrement plus précis

$$\boxed{\frac{n}{n+2} < x_{n+1} < 1.}$$

L'énoncé demande seulement de montrer

$$\frac{n-1}{n+1} < x_{n+1} < 1.$$

Comparons les deux fractions :

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} &= \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + n - (n^2 + n - 2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad x_{n+1} \in \left] \frac{n-1}{n+1}, 1 \right[.}$$

3.c) Monotonie de (x_n) et calcul de sa limite

Nous travaillons avec la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

Étape 1 : montrer que (x_n) est croissante

Par définition de x_{n+1} ,

$$F_{n+1}(x_{n+1}) = 1.$$

Or, d'après la relation obtenue en 3.a,

$$F_{n+1}(x) = (1+x)F_n(x).$$

En prenant $x = x_{n+1}$,

$$1 = (1+x_{n+1})F_n(x_{n+1}).$$

Donc

$$F_n(x_{n+1}) = \frac{1}{1+x_{n+1}}.$$

Comme $x_{n+1} > 0$, on a

$$1+x_{n+1} > 1,$$

d'où

$$\frac{1}{1+x_{n+1}} < 1.$$

Ainsi

$$\boxed{F_n(x_{n+1}) < 1.}$$

Mais

$$F_n(x_n) = 1.$$

Donc

$$F_n(x_{n+1}) < F_n(x_n).$$

Pour utiliser la décroissance de F_n , vérifions que x_{n+1} et x_n se trouvent tous les deux dans sa branche décroissante.

Nous savons déjà

$$x_n > \frac{n-1}{n+1} = a_n.$$

Et, d'après 3.b,

$$x_{n+1} > \frac{n}{n+2}.$$

Or

$$\frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = a_n.$$

Donc

$$x_n > a_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} > a_n.$$

Les deux nombres appartiennent donc à l'intervalle où F_n est strictement décroissante.

Sur un intervalle où une fonction est strictement décroissante, une plus petite image correspond à

un plus grand antécédent. Ainsi, de

$$F_n(x_{n+1}) < F_n(x_n)$$

on déduit

$$x_{n+1} > x_n.$$

Par conséquent,

$$(x_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement croissante.}$$

Étape 2 : convergence

Pour tout $n \geq 2$,

$$0 < x_n < 1.$$

La suite (x_n) est donc majorée par 1.

Nous venons de montrer qu'elle est croissante. Une suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel $\ell \leq 1$ tel que

$$x_n \longrightarrow \ell.$$

Étape 3 : détermination de la limite

La question 3.b donne, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n-1}{n+1} < x_{n+1} < 1.$$

Étudions les deux bornes lorsque $n \rightarrow +\infty$.

D'une part,

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \longrightarrow 1.$$

D'autre part,

$$1 \longrightarrow 1.$$

Ainsi,

$$\frac{n-1}{n+1} < x_{n+1} < 1,$$

avec les deux bornes qui tendent vers 1.

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 1.$$

Décaler l'indice d'une suite ne change pas sa limite. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Résultat

La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, elle est majorée par 1, donc convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

Bilan général

Pour $n \geq 2$, en posant

$$F_n(x) = (1-x)(1+x)^n,$$

on obtient :

1.

$$F'_n(x) = (1+x)^{n-1}((n-1) - (n+1)x),$$

donc F_n est croissante puis décroissante, avec maximum en

$$\frac{n-1}{n+1}.$$

2. L'équation $F_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n et

$$\frac{n-1}{n+1} < x_n < 1.$$

3. La comparaison correcte est

$$F_{n+1}(x) > F_n(x) \quad (0 < x < 1).$$

4. La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1.$$

EXERCICE (5)**Suites numériques****Énoncé**

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$$

et soit α la solution positive de

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

- 1) Sans déterminer α , montrer que $0 < \alpha < 1$.
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution notée U_n .
- 3) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $0 < U_n < \alpha$.
- 4) Montrer que $(U_n)_n$ est croissante et convergente.
- 5) Montrer que, pour tout $n \geq 3$,

$$U_n^n + (U_n - \alpha) \left(U_n + \frac{1}{\alpha} \right) = 0,$$

puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

1) Encadrement de α

Posons

$$g(x) = x^2 + x - 1.$$

Par définition, α est une solution positive de $g(x) = 0$.

Nous cherchons à situer cette solution sans calculer sa valeur exacte.

Calculons g aux deux nombres 0 et 1 :

$$g(0) = 0^2 + 0 - 1 = -1 < 0,$$

et

$$g(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1 > 0.$$

La fonction g est un polynôme, donc elle est continue sur $[0, 1]$. Comme $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$g(c) = 0.$$

D'autre part, sur $\mathbb{R}^+$,

$$g'(x) = 2x + 1 > 0.$$

Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle ne peut donc s'annuler qu'une seule fois sur $\mathbb{R}^+$. La solution positive étant précisément α , on obtient

$$0 < \alpha < 1.$$

2) Existence et unicité de U_n

Fixons un entier $n \geq 3$ et étudions

$$f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Étape 1 : continuité

La fonction f_n est une somme de fonctions polynomiales. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Étape 2 : existence d'une solution positive

On a

$$f_n(0) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$$

Et

$$f_n(1) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2 > 0.$$

Comme f_n est continue sur $[0, 1]$ et change de signe entre 0 et 1, il existe au moins un réel $U_n \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(U_n) = 0.$$

Étape 3 : unicité

Pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = nx^{n-1} + 2x + 1.$$

Or

$$nx^{n-1} \geq 0, \quad 2x \geq 0, \quad 1 > 0.$$

Donc

$$f'_n(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Une fonction strictement croissante ne peut prendre la valeur 0 qu'une seule fois.

Pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution U_n , et même

$$0 < U_n < 1.$$

3) Montrer que $0 < U_n < \alpha$

Nous savons déjà que

$$U_n > 0.$$

Il reste à montrer que $U_n < \alpha$.

Puisque α vérifie

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0,$$

on calcule $f_n(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \alpha^n + \alpha^2 + \alpha - 1 \\ &= \alpha^n + 0 \\ &= \alpha^n. \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on a

$$\alpha^n > 0.$$

Donc

$$f_n(\alpha) > 0.$$

Par ailleurs,

$$f_n(U_n) = 0.$$

Or f_n est strictement croissante. Ainsi

$$f_n(U_n) < f_n(\alpha) \implies U_n < \alpha.$$

En réunissant les deux inégalités :

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad 0 < U_n < \alpha}.$$

Idée clé

La comparaison $U_n < \alpha$ devient simple parce que α annule exactement la partie $x^2 + x - 1$ de f_n .
On obtient alors $f_n(\alpha) = \alpha^n > 0$, tandis que $f_n(U_n) = 0$.

4) Monotonie et convergence de (U_n)

Nous allons comparer deux termes consécutifs U_n et U_{n+1} .

Par définition,

$$f_n(U_n) = 0.$$

Ainsi

$$U_n^n + U_n^2 + U_n - 1 = 0,$$

d'où

$$U_n^2 + U_n - 1 = -U_n^n. \quad (1)$$

Calculons maintenant $f_{n+1}(U_n)$:

$$f_{n+1}(U_n) = U_n^{n+1} + U_n^2 + U_n - 1.$$

En utilisant (1),

$$\begin{aligned} f_{n+1}(U_n) &= U_n^{n+1} - U_n^n \\ &= U_n^n(U_n - 1). \end{aligned}$$

Or, d'après la question 3,

$$0 < U_n < \alpha < 1.$$

Donc

$$U_n^n > 0 \quad \text{et} \quad U_n - 1 < 0.$$

Par conséquent,

$$f_{n+1}(U_n) = U_n^n(U_n - 1) < 0.$$

Mais U_{n+1} est l'unique solution de

$$f_{n+1}(x) = 0,$$

donc

$$f_{n+1}(U_{n+1}) = 0.$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante,

$$f_{n+1}(U_n) < f_{n+1}(U_{n+1})$$

entraîne

$$U_n < U_{n+1}.$$

Ainsi :

$$(U_n) \text{ est strictement croissante.}$$

D'autre part, d'après la question 3,

$$U_n < \alpha \quad \text{pour tout } n \geq 3.$$

Donc (U_n) est majorée par α .

Une suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$$

avec, puisque $0 < U_n < \alpha$,

$$0 < \ell \leq \alpha.$$

5) Relation fondamentale et calcul de la limite

Nous partons encore de

$$f_n(U_n) = 0.$$

C'est-à-dire

$$U_n^n + U_n^2 + U_n - 1 = 0. \quad (2)$$

Comme α vérifie

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \quad (3)$$

on peut remplacer -1 dans (2), ou mieux soustraire l'expression nulle (3).

Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= U_n^n + U_n^2 + U_n - 1 \\ &= U_n^n + (U_n^2 + U_n - 1) - (\alpha^2 + \alpha - 1) \\ &= U_n^n + U_n^2 - \alpha^2 + U_n - \alpha. \end{aligned}$$

Factorisons :

$$U_n^2 - \alpha^2 = (U_n - \alpha)(U_n + \alpha).$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &= U_n^n + (U_n - \alpha)(U_n + \alpha) + (U_n - \alpha) \\ &= U_n^n + (U_n - \alpha)(U_n + \alpha + 1). \end{aligned}$$

Il reste à transformer $\alpha + 1$. Puisque

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0,$$

on a

$$\alpha^2 + \alpha = 1.$$

Comme $\alpha > 0$, on peut diviser par α :

$$\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi

$$U_n + \alpha + 1 = U_n + \frac{1}{\alpha}.$$

Finalement :

$$\forall n \geq 3, \quad U_n^n + (U_n - \alpha) \left(U_n + \frac{1}{\alpha} \right) = 0.$$

Détermination de la limite

Nous avons déjà établi que

$$U_n \longrightarrow \ell \quad \text{avec} \quad 0 < \ell \leq \alpha < 1.$$

De plus, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < U_n < \alpha < 1.$$

En élevant à la puissance n :

$$0 < U_n^n < \alpha^n.$$

Or, puisque $0 < \alpha < 1$, la suite géométrique (α^n) tend vers 0 :

$$\alpha^n \longrightarrow 0.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$U_n^n \longrightarrow 0. \quad (4)$$

La relation fondamentale donne

$$(U_n - \alpha) \left(U_n + \frac{1}{\alpha} \right) = -U_n^n.$$

Grâce à (4), le membre de droite tend vers 0. Par ailleurs,

$$U_n + \frac{1}{\alpha} \longrightarrow \ell + \frac{1}{\alpha}.$$

Cette limite est strictement positive puisque $\ell \geq 0$ et $\alpha > 0$. On peut donc conclure que le premier facteur doit tendre vers 0 :

$$U_n - \alpha \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\ell = \alpha.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.$$

Bilan final

Pour tout $n \geq 3$:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < U_n < \alpha,$$

$$(U_n) \text{ est strictement croissante et convergente,}$$

et

$$U_n^n + (U_n - \alpha) \left(U_n + \frac{1}{\alpha} \right) = 0.$$

Enfin,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.$$

EXERCICE (6)

Suites numériques - Corrigé complet et détaillé

Énoncé

Soit a un réel et on considère la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0 = a - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n^2 + (1 - 2a)U_n + a^2.$$

La fonction f est définie par :

$$f(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a^2.$$

1) a) Vérifier que

$$f(x) - a = (x - a)(x - a + 1).$$

b) Dédire que

$$f([a - 1, 1]) \subset [a - 1, a].$$

2) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq x.$$

3) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a - 1 < U_n < a.$$

b) Étudier la monotonie de $(U_n)_n$ et en déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Remarque importante sur la question 1.b. L'inclusion écrite dans l'énoncé,

$$f([a - 1, 1]) \subset [a - 1, a],$$

ne peut pas être vraie pour tout réel a . Par exemple, pour $a = 0$, on a $f(x) = x^2 + x$ et $f(1) = 2 \notin [-1, 0]$.

La propriété cohérente avec la suite des questions, et celle qui permet de démontrer l'encadrement demandé en 3.a, est

$$f([a - 1, a]) \subset [a - 1, a].$$

Nous démontrons donc ci-dessous cette propriété, tout en conservant ci-dessus la formulation telle qu'elle apparaît dans l'énoncé.

1) Étude de la fonction f

1.a) Vérifier que $f(x) - a = (x - a)(x - a + 1)$

On part de la définition

$$f(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a^2.$$

Alors

$$f(x) - a = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 - a.$$

Développons maintenant le produit proposé :

$$(x - a)(x - a + 1).$$

On peut écrire

$$x - a + 1 = x + (1 - a).$$

Ainsi

$$(x - a)(x - a + 1) = (x - a)(x + 1 - a).$$

Développons terme par terme :

$$(x - a)(x + 1 - a) = x(x + 1 - a) - a(x + 1 - a).$$

Donc

$$= x^2 + x - ax - ax - a + a^2.$$

En regroupant les termes en x :

$$= x^2 + (1 - 2a)x + a^2 - a.$$

Or

$$f(x) - a = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 - a.$$

Par conséquent,

$$f(x) - a = (x - a)(x - a + 1).$$

Cette factorisation est très utile car, sur l'intervalle $[a - 1, a]$, les deux facteurs $x - a$ et $x - a + 1$ ont des signes simples à déterminer.

1.b) Montrer l'invariance de l'intervalle $[a - 1, a]$

Nous voulons établir

$$f([a - 1, a]) \subset [a - 1, a].$$

Cela signifie que si

$$x \in [a - 1, a],$$

alors il faut prouver que

$$a - 1 \leq f(x) \leq a.$$

Soit donc $x \in [a - 1, a]$.

Première inégalité : montrer que $f(x) \leq a$

Puisque

$$a - 1 \leq x \leq a,$$

on a

$$x - a \leq 0$$

et aussi

$$x - a + 1 \geq 0.$$

Le produit d'un nombre négatif ou nul par un nombre positif ou nul est négatif ou nul. Donc

$$(x - a)(x - a + 1) \leq 0.$$

D'après la question 1.a,

$$f(x) - a = (x - a)(x - a + 1).$$

Ainsi

$$f(x) - a \leq 0,$$

d'où

$$\boxed{f(x) \leq a.}$$

Deuxième inégalité : montrer que $f(x) \geq a - 1$

Posons

$$t = x - a.$$

Comme $x \in [a - 1, a]$, on a

$$-1 \leq t \leq 0.$$

Or

$$f(x) - a = t(t + 1).$$

Sur $[-1, 0]$, on sait que

$$t(t + 1) = t^2 + t.$$

Complétons le carré :

$$t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Comme un carré est toujours positif ou nul,

$$\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Donc

$$t^2 + t \geq -\frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$f(x) - a \geq -\frac{1}{4},$$

c'est-à-dire

$$f(x) \geq a - \frac{1}{4}.$$

Or

$$a - \frac{1}{4} > a - 1.$$

Donc, a fortiori,

$$f(x) \geq a - 1.$$

Nous avons donc obtenu

$$a - 1 \leq f(x) \leq a.$$

Par conséquent,

$$f([a - 1, a]) \subset [a - 1, a].$$

Même mieux, nous avons montré que

$$f([a - 1, a]) \subset \left[a - \frac{1}{4}, a \right].$$

L'inclusion demandée dans l'intervalle $[a - 1, a]$ en découle immédiatement.

2) Montrer que $f(x) \geq x$ pour tout réel x

Nous calculons la différence $f(x) - x$:

$$f(x) - x = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 - x.$$

On simplifie les termes en x :

$$(1 - 2a)x - x = -2ax.$$

Donc

$$f(x) - x = x^2 - 2ax + a^2.$$

Mais

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Ainsi

$$f(x) - x = (x - a)^2.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x - a)^2 \geq 0.$$

Donc

$$f(x) - x \geq 0,$$

et finalement

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq x.$$

On peut même préciser que

$$f(x) = x \iff (x - a)^2 = 0 \iff x = a.$$

Donc

$$x \neq a \implies f(x) > x.$$

Cette précision sera utile pour étudier la monotonie de la suite.

3.a) Montrer que $a - 1 < U_n < a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous allons faire une démonstration par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$U_0 = a - \frac{1}{2}.$$

Comme

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0,$$

en ajoutant a aux trois membres, on obtient

$$a - 1 < a - \frac{1}{2} < a.$$

Donc

$$a - 1 < U_0 < a.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que, pour un certain entier naturel n ,

$$a - 1 < U_n < a.$$

Nous devons montrer que

$$a - 1 < U_{n+1} < a.$$

Par définition de la suite,

$$U_{n+1} = f(U_n).$$

Majoration de U_{n+1}

Puisque

$$a - 1 < U_n < a,$$

on a

$$U_n - a < 0$$

et

$$U_n - a + 1 > 0.$$

Donc

$$(U_n - a)(U_n - a + 1) < 0.$$

D'après la factorisation de la question 1.a,

$$f(U_n) - a = (U_n - a)(U_n - a + 1) < 0.$$

Par conséquent,

$$f(U_n) < a.$$

Comme $U_{n+1} = f(U_n)$,

$$\boxed{U_{n+1} < a.}$$

Minoration de U_{n+1}

D'après la question 2,

$$f(x) \geq x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

$$f(U_n) \geq U_n.$$

Comme $U_n > a - 1$, il vient

$$f(U_n) > a - 1.$$

Donc

$$\boxed{U_{n+1} > a - 1.}$$

Nous obtenons bien

$$a - 1 < U_{n+1} < a.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc, pour tout entier naturel n ,

$$a - 1 < U_n < a.$$

3.b) Monotonie de (U_n) et convergence

Par définition,

$$U_{n+1} = f(U_n).$$

La question 2 donne

$$f(x) - x = (x - a)^2.$$

En prenant $x = U_n$, on obtient

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = (U_n - a)^2.$$

Ainsi

$$U_{n+1} - U_n = (U_n - a)^2.$$

D'après la question 3.a,

$$U_n < a.$$

Donc

$$U_n \neq a,$$

et par conséquent

$$(U_n - a)^2 > 0.$$

Il s'ensuit que

$$U_{n+1} - U_n > 0.$$

Donc

$$U_{n+1} > U_n.$$

Par conséquent,

$$(U_n) \text{ est strictement croissante.}$$

D'autre part, la question 3.a donne également

$$U_n < a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite (U_n) est donc majorée par a .

Nous avons ainsi une suite :

croissante et majorée.

D'après le théorème de convergence des suites monotones,

$$(U_n) \text{ est convergente.}$$

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell.$$

$$(U_n) \text{ est strictement croissante et majorée par } a.$$

Donc elle converge vers une limite $\ell \leq a$.

3.c) Déterminer la limite de (U_n)

Nous savons maintenant que

$$U_n \longrightarrow \ell.$$

La relation de récurrence est

$$U_{n+1} = U_n^2 + (1 - 2a)U_n + a^2.$$

Puisque (U_n) converge vers ℓ , la suite décalée (U_{n+1}) converge vers la même limite ℓ .

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \ell^2 + (1 - 2a)\ell + a^2.$$

Regroupons tout dans le même membre :

$$0 = \ell^2 + (1 - 2a)\ell - \ell + a^2.$$

Donc

$$0 = \ell^2 - 2a\ell + a^2.$$

Or

$$\ell^2 - 2a\ell + a^2 = (\ell - a)^2.$$

Ainsi

$$(\ell - a)^2 = 0.$$

Donc nécessairement

$$\boxed{\ell = a.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a.}$$

Bilan général

Nous avons établi successivement :

1. La factorisation

$$f(x) - a = (x - a)(x - a + 1).$$

2. La propriété naturelle d'invariance

$$f([a - 1, a]) \subset [a - 1, a].$$

3. Pour tout réel x ,

$$f(x) - x = (x - a)^2 \geq 0,$$

donc

$$f(x) \geq x.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a - 1 < U_n < a.$$

5. La différence entre deux termes consécutifs vaut

$$U_{n+1} - U_n = (U_n - a)^2 > 0,$$

donc la suite est strictement croissante.

6. Comme $U_n < a$ pour tout n , la suite est majorée. Elle est donc convergente.

7. Sa limite est l'unique réel ℓ vérifiant

$$\ell = f(\ell),$$

c'est-à-dire

$$(\ell - a)^2 = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a.$$

Méthode à retenir. Pour une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$, trois idées reviennent souvent :

- trouver un intervalle stable par f afin d'encadrer tous les termes ;
- étudier le signe de $f(x) - x$ pour déterminer la monotonie ;
- une fois la convergence acquise, passer à la limite dans $U_{n+1} = f(U_n)$ pour déterminer la limite.