

Suites numériques

Série d'exercices – Énoncés

Exercice 1

Soit a un réel de $]0, 1[$. On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$U_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

- 1) Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- 2) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}.$$

- 3) En déduire que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par

$$U_0 = \frac{1}{2}, \quad U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n^2}.$$

- 1) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.$$

- b) Montrer que $(U_n)_n$ est convergente.

- a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n).$$

- b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

- 2) On pose

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq n.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 3

$(U_n)_n$ une suite telle que

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \quad U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + U_n^3}{8}}.$$

1) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,$$

puis déduire la monotonie de $(U_n)_n$.

2) On pose

$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}.$$

a) Montrer que $(V_n)_n$ est géométrique.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) Montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) En déduire que $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n et que

$$0 < a_n < 1.$$

3) Montrer que

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Puis étudier la monotonie de $(a_n)_n$.

4) Déduire que $(a_n)_n$ est convergente et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Exercice 5

Soit b un réel de $\mathbb{R}_+^*$, a tel que $a > \sqrt[3]{b}$. On considère la suite $(U_n)_n$ telle que

$$U_0 = a, \quad U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{U_n} \right).$$

1) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0.$$

b) Montrer que

$$U_{n+1} - \sqrt[3]{b} = \frac{2U_n - \sqrt[3]{b}}{3U_n} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

c) En déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \sqrt[3]{b},$$

puis $(U_n)_n$ est convergente.

2) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \sqrt[3]{b} \leq \frac{2}{3} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 6

1) a) Montrer que

$$\exists! \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad \text{tel que} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

b) Montrer que

$$\alpha = \pi + \arctan \frac{1}{\alpha}.$$

2) a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \exists! \beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad \text{tel que} \quad \tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}.$$

b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \alpha < \beta_n.$$

c) Étudier la monotonie de $(\beta_n)_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

Exercice 7

Soit n un entier de $\mathbb{N}$. On considère f définie sur

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

par

$$f(x) = \tan x - x.$$

1) Étudier le sens de variation de f .

2) Montrer que $f(x) = n$ a une solution α_n .

3) a) Montrer que $(\alpha_n)_n$ est convergente.

b) Déterminer la limite de $(\alpha_n)_n$.

Exercice 8

f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}.$$

- 1) a) Étudier les variations de f .
b) Dédire que $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) Montrer que

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- 3) $(U_n)_n$ la suite définie par

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

- a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|.$$

- c) Dédire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Exercice 9

$(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites telles que

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}, \quad V_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}.$$

- 1) Déterminer la limite de $(U_n)_n$.
- 2) a) Vérifier que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3V_{n+1} = U_n + V_n.$$

- b) En déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 3.$$

- c) Montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10

f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1) Montrer que $f(x) = x$ a une seule solution α et

$$1 < \alpha < 2.$$

2) Montrer que

$$(\forall x \in [1, 2]) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2.$$

b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) Dédurre que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

4) On pose

$$T_n = (-1)^n (U_n - \alpha), \quad S_n = \sum_{k=0}^n T_k.$$

a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n},$$

en déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad T_n \geq 0.$$

b) Étudier la monotonie de $(S_n)_n$ et montrer qu'elle est majorée.

Exercice 11

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_1 = 1, \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

1) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 0.$$

En déduire que $(U_n)_n$ est croissante.

2) On pose

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

a) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \sqrt{1 + V_n}.$$

c) Dédurre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < \sqrt{3},$$

puis que $(U_n)_n$ est convergente. On pose

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

3) a) Montrer que

$$(\forall k > 3) \quad 2^k \geq k^2.$$

b) Montrer que

$$(\forall k > 2) \quad U_{k+1}^2 - U_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

Exercice 1 – Produit et convergence d'une suite

Énoncé

Soit a un réel de $]0, 1[$. On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$U_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

1. Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}.$$

3. En déduire que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Remarque indispensable sur la question 2

Avec la définition donnée dans l'énoncé, le facteur correspondant à $k = 0$ vaut

$$1 + a^{2^0} = 1 + a.$$

Par conséquent, la formule affichée à la question 2 avec le dénominateur $1 - a^2$ ne peut pas être exacte. En effet, pour $n = 1$,

$$U_1 = (1 + a)(1 + a^2),$$

tandis que

$$\frac{1 - a^4}{1 - a^2} = 1 + a^2.$$

Comme $a \in]0, 1[$, on a $1 + a \neq 1$: les deux expressions sont donc différentes.

La formule compatible avec la définition de U_n est

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

C'est cette identité que nous démontrons ci-dessous. Elle permet ensuite de répondre à la question 3.

Correction détaillée

1. Montrer que (U_n) est croissante

Pour étudier le sens de variation, comparons deux termes consécutifs U_n et U_{n+1} .

Par définition,

$$U_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

Au rang $n + 1$, on a

$$U_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^{2^k}).$$

Le produit définissant U_{n+1} contient exactement tous les facteurs de U_n , auxquels s'ajoute le facteur correspondant à $k = n + 1$. Ainsi,

$$U_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}) \right) (1 + a^{2^{n+1}}).$$

Donc

$$\boxed{U_{n+1} = U_n (1 + a^{2^{n+1}})}.$$

Comme $0 < a < 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{2^{n+1}} > 0,$$

donc

$$1 + a^{2^{n+1}} > 1.$$

D'autre part, tous les facteurs $1 + a^{2^k}$ sont strictement positifs, donc

$$U_n > 0.$$

En multipliant l'inégalité $1 + a^{2^{n+1}} > 1$ par le nombre positif U_n , on obtient

$$U_n (1 + a^{2^{n+1}}) > U_n.$$

Or le membre de gauche est U_{n+1} . Par conséquent,

$$\boxed{U_{n+1} > U_n}.$$

Ainsi, la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est **strictement croissante**.

2. Calcul d'une expression explicite de U_n

Nous allons utiliser plusieurs fois l'identité remarquable

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2.$$

Partons de

$$U_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \cdots (1 + a^{2^n}).$$

Multiplions les deux membres par $1 - a$:

$$(1 - a)U_n = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \cdots (1 + a^{2^n}).$$

Les deux premiers facteurs donnent

$$(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2.$$

Donc

$$(1-a)U_n = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}).$$

Puis

$$(1-a^2)(1+a^2) = 1-a^4,$$

d'où

$$(1-a)U_n = (1-a^4)(1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}).$$

À nouveau,

$$(1-a^4)(1+a^4) = 1-a^8.$$

Le même mécanisme se répète : à chaque étape, deux facteurs se regroupent grâce à

$$(1-x)(1+x) = 1-x^2.$$

On obtient successivement

$$1-a^2, \quad 1-a^4, \quad 1-a^8, \quad \dots, \quad 1-a^{2^{n+1}}.$$

Finalement,

$$(1-a)U_n = 1-a^{2^{n+1}}.$$

Comme $0 < a < 1$, on a $a \neq 1$, donc $1-a \neq 0$. Nous pouvons diviser par $1-a$:

$$U_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

Vérification rapide pour $n = 1$. On trouve

$$U_1 = (1+a)(1+a^2).$$

D'après la formule obtenue,

$$U_1 = \frac{1-a^4}{1-a}.$$

Or

$$1-a^4 = (1-a)(1+a)(1+a^2),$$

donc

$$\frac{1-a^4}{1-a} = (1+a)(1+a^2),$$

ce qui confirme la formule.

3. En déduire que (U_n) est convergente

Nous savons que

$$0 < a < 1.$$

Pour un réel strictement compris entre 0 et 1, ses puissances tendent vers 0 lorsque l'exposant tend vers $+\infty$.

Or

$$2^{n+1} \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$a^{2^{n+1}} \longrightarrow 0.$$

À l'aide de l'expression obtenue à la question 2,

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a},$$

on peut donc passer à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1 - 0}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{1 - a}}.$$

La suite (U_n) est donc convergente.

Une seconde justification de la convergence

La question 1 a montré que (U_n) est croissante. De plus, puisque $a^{2^{n+1}} > 0$, on a

$$1 - a^{2^{n+1}} < 1.$$

Comme $1 - a > 0$, il vient

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} < \frac{1}{1 - a}.$$

La suite (U_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{1-a}$. Elle est par conséquent convergente, et le calcul précédent montre que sa limite est précisément

$$\boxed{\frac{1}{1 - a}}.$$

Exercice 1 – Question 2

On considère un réel $a \in]0, 1[$ et la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$U_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

Remarque. Avec la définition ci-dessus, le dénominateur correct est $1 - a$. En effet, dès $n = 1$,

$$U_1 = (1 + a)(1 + a^2) = \frac{1 - a^4}{1 - a}.$$

Démonstration par récurrence

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1. Initialisation : vérification au rang $n = 1$

Par définition du produit,

$$U_1 = \prod_{k=0}^1 (1 + a^{2^k}).$$

Le produit contient ici les deux facteurs correspondant à $k = 0$ et $k = 1$:

$$U_1 = (1 + a^{2^0})(1 + a^{2^1}).$$

Or

$$2^0 = 1 \quad \text{et} \quad 2^1 = 2.$$

Donc

$$U_1 = (1 + a)(1 + a^2).$$

Nous utilisons maintenant l'identité remarquable

$$(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2.$$

Puis

$$(1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4.$$

Ainsi,

$$(1 - a)U_1 = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2) = (1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4.$$

Comme $a \in]0, 1[$, on a $a \neq 1$, donc

$$1 - a \neq 0.$$

Nous pouvons donc diviser par $1 - a$:

$$U_1 = \frac{1 - a^4}{1 - a}.$$

Mais

$$4 = 2^2 = 2^{1+1}.$$

Par conséquent,

$$U_1 = \frac{1 - a^{2^{1+1}}}{1 - a}.$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

2. Hérédité

Soit $n \geq 1$ un entier quelconque.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n . Autrement dit, supposons que

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

C'est l'**hypothèse de récurrence**.

Nous devons démontrer qu'alors la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que

$$U_{n+1} = \frac{1 - a^{2^{n+2}}}{1 - a}.$$

Partons de la définition de U_{n+1} :

$$U_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^{2^k}).$$

Séparons le dernier facteur, celui qui correspond à $k = n + 1$:

$$U_{n+1} = \left(\prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}) \right) (1 + a^{2^{n+1}}).$$

Or, par définition,

$$\prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}) = U_n.$$

Donc

$$U_{n+1} = U_n (1 + a^{2^{n+1}}).$$

Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence :

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

Nous obtenons

$$U_{n+1} = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} (1 + a^{2^{n+1}}).$$

Regroupons les deux facteurs du numérateur :

$$U_{n+1} = \frac{(1 - a^{2^{n+1}})(1 + a^{2^{n+1}})}{1 - a}.$$

Nous reconnaissons l'identité remarquable

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2,$$

avec

$$x = a^{2^{n+1}}.$$

Par conséquent,

$$(1 - a^{2^{n+1}})(1 + a^{2^{n+1}}) = 1 - (a^{2^{n+1}})^2.$$

Or

$$(a^{2^{n+1}})^2 = a^{2 \times 2^{n+1}}.$$

Et, puisque

$$2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2},$$

on a

$$(a^{2^{n+1}})^2 = a^{2^{n+2}}.$$

Ainsi,

$$U_{n+1} = \frac{1 - a^{2^{n+2}}}{1 - a}.$$

Nous avons donc bien obtenu exactement la propriété attendue au rang $n + 1$:

$$U_{n+1} = \frac{1 - a^{2^{n+2}}}{1 - a}.$$

Ainsi, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

3. Conclusion

Nous avons montré que :

- la propriété est vraie au rang 1 ;
- pour tout entier $n \geq 1$, si elle est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$,

$$U_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

Idée essentielle à retenir

À chaque passage de U_n à U_{n+1} , on multiplie par

$$1 + a^{2^{n+1}}.$$

Ce facteur est précisément le conjugué algébrique de

$$1 - a^{2^{n+1}},$$

ce qui permet d'utiliser

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$$

et de faire apparaître l'exposant suivant :

$$2^{n+1} \longrightarrow 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}.$$

C'est ce mécanisme qui rend la récurrence particulièrement naturelle.

Exercice 2 – Corrigé détaillé

Énoncé. On considère la suite (U_n) définie par

$$U_0 = \frac{1}{2}, \quad U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n^2}.$$

1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.$$

b) Montrer que (U_n) est convergente.

Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n),$$

puis que

$$0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k.$$

Montrer que

$$n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq n.$$

L'image termine par « Calculer $\lim S_n$ », alors qu'aucune suite (S_n) n'y est définie. Nous traiterons donc à la fin les deux interprétations naturelles : la somme $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ et la suite V_n explicitement définie dans l'énoncé.

1.a) Encadrement de U_n

Nous allons démontrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $U_0 = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\frac{1}{2} \leq U_0 \leq 1.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.$$

Nous devons montrer

$$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1.$$

Comme $U_n \geq \frac{1}{2} > 0$, le dénominateur $1 + U_n^2$ est strictement positif.

Pour la borne supérieure :

$$U_{n+1} \leq 1 \iff \frac{2U_n}{1+U_n^2} \leq 1 \iff 2U_n \leq 1+U_n^2.$$

Or

$$1+U_n^2-2U_n=(1-U_n)^2 \geq 0.$$

Donc $U_{n+1} \leq 1$.

Pour la borne inférieure :

$$U_{n+1} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{2U_n}{1+U_n^2} \geq \frac{1}{2} \iff 4U_n \geq 1+U_n^2.$$

Puisque $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, on a $U_n^2 \leq U_n$, donc

$$1+U_n^2 \leq 1+U_n.$$

Et, comme $U_n \geq \frac{1}{2}$,

$$1+U_n \leq 4U_n \quad \text{car} \quad 4U_n - (1+U_n) = 3U_n - 1 \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi $1+U_n^2 \leq 4U_n$, donc $U_{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Nous avons donc

$$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1.}$$

1.b) Convergence de (U_n)

Étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{2U_n}{1+U_n^2} - U_n \\ &= \frac{2U_n - U_n(1+U_n^2)}{1+U_n^2} \\ &= \frac{U_n - U_n^3}{1+U_n^2} \\ &= \frac{U_n(1-U_n^2)}{1+U_n^2} \\ &= \frac{U_n(1-U_n)(1+U_n)}{1+U_n^2}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$. Tous les facteurs du numérateur sont donc positifs ou nuls, et le dénominateur est strictement positif. Ainsi

$$U_{n+1} - U_n \geq 0.$$

La suite (U_n) est donc croissante. De plus, elle est majorée par 1. Une suite croissante et majorée est convergente. Par conséquent,

$$\boxed{(U_n) \text{ est convergente.}}$$

Inégalité sur $1 - U_{n+1}$

Partons de la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} 1 - U_{n+1} &= 1 - \frac{2U_n}{1 + U_n^2} \\ &= \frac{1 + U_n^2 - 2U_n}{1 + U_n^2} \\ &= \frac{(1 - U_n)^2}{1 + U_n^2}. \end{aligned}$$

Comme $U_n \leq 1$, on a $1 - U_n \geq 0$, donc

$$1 - U_{n+1} \geq 0.$$

Pour obtenir la majoration demandée, écrivons

$$1 - U_{n+1} = (1 - U_n) \frac{1 - U_n}{1 + U_n^2}.$$

Il suffit donc de majorer

$$\frac{1 - U_n}{1 + U_n^2}.$$

Puisque $U_n \geq \frac{1}{2}$,

$$1 - U_n \leq \frac{1}{2}$$

et

$$1 + U_n^2 \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Ainsi

$$0 \leq \frac{1 - U_n}{1 + U_n^2} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

Comme $1 - U_n \geq 0$, on peut multiplier par $1 - U_n$:

$$0 \leq (1 - U_n) \frac{1 - U_n}{1 + U_n^2} \leq \frac{2}{5} (1 - U_n).$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5} (1 - U_n).}$$

Majoration de $1 - U_n$

Nous démontrons par récurrence que

$$\mathcal{Q}_n : \quad 0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$1 - U_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^0.$$

Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

D'après l'inégalité précédente,

$$0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - U_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 1 - U_{n+1} &\leq \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}.$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.}$$

Limite de U_n

Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0.$$

Or

$$0 \leq 1 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - U_n) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1.}$$

2) Étude de la moyenne V_n

Pour $n \geq 1$,

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k.$$

La majoration obtenue précédemment donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 1 - U_k \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^k.$$

Donc

$$U_k \geq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^k.$$

Et, puisque $U_k \leq 1$,

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^k \leq U_k \leq 1.$$

Sommons ces inégalités de $k = 1$ à $k = n$:

$$\sum_{k=1}^n \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^k \right] \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n 1.$$

Le membre de droite vaut simplement

$$\sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Pour le membre de gauche,

$$\sum_{k=1}^n \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^k \right] = n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^k.$$

La somme est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^k = \frac{\frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)}{1 - \frac{2}{5}}.$$

Comme

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^k &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5} \right)^k = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right).$$

Finalement,

$$\boxed{n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \sum_{k=1}^n U_k \leq n.}$$

Divisons maintenant par $n > 0$:

$$1 - \frac{1}{3n} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \leq 1.$$

Par définition de V_n ,

$$1 - \frac{1}{3n} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq V_n \leq 1.$$

Or

$$0 \leq 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \leq 1,$$

donc

$$0 \leq \frac{1}{3n} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq \frac{1}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi le membre de gauche tend vers 1, et le membre de droite vaut 1. Par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1.}$$

Remarque sur la dernière ligne de l'image

L'image demande « Calculer $\lim S_n$ », mais (S_n) n'y est pas définie. Si l'on note naturellement

$$S_n = \sum_{k=1}^n U_k,$$

alors l'encadrement précédent donne

$$n - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \leq S_n \leq n.$$

Le membre de gauche tend vers $+\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.}$$

En revanche, pour la moyenne explicitement définie dans l'énoncé,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1.}$$

Exercice 3 – Corrigé détaillé

Énoncé

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + U_n^3}{8}}.$$

- 1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,$$

puis en déduire la monotonie de la suite (U_n) .

- 2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}.$$

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

- b) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

1. Étude de la suite (U_n)

- 1.a) Montrer que $U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

L'idée la plus directe consiste à faire une **récurrence**. La relation définissant U_{n+1} contient U_n^3 : il est donc naturel de comparer les **cubes**, ce qui évite des calculs compliqués.

Posons la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}.$$

Or

$$\frac{2}{7} > \frac{1}{7}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\sqrt[3]{\frac{2}{7}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{U_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}}.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

En élevant au cube, l'ordre est conservé :

$$U_n^3 > \frac{1}{7}.$$

On ajoute 1 aux deux membres :

$$1 + U_n^3 > 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}.$$

Puis on divise par $8 > 0$:

$$\frac{1 + U_n^3}{8} > \frac{1}{7}.$$

Or, d'après la définition de la suite,

$$U_{n+1}^3 = \frac{1 + U_n^3}{8}.$$

Donc

$$U_{n+1}^3 > \frac{1}{7}.$$

En prenant la racine cubique,

$$U_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

En particulier, tous les termes U_n sont strictement positifs.

1.b) Montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ et étudier la monotonie

Comme $U_n > 0$, on peut diviser par U_n sans changer le sens d'une inégalité. Ainsi,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \iff U_{n+1} < U_n.$$

Pour comparer U_{n+1} et U_n , le plus simple est encore de comparer leurs cubes. D'après la relation de récurrence,

$$U_{n+1}^3 = \frac{1 + U_n^3}{8}.$$

Nous cherchons donc à montrer

$$\frac{1 + U_n^3}{8} < U_n^3.$$

Comme $8 > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1 + U_n^3}{8} < U_n^3 &\iff 1 + U_n^3 < 8U_n^3 \\ &\iff 1 < 7U_n^3 \\ &\iff \frac{1}{7} < U_n^3. \end{aligned}$$

Mais la question 1.a donne précisément

$$U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}},$$

donc

$$U_n^3 > \frac{1}{7}.$$

Par conséquent,

$$U_{n+1}^3 < U_n^3.$$

La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$U_{n+1} < U_n.$$

Comme $U_n > 0$, nous pouvons diviser par U_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1.$$

Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} < U_n.$$

Ainsi,

$$(U_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

De plus, d'après 1.a,

$$U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

La suite est donc minorée par $\sqrt[3]{1/7}$. Une suite décroissante et minorée est convergente. On sait donc déjà que (U_n) admet une limite réelle.

2. Étude de la suite auxiliaire (V_n)

On pose

$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}.$$

2.a) Montrer que (V_n) est géométrique

Pour reconnaître une suite géométrique, on cherche à exprimer V_{n+1} en fonction de V_n sous la forme

$$V_{n+1} = qV_n,$$

où q est une constante.

Partons de la définition :

$$V_{n+1} = \frac{7}{8}U_{n+1}^3 - \frac{1}{8}.$$

Or

$$U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + U_n^3}{8}},$$

donc, en élevant au cube,

$$U_{n+1}^3 = \frac{1 + U_n^3}{8}.$$

Remplaçons dans V_{n+1} :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{7}{8} \left(\frac{1 + U_n^3}{8} \right) - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7(1 + U_n^3)}{64} - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Mettons au même dénominateur. Comme

$$\frac{1}{8} = \frac{8}{64},$$

on obtient

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{7 + 7U_n^3}{64} - \frac{8}{64} \\ &= \frac{7U_n^3 - 1}{64}. \end{aligned}$$

Regardons maintenant V_n :

$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8} = \frac{7U_n^3 - 1}{8}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{8}V_n = \frac{1}{8} \times \frac{7U_n^3 - 1}{8} = \frac{7U_n^3 - 1}{64}.$$

Ainsi,

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{8}V_n.}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison

$$\boxed{q = \frac{1}{8}}.$$

Calculons son premier terme :

$$V_0 = \frac{7}{8}U_0^3 - \frac{1}{8}.$$

Comme

$$U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}},$$

on a

$$U_0^3 = \frac{2}{7}.$$

Donc

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{7}{8} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{2}{8} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

La formule d'une suite géométrique donne alors

$$V_n = V_0 q^n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{V_n = \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1} .}$$

2.b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Nous allons utiliser l'expression explicite de V_n . D'une part,

$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8},$$

et d'autre part,

$$V_n = \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1}.$$

Donc

$$\frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1}.$$

Multiplions par 8 :

$$7U_n^3 - 1 = 8 \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1}.$$

Or

$$8 \left(\frac{1}{8} \right)^{n+1} = \left(\frac{1}{8} \right)^n.$$

Ainsi,

$$7U_n^3 - 1 = \left(\frac{1}{8} \right)^n,$$

puis

$$7U_n^3 = 1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Donc

$$U_n^3 = \frac{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{7}.$$

Comme $U_n > 0$, on peut prendre la racine cubique :

$$U_n = \sqrt[3]{\frac{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{7}}.$$

Or

$$0 < \frac{1}{8} < 1,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^3 = \frac{1 + 0}{7} = \frac{1}{7}.$$

La fonction racine cubique étant continue,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

Bilan

Nous avons obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \quad \implies \quad (U_n) \text{ est strictement décroissante}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{8}V_n, \quad V_0 = \frac{1}{8}$$

$$V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$$

$$U_n = \sqrt[3]{\frac{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{7}}$$

et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}.$$

Exercice 4 - Corrigé détaillé

Énoncé

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

- 1) Montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- 2) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n et que $0 < a_n < 1$.
- 3) Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x),$$

puis étudier la monotonie de la suite (a_n) .

- 4) En déduire que (a_n) est convergente et calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

1. Bijection de f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = 1 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Or, pour tout réel t ,

$$-1 \leq \sin t \leq 1.$$

Donc

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \geq -1,$$

et par conséquent

$$f'_n(x) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Comme $n \geq 2$, on a $1/n \leq 1/2$, d'où

$$1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) > 0.$$

La fonction f_n est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Il reste à examiner son comportement aux deux extrémités de $\mathbb{R}$. Comme

$$-1 \leq \cos\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1,$$

on obtient

$$x - 1 \leq f_n(x) \leq x + 1.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, les deux membres $x - 1$ et $x + 1$ tendent vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

De même, lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty.$$

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses valeurs vont de $-\infty$ à $+\infty$. Elle prend donc chaque valeur réelle une fois et une seule.

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est bijective.}$$

2. Existence, unicité et encadrement de a_n

Puisque f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, la valeur 0 possède un unique antécédent. Il existe donc un unique réel a_n tel que

$$f_n(a_n) = 0.$$

Autrement dit,

$$a_n - \cos\left(\frac{a_n}{n}\right) = 0,$$

donc

$$a_n = \cos\left(\frac{a_n}{n}\right). \quad (1)$$

Montrons maintenant que cette solution appartient à $]0, 1[$.

En $x = 0$,

$$f_n(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0.$$

En $x = 1$,

$$f_n(1) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $n \geq 2$, on a $0 < 1/n \leq 1/2$, donc $\cos(1/n) < 1$. Ainsi,

$$f_n(1) > 0.$$

Nous avons donc

$$f_n(0) < 0 < f_n(1).$$

La fonction f_n étant continue, elle s'annule entre 0 et 1. Comme cette racine est unique, il s'agit nécessairement de a_n . Par conséquent,

$$0 < a_n < 1.$$

3. Comparaison de f_{n+1} et f_n , puis monotonie de (a_n)

Soit $x \in [0, 1]$. Comme $n + 1 > n > 0$,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

En multipliant par $x \geq 0$,

$$0 \leq \frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n}.$$

De plus, puisque $x \leq 1$ et $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2} < \pi.$$

Or la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$. Donc, puisque $x/(n+1) \leq x/n$,

$$\cos\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

En changeant de signe,

$$-\cos\left(\frac{x}{n+1}\right) \leq -\cos\left(\frac{x}{n}\right),$$

puis en ajoutant x ,

$$x - \cos\left(\frac{x}{n+1}\right) \leq x - \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x).}$$

Passons maintenant aux racines a_n . Nous savons que $a_n \in]0, 1[$, donc nous pouvons appliquer l'inégalité précédente avec $x = a_n$:

$$f_{n+1}(a_n) \leq f_n(a_n).$$

Or a_n est la racine de f_n , donc

$$f_n(a_n) = 0.$$

Par conséquent,

$$f_{n+1}(a_n) \leq 0.$$

D'autre part, a_{n+1} est l'unique racine de f_{n+1} , donc

$$f_{n+1}(a_{n+1}) = 0.$$

La fonction f_{n+1} est strictement croissante. Pour une fonction strictement croissante, si

$$f_{n+1}(a_n) \leq f_{n+1}(a_{n+1}),$$

alors nécessairement

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Nous obtenons donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{a_n \leq a_{n+1}}.$$

La suite (a_n) est donc **croissante**.

4. Convergence de (a_n) et calcul de sa limite

Nous avons démontré deux propriétés essentielles :

$$(a_n) \text{ est croissante} \quad \text{et} \quad 0 < a_n < 1.$$

Ainsi, la suite (a_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

Notons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell.$$

Comme $0 < a_n < 1$, la suite (a_n) est bornée. En particulier,

$$0 < \frac{a_n}{n} < \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Nous utilisons maintenant la relation fondamentale obtenue à la question 2 :

$$a_n = \cos\left(\frac{a_n}{n}\right).$$

La fonction cosinus étant continue en 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{a_n}{n}\right) = \cos(0) = 1.$$

Comme les deux membres sont égaux pour tout n ,

$$\ell = 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1.}$$

Idées essentielles à retenir

- Pour montrer la bijectivité, l'idée la plus directe est de prouver que f'_n est strictement positive, puis de vérifier que f_n va de $-\infty$ à $+\infty$.
- Pour localiser la racine, il suffit de calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.
- Pour comparer les racines a_n et a_{n+1} , on compare d'abord les fonctions f_n et f_{n+1} sur l'intervalle où se trouvent leurs racines.
- Pour calculer la limite, la relation $a_n = \cos(a_n/n)$ est la clé : puisque a_n reste entre 0 et 1, le quotient a_n/n tend immédiatement vers 0.

Exercice 5 – Corrigé détaillé

Énoncé

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit a un réel tel que

$$a > \sqrt[3]{b}.$$

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 = a \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{U_n} \right).$$

1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que

$$U_{n+1} - \sqrt[3]{b} = \frac{2U_n - \sqrt[3]{b}}{3U_n} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > \sqrt[3]{b}$, puis que (U_n) est convergente.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - \sqrt[3]{b} \leq \frac{2}{3} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Solution

Posons, pour alléger les écritures,

$$\alpha = \sqrt[3]{b}.$$

Comme $b > 0$, on a $\alpha > 0$, et

$$\alpha^2 = \sqrt[3]{b^2}.$$

La relation de récurrence devient donc

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} \right).$$

De plus, l'hypothèse $a > \sqrt[3]{b}$ s'écrit simplement

$$U_0 = a > \alpha > 0.$$

1.a) Positivité de la suite

Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > 0.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$U_0 = a > \alpha > 0.$$

Ainsi, $U_0 > 0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$U_n > 0.$$

Alors $2U_n > 0$. D'autre part, $\alpha^2 > 0$ et $U_n > 0$, donc

$$\frac{\alpha^2}{U_n} > 0.$$

Par conséquent,

$$2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} > 0.$$

Comme $\frac{1}{3} > 0$, on obtient

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} \right) > 0.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > 0.}$$

En particulier, tous les quotients contenant U_n au dénominateur sont bien définis.

1.b) Une identité fondamentale

Partons de la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} \right).$$

Soustrayons α aux deux membres :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - \alpha &= \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} \right) - \alpha \\ &= \frac{2U_n}{3} + \frac{\alpha^2}{3U_n} - \alpha. \end{aligned}$$

Puisque $U_n > 0$, nous pouvons mettre les trois termes au même dénominateur $3U_n$:

$$U_{n+1} - \alpha = \frac{2U_n^2 + \alpha^2 - 3\alpha U_n}{3U_n}.$$

Il faut maintenant factoriser le numérateur. On remarque que

$$\begin{aligned} (2U_n - \alpha)(U_n - \alpha) &= 2U_n^2 - 2\alpha U_n - \alpha U_n + \alpha^2 \\ &= 2U_n^2 - 3\alpha U_n + \alpha^2. \end{aligned}$$

C'est exactement le numérateur précédent. Ainsi,

$$U_{n+1} - \alpha = \frac{(2U_n - \alpha)(U_n - \alpha)}{3U_n}.$$

Donc

$$U_{n+1} - \sqrt[3]{b} = \frac{2U_n - \sqrt[3]{b}}{3U_n} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

Idée simple. Cette factorisation est très utile : elle permet de comparer directement U_{n+1} à $\alpha = \sqrt[3]{b}$ à partir de la position de U_n par rapport à α .

1.c) Minoration par $\sqrt[3]{b}$ et convergence

Nous montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > \alpha.$$

Initialisation. Par hypothèse,

$$U_0 = a > \alpha.$$

Hérédité. Supposons que

$$U_n > \alpha.$$

Alors

$$U_n - \alpha > 0.$$

De plus,

$$2U_n - \alpha > 2\alpha - \alpha = \alpha > 0,$$

et, d'après la question 1.a),

$$3U_n > 0.$$

Par l'identité de la question 1.b),

$$U_{n+1} - \alpha = \underbrace{\frac{2U_n - \alpha}{3U_n}}_{>0} \underbrace{(U_n - \alpha)}_{>0} > 0.$$

Donc

$$U_{n+1} > \alpha.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n > \sqrt[3]{b}.$$

Ainsi, (U_n) est minorée par $\sqrt[3]{b}$.

Il reste à étudier son sens de variation. Calculons $U_{n+1} - U_n$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{3} \left(2U_n + \frac{\alpha^2}{U_n} \right) - U_n \\ &= \frac{2U_n}{3} + \frac{\alpha^2}{3U_n} - \frac{3U_n}{3} \\ &= \frac{\alpha^2 - U_n^2}{3U_n} \\ &= \frac{(\alpha - U_n)(\alpha + U_n)}{3U_n}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n > \alpha > 0.$$

Donc

$$\alpha - U_n < 0, \quad \alpha + U_n > 0, \quad 3U_n > 0.$$

Par conséquent,

$$U_{n+1} - U_n < 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{(U_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

La suite (U_n) est donc à la fois :

décroissante et minorée par α .

D'après le théorème de convergence des suites monotones,

$$\boxed{(U_n) \text{ est convergente.}}$$

2.a) Une majoration de l'écart à $\sqrt[3]{b}$

Nous repartons de l'identité obtenue en 1.b) :

$$U_{n+1} - \alpha = \frac{2U_n - \alpha}{3U_n} (U_n - \alpha).$$

Or

$$\frac{2U_n - \alpha}{3U_n} = \frac{2U_n}{3U_n} - \frac{\alpha}{3U_n} = \frac{2}{3} - \frac{\alpha}{3U_n}.$$

Comme $\alpha > 0$ et $U_n > 0$,

$$\frac{\alpha}{3U_n} > 0,$$

d'où

$$\frac{2U_n - \alpha}{3U_n} < \frac{2}{3}.$$

D'autre part, nous avons déjà montré que

$$U_n - \alpha > 0.$$

Nous pouvons donc multiplier l'inégalité précédente par $U_n - \alpha$ sans changer son sens :

$$\frac{2U_n - \alpha}{3U_n}(U_n - \alpha) \leq \frac{2}{3}(U_n - \alpha).$$

Le membre de gauche étant $U_{n+1} - \alpha$, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - \sqrt[3]{b} \leq \frac{2}{3} (U_n - \sqrt[3]{b}).$$

Idée simple. L'écart entre U_n et $\sqrt[3]{b}$ est donc, à chaque étape, au plus égal aux deux tiers de l'écart précédent. L'écart se resserre de plus en plus autour de $\sqrt[3]{b}$.

2.b) Limite de (U_n)

La question précédente permet de voir directement vers quelle valeur la suite se rapproche.

Posons

$$d_n = U_n - \alpha.$$

Nous savons que $d_n > 0$ et que

$$d_{n+1} \leq \frac{2}{3} d_n.$$

En appliquant cette inégalité successivement,

$$d_1 \leq \frac{2}{3} d_0,$$

puis

$$d_2 \leq \frac{2}{3} d_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0,$$

et ainsi de suite. On obtient, par récurrence,

$$0 < d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0.$$

Comme

$$d_0 = U_0 - \alpha = a - \alpha,$$

nous avons

$$0 < U_n - \alpha \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (a - \alpha).$$

Or

$$0 < \frac{2}{3} < 1,$$

donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Ainsi,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n (a - \alpha) \longrightarrow 0.$$

Par encadrement,

$$U_n - \alpha \longrightarrow 0.$$

Donc

$$U_n \longrightarrow \alpha.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt[3]{b}.$$

Bilan. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[3]{b} < U_{n+1} < U_n \leq U_0 = a,$$

et les termes de la suite se rapprochent progressivement de $\sqrt[3]{b}$. Ainsi,

$$U_n \searrow \sqrt[3]{b}.$$

Exercice 6 - Corrigé détaillé

Énoncé

- 1) a) Montrer que

$$\exists! \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

- b) Montrer que

$$\alpha = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

- 2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\exists! \beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\quad \tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}.$$

- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha < \beta_n$.

- c) Étudier la monotonie de (β_n) et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n.$$

1. Étude du réel α

1.a) Existence et unicité de α

L'équation demandée est

$$\tan x = \frac{1}{x}.$$

Pour comparer simplement les deux membres, posons

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{x}, \quad x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

Idée essentielle

Si l'on montre que f est strictement croissante et qu'elle passe de valeurs négatives à des valeurs positives, alors elle coupe l'axe des abscisses une seule fois. Cela donnera directement l'existence et l'unicité de α .

Sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, la fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}.$$

Or, pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$,

$$\frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} > 0.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) > 0}.$$

Ainsi, f est **strictement croissante** sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Étudions maintenant son comportement aux extrémités de l'intervalle. Lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$,

$$\tan x \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \rightarrow \frac{2}{\pi},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = -\infty.$$

De même, lorsque $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-$,

$$\tan x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \rightarrow \frac{2}{3\pi},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, et ses valeurs passent de $-\infty$ à $+\infty$. Elle s'annule donc une fois et une seule.

Il existe ainsi un unique réel $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ tel que

$$f(\alpha) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\exists! \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\text{ tel que } \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

1.b) Montrer que $\alpha = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Nous savons que

$$\tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Comme $\alpha > \frac{\pi}{2} > 0$, nous avons

$$\frac{1}{\alpha} > 0,$$

donc

$$\tan \alpha > 0.$$

Sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$, la tangente est négative sur

$$\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

et positive sur

$$\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

Puisque $\tan \alpha > 0$, on en déduit

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Ainsi

$$0 < \alpha - \pi < \frac{\pi}{2}.$$

Or la tangente est de période π , donc

$$\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Comme $\alpha - \pi \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on peut appliquer la fonction arctan :

$$\alpha - \pi = \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\alpha = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

2. Étude de la suite (β_n)

2.a) Existence et unicité de β_n

Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous cherchons les solutions de

$$\tan x = n + \frac{1}{x}$$

dans $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Posons

$$g_n(x) = \tan x - n - \frac{1}{x}, \quad x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

La fonction g_n est dérivable et

$$g'_n(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}.$$

Les deux termes sont strictement positifs, donc

$$\boxed{g'_n(x) > 0}.$$

Ainsi g_n est strictement croissante sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} g_n(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} g_n(x) = +\infty.$$

Par continuité et stricte croissance, g_n s'annule donc une fois et une seule sur $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Il existe ainsi un unique $\beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ tel que

$$g_n(\beta_n) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\exists! \beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\text{ tel que } \tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}}.$$

2.b) Comparaison de α et β_n

Nous allons utiliser la fonction g_n , qui est strictement croissante.

D'après la définition de α ,

$$\tan \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

Calculons alors $g_n(\alpha)$:

$$\begin{aligned} g_n(\alpha) &= \tan \alpha - n - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} - n - \frac{1}{\alpha} \\ &= -n. \end{aligned}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-n < 0,$$

donc

$$g_n(\alpha) < 0.$$

D'autre part, par définition de β_n ,

$$g_n(\beta_n) = 0.$$

Or g_n est strictement croissante. Pour passer de la valeur négative $g_n(\alpha)$ à la valeur nulle $g_n(\beta_n)$, l'abscisse doit augmenter. Par conséquent,

$$\alpha < \beta_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha < \beta_n.$$

2.c) Monotonie de (β_n)

Nous comparons maintenant β_n et β_{n+1} .

Par définition,

$$g_n(x) = \tan x - n - \frac{1}{x}$$

et

$$g_{n+1}(x) = \tan x - (n+1) - \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) - 1.$$

En particulier, pour $x = \beta_n$,

$$g_{n+1}(\beta_n) = g_n(\beta_n) - 1.$$

Mais $g_n(\beta_n) = 0$, donc

$$g_{n+1}(\beta_n) = -1 < 0.$$

Par ailleurs,

$$g_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0.$$

Comme g_{n+1} est strictement croissante, on obtient

$$\beta_n < \beta_{n+1}.$$

Donc la suite (β_n) est **strictement croissante**.

Détermination de la limite de (β_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[,$$

donc

$$\beta_n < \frac{3\pi}{2}.$$

La suite (β_n) est donc croissante et majorée par $\frac{3\pi}{2}$. Elle est par conséquent convergente.

Notons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \ell.$$

Nous avons nécessairement

$$\ell \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Pour déterminer ℓ , utilisons l'équation vérifiée par β_n :

$$\tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}.$$

Puisque $\beta_n > \alpha > 0$, nous avons

$$\frac{1}{\beta_n} > 0.$$

Ainsi

$$\tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n} > n.$$

Comme

$$n \longrightarrow +\infty,$$

on en déduit

$$\boxed{\tan \beta_n \longrightarrow +\infty}.$$

Or tous les β_n appartiennent à

$$\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$$

(car $\beta_n > \alpha > \pi$), et sur cet intervalle la tangente tend vers $+\infty$ uniquement lorsque x tend vers $\frac{3\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

Par conséquent,

$$\boxed{\ell = \frac{3\pi}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{3\pi}{2}}.$$

Conclusion

On a obtenu :

$$\exists! \alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[: \tan \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

avec

$$\alpha = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\exists! \beta_n \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[: \tan \beta_n = n + \frac{1}{\beta_n},$$

$$\alpha < \beta_n,$$

$$\beta_n < \beta_{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{3\pi}{2}.$$

Exercice 7 - Corrigé détaillé

Énoncé

Soit n un entier de $\mathbb{N}$. On considère la fonction f définie sur

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

par

$$f(x) = \tan x - x.$$

- 1) Étudier le sens de variation de f .
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution α_n .
- 3)
 - a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente.
 - b) Déterminer la limite de $(\alpha_n)_n$.

1) Sens de variation de f

La fonction tangente est définie et dérivable sur

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Par conséquent, f est dérivable sur I .

Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = (\tan x)' - 1.$$

Or

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Mettons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Comme $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, on obtient

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Pour tout $x \in I$,

$$\tan^2 x \geq 0.$$

Ainsi,

$$f'(x) \geq 0.$$

De plus,

$$f'(x) = 0 \iff \tan x = 0 \iff x = 0.$$

La dérivée est donc positive sur I , sauf en un seul point où elle s'annule. On en déduit que f est **strictement croissante** sur I .

Pour préparer la question suivante, calculons les limites aux extrémités de l'intervalle. Lorsque $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+$,

$$\tan x \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad -x \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$,

$$\tan x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad -x \rightarrow -\frac{\pi}{2},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty.$$

Ainsi, f est continue et strictement croissante sur I , et ses valeurs vont de $-\infty$ à $+\infty$.

2) Existence et unicité de α_n

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Nous cherchons les solutions de

$$f(x) = n.$$

D'après la question précédente, f est continue et strictement croissante sur I , avec

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty.$$

Elle prend donc toutes les valeurs réelles, et chacune une seule fois.

En particulier, pour le réel n , il existe un unique réel

$$\alpha_n \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

tel que

$$f(\alpha_n) = n.$$

Autrement dit,

$$\tan \alpha_n - \alpha_n = n.$$

Donc

$$\tan \alpha_n = n + \alpha_n.$$

Comme $f(0) = 0$, pour $n \geq 0$ on a $f(\alpha_n) = n \geq f(0)$. Puisque f est croissante,

$$\alpha_n \geq 0.$$

Ainsi,

$$0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{2}.$$

En particulier, $\alpha_0 = 0$.

3a) Convergence de la suite (α_n)

Étape 1 : montrer que (α_n) est croissante

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition,

$$f(\alpha_n) = n$$

et

$$f(\alpha_{n+1}) = n + 1.$$

On a évidemment

$$n < n + 1,$$

donc

$$f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1}).$$

Or f est strictement croissante. L'ordre des images est donc le même que l'ordre des antécédents :

$$\boxed{\alpha_n < \alpha_{n+1}.}$$

La suite (α_n) est donc **strictement croissante**.

Étape 2 : montrer que (α_n) est majorée

Nous avons déjà établi que

$$0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\alpha_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

La suite (α_n) est donc majorée par $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion

La suite (α_n) est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell}$$

avec

$$0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}.$$

3b) Détermination de la limite

Nous savons que

$$\tan \alpha_n - \alpha_n = n,$$

donc

$$\tan \alpha_n = n + \alpha_n.$$

Or

$$\alpha_n \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\tan \alpha_n = n + \alpha_n \geq n.$$

Comme

$$n \longrightarrow +\infty,$$

on obtient

$$\tan \alpha_n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part, $0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ et (α_n) converge vers $\ell \leq \frac{\pi}{2}$.

Supposons, pour comprendre, que

$$\ell < \frac{\pi}{2}.$$

Alors la fonction tangente serait continue au point ℓ , et on aurait

$$\tan \alpha_n \longrightarrow \tan \ell,$$

qui est un nombre réel fini. Mais nous venons de montrer que

$$\tan \alpha_n \longrightarrow +\infty.$$

C'est impossible.

Donc ℓ ne peut pas être strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Comme nous savons déjà que $\ell \leq \frac{\pi}{2}$, il reste nécessairement

$$\ell = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}.$$

Bilan

Les résultats essentiels sont

$$f'(x) = \tan^2 x \geq 0, \quad f \text{ est strictement croissante sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! \alpha_n \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tel que } f(\alpha_n) = n$$

$$0 \leq \alpha_n < \alpha_{n+1} < \frac{\pi}{2}$$

et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 - Corrigé détaillé

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}.$$

- 1) a) Étudier les variations de f .
b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- 3) La suite (U_n) est définie par

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|.$$

- c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

1. Étude de la fonction f

1.a) Variations de f

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geq 0$, donc $1 + \sin x > 0$. La fonction est donc bien définie.

Écrivons

$$f(x) = \sqrt{2} (1 + \sin x)^{-1/2}.$$

En dérivant,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\right) (1 + \sin x)^{-3/2} \cos x \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$ et le dénominateur est strictement positif. Ainsi

$$f'(x) \leq 0.$$

Plus précisément, $f'(x) < 0$ pour $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Par conséquent, f est **strictement décroissante** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculons les valeurs aux extrémités :

$$f(0) = \sqrt{\frac{2}{1+0}} = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{1+1}} = 1.$$

Donc f décroît de $\sqrt{2}$ à 1.

1.b) Existence et unicité de α

L'idée la plus directe est d'étudier la différence entre les deux membres de l'équation $f(x) = x$.

Posons

$$g(x) = f(x) - x.$$

La fonction g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus,

$$g'(x) = f'(x) - 1.$$

Comme $f'(x) \leq 0$, on obtient

$$g'(x) \leq -1 < 0.$$

Ainsi g est strictement décroissante.

Aux extrémités,

$$g(0) = f(0) - 0 = \sqrt{2} > 0,$$

et

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

car $\frac{\pi}{2} > 1$.

Par continuité, g s'annule au moins une fois entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Comme g est strictement décroissante, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Il existe donc un unique réel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$g(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha.}$$

Autrement dit,

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha}}.$$

2. Majoration de $|f'(x)|$

Nous avons déjà obtenu

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^{3/2}}.$$

Donc, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|f'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{|\cos x|}{(1 + \sin x)^{3/2}}.$$

Sur cet intervalle, $0 \leq \cos x \leq 1$, donc $|\cos x| \leq 1$. D'autre part, $\sin x \geq 0$, donc

$$1 + \sin x \geq 1 \implies (1 + \sin x)^{3/2} \geq 1.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{(1 + \sin x)^{3/2}} \leq 1.$$

En multipliant par $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Remarquons que

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Cette dernière propriété sera essentielle pour la convergence de la suite.

3. Étude de la suite (U_n)

On a

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

3.a) Montrer que $U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Nous procédons par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$U_0 = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Comme f est décroissante sur cet intervalle,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(U_n) \leq f(0).$$

Or

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f(0) = \sqrt{2}.$$

Ainsi

$$1 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{2}.$$

Enfin,

$$0 < 1 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$U_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

3.b) Comparaison de U_{n+1} et α

Puisque α est le point fixe de f ,

$$f(\alpha) = \alpha.$$

D'autre part,

$$U_{n+1} = f(U_n).$$

Ainsi

$$|U_{n+1} - \alpha| = |f(U_n) - f(\alpha)|.$$

Les nombres U_n et α appartiennent tous les deux à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le théorème des accroissements finis donne donc l'existence d'un réel c_n situé entre U_n et α tel que

$$f(U_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(U_n - \alpha).$$

En prenant les valeurs absolues,

$$|f(U_n) - f(\alpha)| = |f'(c_n)| |U_n - \alpha|.$$

Or, d'après la question 2,

$$|f'(c_n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|.$$

3.c) Convergence et limite

Posons

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a $0 < q < 1$ et la question précédente donne

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq q |U_n - \alpha|.$$

Appliquons cette inégalité successivement :

$$\begin{aligned} |U_1 - \alpha| &\leq q|U_0 - \alpha|, \\ |U_2 - \alpha| &\leq q|U_1 - \alpha| \leq q^2|U_0 - \alpha|, \\ |U_3 - \alpha| &\leq q|U_2 - \alpha| \leq q^3|U_0 - \alpha|. \end{aligned}$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq q^n |U_0 - \alpha|.$$

Comme $U_0 = 0$ et $\alpha > 0$,

$$|U_0 - \alpha| = \alpha.$$

Donc

$$0 \leq |U_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Or

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

donc la suite géométrique $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$ tend vers 0. Par encadrement,

$$|U_n - \alpha| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$U_n - \alpha \longrightarrow 0,$$

et finalement

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.}$$

La limite est donc l'unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha}}.$$

Pour information, une approximation numérique est

$$\alpha \approx 1,0367425.$$

Bilan

Les résultats essentiels sont

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]},$$

$$\boxed{\exists! \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } f(\alpha) = \alpha},$$

$$\boxed{|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1},$$

$$\boxed{|U_n - \alpha| \leq \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha}.$$

Exercice 9 - Corrigé détaillé

Énoncé

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}.$$

- 1) Déterminer la limite de (U_n) .
- 2) a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3V_{n+1} = U_n + V_n.$$
 - b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 3$.
 - c) Montrer que (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

1. Limite de la suite (U_n)

La somme définissant U_n est une somme géométrique :

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}.$$

Le premier terme vaut 1 et la raison est $q = \frac{1}{3}$.

Pour une somme géométrique,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or

$$0 < \frac{1}{3} < 1,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{2}.}$$

Remarque utile. La formule obtenue montre aussi que

$$0 < U_n < \frac{3}{2} < 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette majoration sera utile dans la question suivante.

2.a. Vérification de $3V_{n+1} = U_n + V_n$

Partons directement de la définition de V_{n+1} :

$$V_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k}.$$

Le terme correspondant à $k = 0$ est nul. On peut donc écrire

$$V_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k}.$$

Multiplions par 3 :

$$\begin{aligned} 3V_{n+1} &= 3 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^{k-1}}. \end{aligned}$$

L'idée la plus simple consiste maintenant à changer d'indice. Posons

$$j = k - 1.$$

Lorsque $k = 1$, on a $j = 0$, et lorsque $k = n + 1$, on a $j = n$. De plus, $k = j + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 3V_{n+1} &= \sum_{j=0}^n \frac{j+1}{3^j} \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{3^j} + \frac{1}{3^j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{j}{3^j} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{3^j}. \end{aligned}$$

Or, par définition,

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{3^j} = V_n \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^n \frac{1}{3^j} = U_n.$$

Donc

$$\boxed{3V_{n+1} = U_n + V_n.}$$

Cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b. Montrons que $V_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous allons utiliser une récurrence, car la relation précédente relie V_{n+1} à V_n .

Initialisation

Pour $n = 0$,

$$V_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{k}{3^k} = 0.$$

Ainsi,

$$V_0 = 0 \leq 3.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n \leq 3.$$

Nous voulons montrer que $V_{n+1} \leq 3$.

D'après la question 2.a,

$$3V_{n+1} = U_n + V_n,$$

donc

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{3}.$$

Nous savons que

$$U_n < \frac{3}{2} < 3$$

et, par l'hypothèse de récurrence,

$$V_n \leq 3.$$

En particulier, $U_n \leq 3$ et $V_n \leq 3$. Par addition,

$$U_n + V_n \leq 6.$$

Ainsi,

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{3} \leq \frac{6}{3} = 2 < 3.$$

Donc, a fortiori,

$$V_{n+1} \leq 3.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n \leq 3.}$$

2.c. Convergence et limite de (V_n)

Pour montrer qu'une suite converge, une méthode très naturelle consiste ici à montrer qu'elle est **croissante et majorée**.

Étude de la monotonie

Calculons la différence $V_{n+1} - V_n$ directement à partir des sommes :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= V_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n+1}{3^{n+1}}.$$

Or $n + 1 > 0$ et $3^{n+1} > 0$, donc

$$\frac{n+1}{3^{n+1}} > 0.$$

Ainsi,

$$V_{n+1} > V_n.$$

La suite (V_n) est donc **strictement croissante**.

D'après la question 2.b, elle est majorée par 3. Une suite croissante et majorée est convergente. Il existe donc un réel L tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L.$$

Comme décaler l'indice d'une suite convergente ne change pas sa limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1} = L.$$

Reprenons maintenant la relation

$$3V_{n+1} = U_n + V_n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, et en utilisant

$$U_n \longrightarrow \frac{3}{2}, \quad V_n \longrightarrow L, \quad V_{n+1} \longrightarrow L,$$

on obtient

$$3L = \frac{3}{2} + L.$$

Réolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 3L - L &= \frac{3}{2}, \\ 2L &= \frac{3}{2}, \\ L &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{3}{4}}.$$

Bilan

Nous avons obtenu

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{3}{4}}.$$

L'idée essentielle de l'exercice est de transformer la somme définissant V_{n+1} afin de faire apparaître simultanément U_n et V_n . La relation obtenue permet ensuite d'étudier simplement la suite (V_n) .

Exercice 10 – Corrigé détaillé

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α et que $1 < \alpha < 2$.
- 2) Montrer que

$$\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

- 3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- c) En déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

- 4) On pose

$$T_n = (-1)^n (U_n - \alpha), \quad S_n = \sum_{k=0}^n T_k.$$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}$, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 0$.
- b) Étudier la monotonie de $(S_n)_n$ et montrer qu'elle est majorée.

1. Existence et unicité de α

L'équation $f(x) = x$ est équivalente à

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x.$$

Pour étudier cette équation simplement, posons

$$g(x) = f(x) - x = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x \quad (x > 0).$$

La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} - 1.$$

Comme $x > 0$, on a $2x^{3/2} > 0$, donc

$$-\frac{1}{2x^{3/2}} < 0 \implies g'(x) < 0.$$

Ainsi, g est **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$.

Calculons maintenant ses valeurs en 1 et en 2 :

$$g(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0,$$

et

$$g(2) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0,$$

car $\sqrt{2} > 1$, donc $1/\sqrt{2} < 1$.

La fonction g est continue sur $[1, 2]$ et $g(1)g(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que

$$g(\alpha) = 0.$$

Comme g est strictement décroissante, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois. Par conséquent,

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ et } 1 < \alpha < 2.}$$

En particulier,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha.}$$

Cette dernière égalité sera essentielle dans la suite.

2. Majoration de $|f'(x)|$ sur $[1, 2]$

Pour $x > 0$,

$$f(x) = 1 + x^{-1/2}.$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Ainsi,

$$|f'(x)| = \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Si $x \in [1, 2]$, alors $x \geq 1$, donc $x^{3/2} \geq 1$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2x^{3/2}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.}$$

3. Étude de la suite $(U_n)_n$

On a

$$U_0 = 2, \quad U_{n+1} = f(U_n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}}.$$

3.a. Montrons que $1 \leq U_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Nous allons faire une démonstration par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$U_0 = 2,$$

donc

$$1 \leq U_0 \leq 2.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang n ,

$$1 \leq U_n \leq 2.$$

En particulier, $U_n \geq 1 > 0$, donc $\sqrt{U_n}$ est bien défini et

$$\sqrt{U_n} \geq 1.$$

Ainsi,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{U_n}} \leq 1.$$

En ajoutant 1 aux trois membres,

$$1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}} \leq 2.$$

Or

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}}.$$

Donc

$$1 < U_{n+1} \leq 2,$$

et, en particulier,

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq U_n \leq 2.}$$

3.b. Majoration de l'erreur $|U_n - \alpha|$

L'idée est de comparer deux nombres auxquels on applique la même fonction $f : U_n$ et le point fixe α .

Nous savons que $U_n \in [1, 2]$ et que $\alpha \in [1, 2]$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f entre U_n et α donne un réel c_n situé entre U_n et α tel que

$$f(U_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(U_n - \alpha).$$

Comme $c_n \in [1, 2]$, la question 2 donne

$$|f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}.$$

En prenant les valeurs absolues,

$$|f(U_n) - f(\alpha)| = |f'(c_n)| |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.$$

Or

$$f(U_n) = U_{n+1} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

Donc

$$\boxed{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|.}$$

Appliquons cette inégalité successivement :

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |U_{n-2} - \alpha| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|.$$

Mais $U_0 = 2$ et $1 < \alpha < 2$, donc

$$0 < 2 - \alpha < 1,$$

d'où

$$|U_0 - \alpha| = 2 - \alpha \leq 1.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

3.c. Convergence et limite de $(U_n)_n$

Puisque

$$0 \leq |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0.$$

Cela signifie exactement que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.}$$

Ainsi, $(U_n)_n$ est convergente et sa limite est l'unique solution de

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x.$$

4. Étude des suites $(T_n)_n$ et $(S_n)_n$

On pose

$$T_n = (-1)^n (U_n - \alpha), \quad S_n = \sum_{k=0}^n T_k.$$

4.a. Position des termes pairs et impairs par rapport à α

La fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puisque

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} < 0.$$

Nous avons $U_0 = 2$ et $\alpha < 2$, donc

$$U_0 > \alpha.$$

Comme f est décroissante, l'inégalité $U_0 > \alpha$ entraîne

$$f(U_0) < f(\alpha).$$

Ainsi,

$$U_1 < \alpha.$$

À nouveau, comme $U_1 < \alpha$ et f est décroissante,

$$f(U_1) > f(\alpha),$$

donc

$$U_2 > \alpha.$$

On voit apparaître une alternance : les termes pairs sont au-dessus de α et les termes impairs en dessous.

Démontrons-la rigoureusement par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $n = 0$, nous venons de voir que

$$U_1 < \alpha < U_0.$$

Donc

$$U_{2 \times 0 + 1} \leq \alpha \leq U_{2 \times 0}.$$

Hérédité. Supposons

$$U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}.$$

De $U_{2n+1} \leq \alpha$ et de la décroissance de f , on déduit

$$f(U_{2n+1}) \geq f(\alpha),$$

c'est-à-dire

$$U_{2n+2} \geq \alpha.$$

Puis, de $U_{2n+2} \geq \alpha$, on obtient

$$f(U_{2n+2}) \leq f(\alpha),$$

donc

$$U_{2n+3} \leq \alpha.$$

Ainsi,

$$U_{2(n+1)+1} \leq \alpha \leq U_{2(n+1)}.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}.}$$

Déduisons-en le signe de T_n .

Si $n = 2p$ est pair, alors

$$T_{2p} = (-1)^{2p}(U_{2p} - \alpha) = U_{2p} - \alpha \geq 0.$$

Si $n = 2p + 1$ est impair, alors

$$T_{2p+1} = (-1)^{2p+1}(U_{2p+1} - \alpha) = -(U_{2p+1} - \alpha) = \alpha - U_{2p+1} \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n \geq 0.}$$

Remarquons même que, grâce à l'alternance,

$$\boxed{T_n = |U_n - \alpha|.}$$

4.b. Monotonie et majoration de $(S_n)_n$

Par définition,

$$S_n = T_0 + T_1 + \cdots + T_n.$$

Alors

$$S_{n+1} = T_0 + T_1 + \cdots + T_n + T_{n+1} = S_n + T_{n+1}.$$

Donc

$$S_{n+1} - S_n = T_{n+1}.$$

Or $T_{n+1} \geq 0$. Ainsi,

$$S_{n+1} - S_n \geq 0,$$

d'où

$$\boxed{(S_n)_n \text{ est croissante.}}$$

Pour la majoration, nous avons montré à la question 3.b que

$$|U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Or $T_k = |U_k - \alpha|$, donc

$$0 \leq T_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

En sommant pour $k = 0, 1, \dots, n$,

$$0 \leq S_n = \sum_{k=0}^n T_k \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

La somme de droite est une somme géométrique de premier terme 1 et de raison $1/2$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$,

$$2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) < 2.$$

Ainsi,

$$0 \leq S_n < 2.$$

La suite $(S_n)_n$ est donc majorée par 2.

Finalement,

$$(S_n)_n \text{ est croissante et majorée.}$$

Elle est donc convergente.

Résultats essentiels

$$1 < \alpha < 2, \quad f(\alpha) = \alpha$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq U_n \leq 2$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

$$U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}, \quad T_n \geq 0$$

$$(S_n)_n \text{ est croissante et majorée par 2.}$$

Exercice 11 – Corrigé détaillé

Énoncé

On considère la suite (U_n) définie par

$$U_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} \quad (n \geq 1).$$

On pose également

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $U_n > 0$. En déduire que (U_n) est croissante.

2) a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$V_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$U_n = \sqrt{1 + V_n}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $U_n < \sqrt{3}$, puis que (U_n) est convergente. On pose

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

3) a) Montrer que, pour tout entier $k > 3$, $2^k \geq k^2$.

b) Montrer que, pour tout entier $k > 2$,

$$U_{k+1}^2 - U_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}},$$

puis en déduire

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

Remarque de cohérence. L'image indique $U_1 = 1$, mais les questions 2b et 3b, ainsi que la borne finale $\sqrt{179/72}$, imposent $U_1 = \sqrt{2}$. En effet, avec $U_1 = 1$, on aurait $U_n^2 = V_n$, et non $1 + V_n$. Le corrigé ci-dessous traite donc la version cohérente de l'exercice, avec $U_1 = \sqrt{2}$.

1. Positivité et monotonie de (U_n)

1.a. Positivité

Pour tout $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

Le nombre situé sous la racine est strictement positif, car

$$U_n^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Donc

$$U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et par conséquent

$$U_{n+1} > 0.$$

De plus, $U_1 = \sqrt{2} > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad U_n > 0.}$$

1.b. Sens de variation

À partir de la relation de récurrence,

$$U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi,

$$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

donc

$$U_{n+1}^2 > U_n^2.$$

Or $U_{n+1} > 0$ et $U_n > 0$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient

$$U_{n+1} > U_n.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(U_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

2. Majoration et convergence

2.a. Majoration de V_n

On veut montrer

$$\boxed{V_n \leq 2 - \frac{1}{n}}.$$

Pour $k \geq 2$, on remarque que

$$k(k-1) \leq k^2.$$

Les deux membres étant strictement positifs, l'inversion change le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Or

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

car

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Pour $n \geq 2$, on somme ces inégalités de $k = 2$ à $k = n$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Le membre de droite est télescopique :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant le premier terme $1/1^2 = 1$:

$$V_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Finalement,

$$\boxed{V_n \leq 2 - \frac{1}{n}}.$$

Pour $n = 1$, on a bien $V_1 = 1 = 2 - 1$.

2.b. Expression de U_n à l'aide de V_n

Nous allons montrer par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad U_n = \sqrt{1 + V_n}}.$$

Comme les deux membres sont positifs, il est équivalent de montrer

$$U_n^2 = 1 + V_n.$$

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$V_1 = 1,$$

donc

$$\sqrt{1 + V_1} = \sqrt{2} = U_1.$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons qu'à un rang $n \geq 1$,

$$U_n^2 = 1 + V_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} U_{n+1}^2 &= U_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 + V_n + \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Mais, par définition de V_{n+1} ,

$$V_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = V_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi,

$$U_{n+1}^2 = 1 + V_{n+1}.$$

Comme $U_{n+1} > 0$,

$$U_{n+1} = \sqrt{1 + V_{n+1}}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad U_n = \sqrt{1 + V_n}.$$

2.c. Majoration de U_n et convergence

D'après 2a,

$$V_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Puisque $1/n > 0$,

$$2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Donc

$$V_n < 2.$$

En ajoutant 1 :

$$1 + V_n < 3.$$

Or

$$U_n = \sqrt{1 + V_n}.$$

La racine carrée étant croissante,

$$\boxed{U_n < \sqrt{3}.$$

Nous avons montré que (U_n) est croissante et qu'elle est majorée par $\sqrt{3}$. D'après le théorème de convergence des suites monotones,

$$\boxed{(U_n) \text{ est convergente.}}$$

On note

$$\boxed{\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.}$$

Comme $U_n < \sqrt{3}$ pour tout n ,

$$\boxed{\ell \leq \sqrt{3}.$$

3. Encadrement de la limite

3.a. Démonstration de $2^k \geq k^2$ pour $k > 3$

Nous allons raisonner par récurrence à partir de $k = 4$.

Initialisation. Pour $k = 4$,

$$2^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4^2 = 16.$$

Donc

$$2^4 \geq 4^2.$$

Hérédité. Soit $k \geq 4$. Supposons

$$2^k \geq k^2.$$

Alors

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2k^2.$$

Il suffit donc de vérifier que

$$2k^2 \geq (k+1)^2.$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 1. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 4$,

$$k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1 \geq 4 \times 2 - 1 = 7 > 0.$$

Donc

$$2k^2 > (k+1)^2.$$

Ainsi,

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall k > 3, \quad 2^k \geq k^2.}$$

3.b. Utilité de l'inégalité et minoration de ℓ

La relation de récurrence donne directement

$$U_{k+1}^2 = U_k^2 + \frac{1}{(k+1)^2},$$

donc

$$\boxed{U_{k+1}^2 - U_k^2 = \frac{1}{(k+1)^2}.}$$

Si $k > 2$, alors $k+1 > 3$. D'après la question 3a appliquée à l'entier $k+1$,

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2.$$

Ces deux nombres étant strictement positifs, en prenant leurs inverses, le sens de l'inégalité s'inverse :

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Par conséquent,

$$U_{k+1}^2 - U_k^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Idée essentielle. Cette inégalité est faite pour être *sommée*. Les différences $U_{k+1}^2 - U_k^2$ vont alors se simplifier deux à deux : c'est une somme télescopique.

Pour tout $n \geq 3$, sommons de $k = 3$ à $k = n$:

$$\sum_{k=3}^n (U_{k+1}^2 - U_k^2) \geq \sum_{k=3}^n \frac{1}{2^{k+1}}.$$

À gauche,

$$(U_4^2 - U_3^2) + (U_5^2 - U_4^2) + \cdots + (U_{n+1}^2 - U_n^2) \\ = U_{n+1}^2 - U_3^2.$$

Ainsi,

$$U_{n+1}^2 - U_3^2 \geq \sum_{k=3}^n \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Calculons U_3^2 . D'après $U_n^2 = 1 + V_n$,

$$U_3^2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right).$$

Avec le dénominateur 36,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36 + 9 + 4}{36} = \frac{49}{36}.$$

Donc

$$U_3^2 = 1 + \frac{49}{36} = \frac{85}{36}.$$

Faisons maintenant tendre n vers $+\infty$. Comme $U_{n+1} \rightarrow \ell$, on a

$$U_{n+1}^2 \rightarrow \ell^2.$$

De plus,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots.$$

C'est une série géométrique de premier terme $1/16$ et de raison $1/2$, donc

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\ell^2 - U_3^2 \geq \frac{1}{8}.$$

Donc

$$\ell^2 \geq \frac{85}{36} + \frac{1}{8}.$$

Prenons le dénominateur commun 72 :

$$\frac{85}{36} = \frac{170}{72}, \quad \frac{1}{8} = \frac{9}{72}.$$

Ainsi,

$$\ell^2 \geq \frac{179}{72}.$$

Comme $\ell > 0$, la fonction racine carrée est croissante et donne

$$\ell \geq \sqrt{\frac{179}{72}}.$$

Or la question 2c a donné

$$\ell \leq \sqrt{3}.$$

Finalement,

$$\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

Bilan

Nous avons établi successivement

$$\boxed{U_n > 0}, \quad \boxed{(U_n) \text{ strictement croissante}}, \quad \boxed{U_n = \sqrt{1 + V_n}},$$

$$\boxed{U_n < \sqrt{3}}, \quad \boxed{(U_n) \text{ convergente}},$$

et enfin l'encadrement

$$\boxed{\sqrt{\frac{179}{72}} \leq \ell \leq \sqrt{3}}.$$