

Exercices sur les suites implicites

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

- 1) a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
 b) Dédire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha < 1$.
- 2) Soit n un entier naturel non nul.

- a) Montrer que l'équation

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

admet une et une seule solution V_n .

- b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha \leq V_n \leq 1.$$

- c) Étudier la monotonie de $(V_n)_n$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2.$$

- 1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que

$$0 < x_n < 1.$$

- 2) Vérifier que

$$f_{n+1}(x_n) = x_n,$$

puis déduire que $(x_n)_n$ est décroissante.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1.$$

1) Montrer que

$$(\exists! a_n \in]0, 1[) \quad F_n(a_n) = 0.$$

2) Étudier le signe de

$$F_{n+1}(x) - F_n(x).$$

3) Étudier la monotonie de $(a_n)_n$.

4) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1.$$

1) Étudier le sens de variation de la fonction f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n et

$$b_n < \frac{1}{2}.$$

3) Étudier le signe de

$$f_{n+1}(x) - f_n(x),$$

puis déduire la monotonie de $(b_n)_n$.

Exercice 1 – Bijection et suite (V_n)

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

1. (a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
 (b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha < 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul.

- (a) Montrer que l'équation

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

admet une et une seule solution V_n .

- (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha \leq V_n \leq 1.$$

- (c) Étudier la monotonie de la suite (V_n) .

Correction détaillée

1.a. Bijection de f et détermination de J

La fonction

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

est une fonction polynomiale. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur

$$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[.$$

Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = 3x^2 + 2.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$x^2 \geq 0.$$

Donc

$$3x^2 \geq 0$$

et, en ajoutant 2,

$$3x^2 + 2 \geq 2 > 0.$$

Ainsi,

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est donc injective sur cet intervalle.

Déterminons maintenant son image.

On a

$$f(0) = 0^3 + 2 \times 0 - 1 = -1.$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x - 1) = +\infty.$$

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle prend une fois et une seule toutes les valeurs comprises entre -1 et $+\infty$.

Donc

$$f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[.$$

Ainsi,

$$J = [-1, +\infty[$$

et

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[\text{ est bijective.}$$

1.b. Existence et unicité de α

Nous cherchons les solutions de

$$f(x) = 0.$$

Or

$$0 \in [-1, +\infty[= J.$$

Comme f est bijective de $[0, +\infty[$ vers J , toute valeur de J possède un unique antécédent.

Il existe donc un unique

$$\alpha \in [0, +\infty[$$

tel que

$$f(\alpha) = 0.$$

Montrons maintenant que $\alpha < 1$.

Calculons

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1 - 1 = 2.$$

Nous avons donc

$$f(\alpha) = 0 < 2 = f(1).$$

Puisque f est strictement croissante,

$$f(\alpha) < f(1) \implies \alpha < 1.$$

Ainsi,

$$0 \leq \alpha < 1.$$

L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α .

2.a. Existence et unicité de V_n

Soit

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme n est un entier naturel non nul,

$$n \geq 1.$$

Donc

$$\frac{1}{n} > 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \in [-1, +\infty[= J.$$

Or f est bijective de $[0, +\infty[$ vers J . La valeur $\frac{1}{n}$ possède donc un unique antécédent dans $[0, +\infty[$.

Nous notons cet antécédent V_n .

Ainsi,

$$f(V_n) = \frac{1}{n}.$$

Donc

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

admet une et une seule solution $V_n \in \mathbb{R}^+$.

2.b. Encadrement de V_n

Nous allons montrer séparément les deux inégalités.

Première inégalité : $\alpha \leq V_n$

Nous savons que

$$f(\alpha) = 0$$

et

$$f(V_n) = \frac{1}{n}.$$

Comme $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} > 0.$$

Donc

$$f(V_n) > f(\alpha).$$

Puisque f est strictement croissante,

$$V_n > \alpha.$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha < V_n.}$$

En particulier,

$$\alpha \leq V_n.$$

Deuxième inégalité : $V_n \leq 1$

Puisque $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \leq 1.$$

D'autre part,

$$f(1) = 2.$$

Ainsi,

$$f(V_n) = \frac{1}{n} \leq 1 < 2 = f(1).$$

Donc

$$f(V_n) < f(1).$$

Comme f est strictement croissante,

$$V_n < 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{V_n < 1.}$$

En réunissant les deux résultats :

$$\boxed{\alpha < V_n < 1.}$$

On obtient donc, a fortiori,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha \leq V_n \leq 1.}$$

En réalité, les deux inégalités sont strictes :

$$\boxed{\alpha < V_n < 1.}$$

2.c. Monotonie de la suite (V_n)

Pour étudier la monotonie de (V_n) , comparons V_{n+1} et V_n .

Par définition,

$$f(V_n) = \frac{1}{n}.$$

De même,

$$f(V_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n+1 > n > 0.$$

En prenant les inverses de deux nombres strictement positifs, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Donc

$$f(V_{n+1}) < f(V_n).$$

Or f est strictement croissante.

Par conséquent,

$$f(V_{n+1}) < f(V_n) \implies V_{n+1} < V_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_{n+1} < V_n.$$

La suite (V_n) est donc

strictement décroissante.

Bilan

Nous avons démontré que

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[\text{ est bijective.}$$

L'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α telle que

$$0 \leq \alpha < 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

possède une unique solution V_n et

$$\alpha < V_n < 1.$$

Enfin,

$$V_{n+1} < V_n,$$

donc

$$(V_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Exercice 2 – Étude de f_n et de la suite (x_n)

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2.$$

1. Montrer que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

admet une unique solution x_n et que

$$0 < x_n < 1.$$

2. Vérifier que

$$f_{n+1}(x_n) = x_n,$$

puis en déduire que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.

Correction détaillée

1. Existence, unicité et encadrement de x_n

Fixons un entier naturel non nul n . On étudie la fonction

$$f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2$$

sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

a) Continuité de f_n

La fonction f_n est une fonction polynomiale. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0, +\infty[$.

Cette continuité sera utile pour montrer l'existence d'une solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

b) Étude des variations de f_n

Calculons la dérivée de f_n :

$$f'_n(x) = 3x^2 + 2x + n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$x \geq 0.$$

Donc

$$3x^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x \geq 0.$$

De plus, puisque n est un entier naturel non nul,

$$n \geq 1 > 0.$$

Par conséquent,

$$3x^2 + 2x + n > 0.$$

Ainsi,

$$f'_n(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

La fonction f_n est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

Cette stricte croissance est essentielle : si l'équation $f_n(x) = 0$ possède une solution dans $\mathbb{R}^+$, elle ne pourra en posséder qu'une seule.

c) Existence d'une solution entre 0 et 1

Calculons d'abord $f_n(0)$:

$$f_n(0) = 0^3 + 0^2 + n \times 0 - 2 = -2.$$

Donc

$$f_n(0) = -2 < 0.$$

Calculons maintenant $f_n(1)$:

$$f_n(1) = 1^3 + 1^2 + n \times 1 - 2.$$

Donc

$$f_n(1) = 1 + 1 + n - 2 = n.$$

Or $n \geq 1$, donc

$$f_n(1) = n > 0.$$

Nous avons ainsi

$$f_n(0) < 0 < f_n(1).$$

La fonction f_n étant continue sur $[0, 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins un réel $x_n \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(x_n) = 0.$$

Mais f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle ne peut donc s'annuler qu'une seule fois.

Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une **unique** solution x_n dans $\mathbb{R}^+$, et cette solution vérifie

$$0 < x_n < 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f_n(x) = 0$$

admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$, et

$$0 < x_n < 1.$$

2. Calcul de $f_{n+1}(x_n)$ et monotonie de (x_n)

a) Vérification de $f_{n+1}(x_n) = x_n$

Par définition,

$$f_{n+1}(x) = x^3 + x^2 + (n+1)x - 2.$$

Nous voulons calculer $f_{n+1}(x_n)$. On remplace donc x par x_n :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^3 + x_n^2 + (n+1)x_n - 2.$$

Développons le terme $(n+1)x_n$:

$$(n+1)x_n = nx_n + x_n.$$

Ainsi,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^3 + x_n^2 + nx_n + x_n - 2.$$

Regroupons les quatre termes

$$x_n^3 + x_n^2 + nx_n - 2.$$

On obtient

$$f_{n+1}(x_n) = (x_n^3 + x_n^2 + nx_n - 2) + x_n.$$

Or x_n est, par définition, la solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Donc

$$f_n(x_n) = 0.$$

Mais

$$f_n(x_n) = x_n^3 + x_n^2 + nx_n - 2.$$

Par conséquent,

$$x_n^3 + x_n^2 + nx_n - 2 = 0.$$

En remplaçant dans l'expression précédente :

$$f_{n+1}(x_n) = 0 + x_n.$$

Finalement,

$$\boxed{f_{n+1}(x_n) = x_n.}$$

b) Comparaison de x_{n+1} et x_n

Par définition de x_{n+1} , x_{n+1} est l'unique solution positive de

$$f_{n+1}(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.}$$

D'autre part, nous venons de montrer que

$$f_{n+1}(x_n) = x_n.$$

Or, d'après la première question,

$$x_n > 0.$$

Donc

$$f_{n+1}(x_n) = x_n > 0.$$

Ainsi,

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(x_n).$$

Étudions maintenant le sens de variation de f_{n+1} . Sa dérivée est

$$f'_{n+1}(x) = 3x^2 + 2x + (n+1).$$

Pour tout $x \geq 0$,

$$3x^2 \geq 0, \quad 2x \geq 0,$$

et

$$n + 1 > 0.$$

Donc

$$f'_{n+1}(x) > 0.$$

Ainsi, f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque f_{n+1} est strictement croissante et

$$f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n),$$

on en déduit

$$x_{n+1} < x_n.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} < x_n.$$

La suite (x_n) est donc **strictement décroissante**.

Nous avons montré que

$$f_{n+1}(x_n) = x_n > 0$$

et que

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante,

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ainsi,

$$(x_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Bilan

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2.$$

On a

$$f'_n(x) = 3x^2 + 2x + n > 0 \quad (x \geq 0),$$

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus,

$$f_n(0) = -2 < 0 \quad \text{et} \quad f_n(1) = n > 0.$$

Par continuité et stricte croissance, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution x_n telle que

$$0 < x_n < 1.$$

Enfin,

$$f_{n+1}(x_n) = x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante,

$$x_{n+1} < x_n.$$

Donc

$$(x_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

Exercice 3 – Étude de la suite (a_n)

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1.$$

1) Montrer que

$$\exists! a_n \in]0, 1[\quad F_n(a_n) = 0.$$

2) Étudier le signe de

$$F_{n+1}(x) - F_n(x).$$

3) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_n$.

4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Correction détaillée

1. Existence et unicité de a_n dans $]0, 1[$

Pour un entier $n \geq 1$ fixé, considérons

$$F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1.$$

La fonction F_n est une fonction polynomiale. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $[0, 1]$.

Étape 1 : existence d'une solution dans $]0, 1[$

Calculons les valeurs de F_n aux deux extrémités de l'intervalle.

Pour $x = 0$:

$$F_n(0) = 2 \times 0^3 - 0^2 + 2(n+1) \times 0 - 1 = -1.$$

Donc

$$\boxed{F_n(0) = -1 < 0.}$$

Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} F_n(1) &= 2 \times 1^3 - 1^2 + 2(n+1) \times 1 - 1 \\ &= 2 - 1 + 2(n+1) - 1 \\ &= 2(n+1). \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, on a $n+1 > 0$, donc

$$\boxed{F_n(1) = 2(n+1) > 0.}$$

Nous avons ainsi

$$F_n(0) < 0 < F_n(1).$$

Comme F_n est continue sur $[0, 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel $a_n \in]0, 1[$ tel que

$$F_n(a_n) = 0.$$

Étape 2 : unicité de cette solution

Pour obtenir l'unicité, étudions les variations de F_n sur $\mathbb{R}^+$.

La dérivée est

$$F'_n(x) = 6x^2 - 2x + 2(n+1).$$

Nous allons montrer que cette dérivée est strictement positive.

Complétons le carré :

$$6x^2 - 2x = 6 \left(x^2 - \frac{1}{3}x \right).$$

Or

$$x^2 - \frac{1}{3}x = \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{36}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x &= 6 \left[\left(x - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{36} \right] \\ &= 6 \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= 6 \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{6} + 2(n+1) \\ &= 6 \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 + 2n + \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$6 \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 \geq 0.$$

Et puisque $n \geq 1$,

$$2n + \frac{11}{6} > 0.$$

Par conséquent,

$$F'_n(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $\mathbb{R}^+$.

Une fonction strictement croissante ne peut prendre la valeur 0 qu'une seule fois.

La solution trouvée précédemment est donc unique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel a_n tel que

$$a_n \in]0, 1[\quad \text{et} \quad F_n(a_n) = 0.$$

2. Signe de $F_{n+1}(x) - F_n(x)$

Écrivons d'abord $F_{n+1}(x)$.

En remplaçant n par $n+1$ dans la définition de F_n , on obtient

$$F_{n+1}(x) = 2x^3 - x^2 + 2((n+1)+1)x - 1.$$

Donc

$$F_{n+1}(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+2)x - 1.$$

Calculons maintenant la différence :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) - F_n(x) &= \left[2x^3 - x^2 + 2(n+2)x - 1 \right] \\ &\quad - \left[2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1 \right]. \end{aligned}$$

Les termes $2x^3$, $-x^2$ et -1 s'annulent :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) - F_n(x) &= 2(n+2)x - 2(n+1)x \\ &= 2x[(n+2) - (n+1)] \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = 2x.$$

Comme les fonctions sont étudiées sur $\mathbb{R}^+$, on a $x \geq 0$.

Donc

$$2x \geq 0.$$

Plus précisément :

$$2x = 0 \iff x = 0,$$

et

$$2x > 0 \quad \text{si } x > 0.$$

Sur $\mathbb{R}^+$,

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) \geq 0.$$

L'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$. Ainsi,

$$F_{n+1}(x) > F_n(x) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

3. Monotonie de la suite (a_n)

Nous savons, par définition de a_n , que

$$F_n(a_n) = 0.$$

D'après la question précédente,

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = 2x.$$

Prenons maintenant $x = a_n$. On obtient

$$F_{n+1}(a_n) - F_n(a_n) = 2a_n.$$

Or

$$F_n(a_n) = 0.$$

Donc

$$F_{n+1}(a_n) = 2a_n.$$

Mais, d'après la première question,

$$a_n \in]0, 1[.$$

donc

$$a_n > 0.$$

Par conséquent,

$$2a_n > 0,$$

et ainsi

$$F_{n+1}(a_n) > 0.$$

D'autre part, a_{n+1} est l'unique zéro de F_{n+1} :

$$F_{n+1}(a_{n+1}) = 0.$$

Nous avons donc

$$F_{n+1}(a_{n+1}) < F_{n+1}(a_n).$$

Or, comme nous l'avons démontré à la question 1, toute fonction F_k est strictement croissante. En particulier, F_{n+1} est strictement croissante.

Par conséquent,

$$F_{n+1}(a_{n+1}) < F_{n+1}(a_n) \implies a_{n+1} < a_n.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} < a_n.$$

La suite (a_n) est donc

$$\text{strictement décroissante.}$$

4. Montrer que $a_n \leq \frac{1}{n+1}$

Nous voulons comparer a_n au nombre

$$\frac{1}{n+1}.$$

Nous savons que

$$F_n(a_n) = 0$$

et que F_n est strictement croissante.

L'idée consiste donc à calculer

$$F_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

et à comparer cette valeur à 0.

Posons

$$x = \frac{1}{n+1}.$$

Alors

$$x^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad x^3 = \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Par définition,

$$F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1.$$

Donc

$$F_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2} + 2(n+1)\frac{1}{n+1} - 1.$$

Or

$$2(n+1)\frac{1}{n+1} = 2.$$

Ainsi,

$$F_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)^2} + 1.$$

Mettons les trois termes au même dénominateur $(n+1)^3$:

$$1 = \frac{(n+1)^3}{(n+1)^3}$$

et

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{(n+1)^3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F_n\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{2 - (n+1) + (n+1)^3}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(n+1)^3 - (n+1) + 2}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

Développons le numérateur :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) + 2 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 + 2 \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n + 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{F_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n + 2}{(n+1)^3}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tous les termes du numérateur sont positifs :

$$n^3 > 0, \quad 3n^2 > 0, \quad 2n > 0, \quad 2 > 0.$$

De plus,

$$(n+1)^3 > 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{F_n\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0.}$$

Mais

$$F_n(a_n) = 0.$$

Nous avons donc

$$F_n(a_n) < F_n\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Comme F_n est strictement croissante,

$$a_n < \frac{1}{n+1}.$$

Nous avons même obtenu une inégalité stricte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n < \frac{1}{n+1}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Bilan

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exists ! a_n \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad F_n(a_n) = 0.$$

De plus,

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = 2x.$$

Sur $\mathbb{R}^+$,

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) \geq 0.$$

La suite (a_n) vérifie

$$a_{n+1} < a_n,$$

donc elle est strictement décroissante.

Enfin,

$$a_n < \frac{1}{n+1},$$

et donc, en particulier,

$$a_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4 – Fonction f_n et suite (b_n)

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1.$$

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction f_n .
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n et que

$$b_n < \frac{1}{2}.$$

- 3) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ puis déduire la monotonie de la suite $(b_n)_n$.

Correction détaillée

1. Sens de variation de f_n

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \geq 0$,

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1.$$

La fonction $x \mapsto x/n$ est dérivable et la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc dériver f_n sur $\mathbb{R}^+$.

Rappelons que

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Ici,

$$u(x) = \frac{x}{n} \quad \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} + 2 \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2 + x^2}{n^2}} + 2 \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{n^2 + x^2} + 2 \\ &= \frac{n}{n^2 + x^2} + 2. \end{aligned}$$

Donc

$$f'_n(x) = 2 + \frac{n}{n^2 + x^2}.$$

Or $n \geq 1$ et $n^2 + x^2 > 0$, donc

$$\frac{n}{n^2 + x^2} > 0.$$

Par conséquent,

$$f'_n(x) > 2 > 0.$$

Ainsi,

$$f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+.$$

2. Existence et unicité de b_n , puis comparaison à $\frac{1}{2}$

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ puisqu'elle est somme de fonctions continues.

Calculons sa valeur en 0 :

$$f_n(0) = \arctan(0) + 0 - 1 = -1.$$

Donc

$$f_n(0) = -1 < 0.$$

Calculons maintenant sa valeur en $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{2n}\right) + 2 \times \frac{1}{2} - 1 \\ &= \arctan\left(\frac{1}{2n}\right) + 1 - 1 \\ &= \arctan\left(\frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2n} > 0.$$

La fonction $\arctan$ est strictement croissante et $\arctan(0) = 0$, donc

$$\arctan\left(\frac{1}{2n}\right) > 0.$$

Ainsi,

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Nous avons donc

$$f_n(0) < 0 < f_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Comme f_n est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un réel

$$b_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

tel que

$$f_n(b_n) = 0.$$

De plus, d'après la question 1, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle ne peut donc prendre la valeur 0 qu'une seule fois.

Par conséquent,

L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n et

$$0 < b_n < \frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$b_n < \frac{1}{2}.$$

3. Signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et monotonie de (b_n)

Écrivons d'abord $f_{n+1}(x)$:

$$f_{n+1}(x) = \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) + 2x - 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) + 2x - 1 \\ &\quad - \left[\arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1 \right] \\ &= \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) - \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

Pour $x \geq 0$, puisque $n+1 > n > 0$, on a

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

En multipliant par $x \geq 0$,

$$\frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n}.$$

L'égalité a lieu seulement lorsque $x = 0$. Pour $x > 0$,

$$\frac{x}{n+1} < \frac{x}{n}.$$

Or $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\arctan\left(\frac{x}{n+1}\right) \leq \arctan\left(\frac{x}{n}\right),$$

d'où

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Plus précisément,

$$f_{n+1}(0) - f_n(0) = 0$$

et, pour $x > 0$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0.$$

Utilisation de ce signe pour comparer b_{n+1} et b_n

Par définition de b_n ,

$$f_n(b_n) = 0.$$

Nous savons aussi, d'après la question 2, que

$$b_n > 0.$$

Puisque la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est strictement négative pour $x > 0$, en prenant $x = b_n$ nous obtenons

$$f_{n+1}(b_n) - f_n(b_n) < 0.$$

Comme $f_n(b_n) = 0$,

$$f_{n+1}(b_n) < 0.$$

D'autre part, b_{n+1} est la racine de f_{n+1} :

$$f_{n+1}(b_{n+1}) = 0.$$

Nous avons donc

$$f_{n+1}(b_n) < f_{n+1}(b_{n+1}).$$

Or f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$$b_n < b_{n+1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n < b_{n+1}.$$

La suite (b_n) est donc

strictement croissante.

Bilan

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f'_n(x) = 2 + \frac{n}{n^2 + x^2} > 0,$$

donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

L'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution b_n vérifiant

$$0 < b_n < \frac{1}{2}.$$

Enfin, pour $x \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0,$$

avec inégalité stricte pour $x > 0$. En particulier, comme $b_n > 0$,

$$f_{n+1}(b_n) < f_n(b_n) = 0 = f_{n+1}(b_{n+1}),$$

ce qui donne

$$b_n < b_{n+1}.$$

Ainsi,

(b_n) est strictement croissante.