

Exercice 1 – Partie I : Corrigé détaillé

1-a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$

On considère la fonction

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x - 1.$$

On distingue deux cas.

Cas 1 : si $x \geq 0$, alors $e^x \geq 1$, donc

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \geq f(0).$$

Or

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Donc

$$f(x) \geq 0.$$

Cas 2 : si $x \leq 0$, alors $e^x \leq 1$, donc

$$f'(x) = e^x - 1 \leq 0.$$

Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty, 0]$.

Comme $x \leq 0$, et puisque f est décroissante sur $] -\infty, 0]$, on a

$$f(x) \geq f(0).$$

Or

$$f(0) = 0.$$

Donc

$$f(x) \geq 0.$$

Dans tous les cas,

$$e^x - x - 1 \geq 0.$$

Donc

$$\boxed{1 + x \leq e^x}.$$

1-b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$

On veut montrer que

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x.$$

On pose

$$h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$h'(x) = e^x - 1 - x.$$

D'après la question 1-a), pour tout réel x ,

$$1 + x \leq e^x.$$

Donc, pour tout $x \geq 0$,

$$e^x - 1 - x \geq 0.$$

Ainsi,

$$h'(x) \geq 0.$$

Donc h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$,

$$h(x) \geq h(0).$$

Or

$$h(0) = e^0 - 1 - 0 - \frac{0^2}{2} = 1 - 1 = 0.$$

Donc

$$h(x) \geq 0.$$

Ainsi,

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

Donc

$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x}.$$

2) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_0^x te^{-t} dt.$$

2-a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, I(x) \leq \frac{x^2}{2}$

Soit $x \geq 0$.

Pour tout $t \in [0, x]$, on a

$$t \geq 0.$$

De plus,

$$e^{-t} \leq 1$$

car $-t \leq 0$ et donc $e^{-t} \leq e^0 = 1$.

En multipliant par $t \geq 0$, on obtient

$$te^{-t} \leq t.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, x]$,

$$te^{-t} \leq t.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et x , on obtient

$$\int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt.$$

Donc

$$I(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x.$$

Ainsi,

$$I(x) \leq \frac{x^2}{2} - 0.$$

Finalement,

$$\boxed{I(x) \leq \frac{x^2}{2}}.$$

2-b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

On calcule

$$I(x) = \int_0^x te^{-t} dt.$$

On utilise une intégration par parties.

On choisit :

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-t}.$$

Alors

$$u'(t) = 1$$

et une primitive de e^{-t} est

$$v(t) = -e^{-t}.$$

La formule d'intégration par parties est :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Donc

$$I(x) = [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x 1 \cdot (-e^{-t}) dt.$$

Ainsi,

$$I(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt.$$

Calculons chaque terme.

D'abord,

$$[-te^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - 0 = -xe^{-x}.$$

Ensuite,

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x.$$

Donc

$$\int_0^x e^{-t} dt = -e^{-x} - (-e^0).$$

Or $e^0 = 1$, donc

$$\int_0^x e^{-t} dt = -e^{-x} + 1.$$

Finalement,

$$I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$$

Donc

$$\boxed{I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1}.$$

3) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

3-a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$

Soit $x > 0$.

On a

$$g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

Première inégalité : montrer que $\frac{1}{2} \leq g(x)$

D'après la question 1-b), pour tout $x \geq 0$,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x.$$

Donc, pour $x > 0$,

$$\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1.$$

Comme $x > 0$, on a

$$x^2 > 0.$$

On peut donc diviser par x^2 sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq g(x)}.$$

Deuxième inégalité : montrer que $g(x) \leq \frac{e^x}{2}$

D'après la question 2-b), on a

$$I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$$

Donc

$$I(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}.$$

Multiplions cette égalité par e^x :

$$e^x I(x) = e^x (1 - (x + 1)e^{-x}).$$

Donc

$$e^x I(x) = e^x - (x + 1).$$

Ainsi,

$$e^x I(x) = e^x - x - 1.$$

Or, d'après la question 2-a),

$$I(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

Comme $e^x > 0$, on peut multiplier par e^x :

$$e^x I(x) \leq e^x \frac{x^2}{2}.$$

Donc

$$e^x - x - 1 \leq \frac{e^x x^2}{2}.$$

Comme $x > 0$, on a $x^2 > 0$, donc on divise par x^2 :

$$\frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) \leq \frac{e^x}{2}}.$$

Finalement, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}}.$$

3-b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}.$$

D'après la question 3-a), pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a

$$e^x \rightarrow e^0 = 1.$$

Donc

$$\frac{e^x}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $g(x)$ est encadrée entre deux expressions qui tendent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}}.$$

Corrigé détaillé – Exercice 1, Partie II

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}},$$

et

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) Calcul de la limite en $+\infty$

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a :

$$e^x \rightarrow +\infty$$

et

$$e^{-x} \rightarrow 0.$$

Ainsi, le dénominateur $e^x - e^{-x}$ se comporte comme e^x au voisinage de $+\infty$.
Or l'exponentielle domine la fonction x . Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

On obtient alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

Interprétation graphique

Puisque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

la droite d'équation :

$$\boxed{y = 0}$$

est une asymptote horizontale à la courbe représentative (C) de f au voisinage de $+\infty$.

2) Continuité à droite en 0

Pour montrer que f est continue à droite en 0, il faut montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^{2x} - 1}.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{e^x}{\frac{e^{2x} - 1}{x}}.$$

Or :

$$\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}.$$

On sait que :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

En prenant $u = 2x$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2.$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Or :

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).}$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est continue à droite en } 0.}$$

3-a) Montrer l'égalité

On veut montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right).$$

On part du membre de gauche :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}}{x}.$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{2x - (e^x - e^{-x})}{2(e^x - e^{-x})}}{x}.$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2x - e^x + e^{-x}}{2x(e^x - e^{-x})}.$$

Or :

$$-e^{-x}(e^{2x} - 2xe^x - 1) = -e^x + 2x + e^{-x}.$$

Donc :

$$2x - e^x + e^{-x} = -e^{-x}(e^{2x} - 2xe^x - 1).$$

Ainsi :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-e^{-x}(e^{2x} - 2xe^x - 1)}{2x(e^x - e^{-x})}.$$

On écrit :

$$\frac{1}{e^x - e^{-x}} = \frac{f(x)}{x}.$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right)}.$$

3-b) Montrer l'égalité avec g

Dans la partie I, la fonction g est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

Donc :

$$g(2x) = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(2x)^2} = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{4x^2}.$$

Ainsi :

$$2g(2x) = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2}.$$

D'autre part :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{2x(e^x - 1)}{2x^2} = \frac{2xe^x - 2x}{2x^2}.$$

Donc :

$$2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2} - \frac{2xe^x - 2x}{2x^2}.$$

On obtient :

$$2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} - 2x - 1 - 2xe^x + 2x}{2x^2}.$$

En simplifiant :

$$-2x + 2x = 0.$$

Donc :

$$2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}}.$$

3-c) Dérivabilité à droite en 0

On sait, d'après la partie I, que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2g(2x) = 1.$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

D'après la question précédente :

$$\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 1 - 1 = 0.$$

D'après la question 3-a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$e^{-x} \rightarrow 1,$$

et d'après la continuité à droite en 0 :

$$f(x) \rightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

De plus :

$$\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \rightarrow 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Par définition de la dérivée à droite :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{f'_d(0) = 0.}$$

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0.}$$

4-a) Montrer que $0 \leq I(x) \leq J(x)$

On pose :

$$J(x) = \int_0^x te^t dt.$$

Dans la partie I, on avait :

$$I(x) = \int_0^x te^{-t} dt.$$

Pour tout $t \in [0, x]$, on a :

$$t \geq 0.$$

De plus :

$$e^{-t} \leq e^t.$$

Donc :

$$0 \leq te^{-t} \leq te^t.$$

En intégrant sur $[0, x]$, on obtient :

$$\int_0^x 0 dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x te^t dt.$$

Donc :

$$\boxed{0 \leq I(x) \leq J(x).}$$

4-b) Calcul de $J(x)$

On a :

$$J(x) = \int_0^x te^t dt.$$

On utilise l'intégration par parties :

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

Prenons :

$$u = t, \quad v' = e^t.$$

Alors :

$$u' = 1, \quad v = e^t.$$

Donc :

$$J(x) = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt.$$

Ainsi :

$$J(x) = xe^x - 0 - [e^t]_0^x.$$

Donc :

$$J(x) = xe^x - (e^x - 1).$$

Par conséquent :

$$J(x) = xe^x - e^x + 1.$$

Finalement :

$$\boxed{J(x) = (x - 1)e^x + 1.}$$

4-c) Expression de $f'(x)$

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

On pose :

$$u(x) = x$$

et

$$v(x) = e^x - e^{-x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 1,$$

et :

$$v'(x) = e^x + e^{-x}.$$

D'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

C'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x} - xe^x - xe^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

D'après la partie I :

$$I(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}.$$

D'après la question 4-b :

$$J(x) = (x - 1)e^x + 1.$$

Donc :

$$I(x) - J(x) = 1 - (x + 1)e^{-x} - ((x - 1)e^x + 1).$$

Alors :

$$I(x) - J(x) = 1 - (x + 1)e^{-x} - (x - 1)e^x - 1.$$

Donc :

$$I(x) - J(x) = -(x + 1)e^{-x} - (x - 1)e^x.$$

On développe :

$$I(x) - J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} - xe^x + e^x.$$

Donc :

$$I(x) - J(x) = e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x}).$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Finalement :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

4-d) Sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

Pour $x > 0$, on a montré que :

$$0 \leq I(x) \leq J(x).$$

En réalité, pour $x > 0$, on a :

$$I(x) < J(x).$$

En effet, pour $t \in]0, x]$:

$$te^{-t} < te^t.$$

Donc :

$$\int_0^x te^{-t} dt < \int_0^x te^t dt.$$

Ainsi :

$$I(x) - J(x) < 0.$$

Or :

$$(e^x - e^{-x})^2 > 0.$$

Donc :

$$f'(x) < 0.$$

Par conséquent :

f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Il reste à étudier le comportement au point 0.

On sait que :

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Pour $x > 0$, montrons que :

$$f(x) < \frac{1}{2}.$$

On a :

$$f(x) < \frac{1}{2} \iff \frac{x}{e^x - e^{-x}} < \frac{1}{2}.$$

Comme $x > 0$ et $e^x - e^{-x} > 0$, cela équivaut à :

$$2x < e^x - e^{-x}.$$

Considérons la fonction :

$$\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 2x.$$

On a :

$$\varphi(0) = 0.$$

De plus :

$$\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2.$$

Pour $x > 0$, on a :

$$e^x + e^{-x} > 2.$$

Donc :

$$\varphi'(x) > 0.$$

Ainsi φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme :

$$\varphi(0) = 0,$$

on obtient, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) > 0.$$

Donc :

$$e^x - e^{-x} - 2x > 0.$$

Ainsi :

$$e^x - e^{-x} > 2x.$$

Donc :

$$f(x) < \frac{1}{2} = f(0).$$

Finalement :

f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

5) Bijection réalisée par f

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, elle est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers son image.

Calculons cette image.

On a :

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Comme f est strictement décroissante, elle prend toutes les valeurs strictement comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$, et elle prend aussi la valeur $\frac{1}{2}$ en 0.

Par contre, elle ne prend pas la valeur 0, car :

$$f(x) > 0$$

pour tout $x \geq 0$.

Donc :

$$f([0, +\infty[) =]0, \frac{1}{2}].$$

Ainsi :

f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $]0, \frac{1}{2}]$.

On note f^{-1} la bijection réciproque de f .

6-a) Résolution de l'équation $f(x) = x$

On cherche les solutions de :

$$f(x) = x.$$

D'abord, si $x = 0$, alors :

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$f(0) \neq 0.$$

Ainsi $x = 0$ n'est pas solution.

Soit maintenant $x > 0$.

L'équation devient :

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} = x.$$

Comme $x > 0$, on peut diviser par x :

$$\frac{1}{e^x - e^{-x}} = 1.$$

Donc :

$$e^x - e^{-x} = 1.$$

Posons :

$$X = e^x.$$

Alors :

$$X > 0$$

et :

$$e^{-x} = \frac{1}{X}.$$

L'équation devient :

$$X - \frac{1}{X} = 1.$$

On multiplie par $X > 0$:

$$X^2 - 1 = X.$$

Donc :

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5.$$

Les solutions sont :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Or :

$$X = e^x > 0.$$

Comme :

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0,$$

cette solution est impossible.

Donc :

$$X = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi :

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

En appliquant le logarithme népérien :

$$x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution :

$$\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

6-b) Représentation graphique de (C) et (C')

La courbe (C) de f possède les propriétés suivantes :

— $f(0) = \frac{1}{2}$, donc (C) passe par le point :

$$A \left(0, \frac{1}{2} \right).$$

— $f'_d(0) = 0$, donc (C) admet au point A une demi-tangente horizontale.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la droite :

$$y = 0$$

est une asymptote horizontale à (C) .

— f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

— On admet que (C) possède un point d'inflexion :

$$P(x_0, f(x_0))$$

avec :

$$x_0 \simeq 1,6$$

et :

$$f(x_0) \simeq 0,3.$$

Donc :

$$P \simeq (1,6; 0,3).$$

La courbe (C') de f^{-1} est la symétrique de (C) par rapport à la droite :

$$y = x.$$

Ainsi, si :

$$P \simeq (1,6; 0,3)$$

est un point de (C) , alors :

$$P' \simeq (0,3; 1,6)$$

est un point de (C') .

De même, puisque :

$$A \left(0, \frac{1}{2} \right) \in (C),$$

alors :

$$A' \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \in (C').$$

Les deux courbes (C) et (C') se coupent sur la droite $y = x$, au point :

$$(\alpha, \alpha),$$

où :

$$\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Corrigé détaillé – Exercice 1, Partie II, Question 7

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On rappelle que l'équation :

$$f(x) = x$$

admet une unique solution :

$$\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Donc :

$$f(\alpha) = \alpha.$$

7-a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

On raisonne par récurrence.

Initialisation

On a :

$$u_0 = 0.$$

Donc :

$$0 \leq u_0 \leq \frac{1}{2}.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$u_n \in [0, +\infty[.$$

Or la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers :

$$]0, \frac{1}{2}].$$

Donc :

$$f(u_n) \in]0, \frac{1}{2}].$$

Comme :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on obtient :

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc, en particulier :

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.}$$

7-b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

On sait que :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et :

$$\alpha = f(\alpha).$$

Donc :

$$u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha).$$

D'après la question 7-a :

$$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

On distingue deux cas.

Premier cas : $u_n = \alpha$

Si :

$$u_n = \alpha,$$

alors :

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(\alpha) = \alpha.$$

Donc :

$$|u_{n+1} - \alpha| = 0.$$

Et :

$$\frac{1}{2}|u_n - \alpha| = 0.$$

L'inégalité est donc vraie.

Deuxième cas : $u_n \neq \alpha$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On admet que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad -\frac{1}{2} < f'(x) < 0.$$

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f entre u_n et α .

Il existe donc un réel c compris entre u_n et α tel que :

$$f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha).$$

Comme :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et :

$$\alpha = f(\alpha),$$

on obtient :

$$u_{n+1} - \alpha = f'(c)(u_n - \alpha).$$

En prenant les valeurs absolues :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| |u_n - \alpha|.$$

Or :

$$-\frac{1}{2} < f'(c) < 0.$$

Donc :

$$0 < |f'(c)| < \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

7-c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On raisonne par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 0.$$

Donc :

$$|u_0 - \alpha| = |\alpha|.$$

Or :

$$\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Donc :

$$|\alpha| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

on obtient :

$$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D'après la question 7-b :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

7-d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or :

$$0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0.$$

Cela signifie que :

$$u_n - \alpha \rightarrow 0.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

Ainsi :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Moulay ELMOUKRIE

Exercice 1 – Partie III : Corrigé détaillé

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

On rappelle que la fonction f est positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, avec :

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

1-a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq F(x) \leq xf(x).$$

Soit $x \in [0, +\infty[$.

On a :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

Comme $x \geq 0$, on a :

$$x \leq 2x.$$

De plus, d'après la partie précédente, la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$f(t) \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, 2x]$, on obtient :

$$\int_x^{2x} f(t) dt \geq 0.$$

Donc :

$$F(x) \geq 0.$$

Ainsi :

$$0 \leq F(x).$$

Maintenant, comme f est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors pour tout $t \in [x, 2x]$, on a :

$$t \geq x.$$

Puisque f est décroissante, cela donne :

$$f(t) \leq f(x).$$

Donc :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad f(t) \leq f(x).$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, 2x]$, on obtient :

$$\int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt.$$

Comme $f(x)$ ne dépend pas de t , on a :

$$\int_x^{2x} f(x) dt = f(x) \int_x^{2x} 1 dt.$$

Donc :

$$\int_x^{2x} f(x) dt = f(x)(2x - x).$$

Ainsi :

$$\int_x^{2x} f(x) dt = xf(x).$$

Par conséquent :

$$F(x) \leq xf(x).$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq F(x) \leq xf(x).}$$

1-b) En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$$

D'après la question précédente :

$$0 \leq F(x) \leq xf(x).$$

Or, pour $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

Donc :

$$xf(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$$

On veut calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$$

On écrit :

$$e^x - e^{-x} = e^x(1 - e^{-2x}).$$

Donc :

$$\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x(1 - e^{-2x})}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a :

$$e^{-2x} \rightarrow 0.$$

Donc :

$$1 - e^{-2x} \rightarrow 1.$$

De plus, on sait que l'exponentielle e^x domine toute puissance de x , donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$$

Comme :

$$0 \leq F(x) \leq xf(x),$$

et comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0,$$

d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.}$$

1-c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu

On vient de montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

Cela signifie que la courbe représentative de la fonction F se rapproche de la droite d'équation :

$$y = 0$$

quand x tend vers $+\infty$.

Donc la courbe de F admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Cette asymptote est :

$$\boxed{y = 0.}$$

2-a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$

Pour $x > 0$, la fonction f est continue sur $[x, 2x]$.

On définit :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

Les bornes x et $2x$ sont des fonctions dérivables de x .

On utilise la formule de dérivation d'une intégrale à bornes variables :

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right)' = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

Ici :

$$a(x) = x, \quad b(x) = 2x.$$

Donc :

$$a'(x) = 1, \quad b'(x) = 2.$$

Ainsi, pour $x > 0$:

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Étudions maintenant la dérivabilité à droite en 0.

On a :

$$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

Pour $x > 0$:

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt.$$

Comme f est décroissante sur $[0, +\infty[$, pour tout $t \in [x, 2x]$, on a :

$$f(2x) \leq f(t) \leq f(x).$$

En intégrant :

$$\int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt.$$

Donc :

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x).$$

En divisant par $x > 0$:

$$f(2x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(x).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$2x \rightarrow 0^+.$$

Comme f est continue à droite en 0 et $f(0) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x) = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$F'_d(0) = \frac{1}{2}.$$

Donc F est dérivable à droite en 0 et dérivable sur $]0, +\infty[$.

On peut donc dire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ au sens où elle est dérivable à droite en 0.

$F \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[.$

2-b) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F'(x) = -\frac{f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1).$$

D'après la question précédente, pour $x > 0$:

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

Or :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

Donc :

$$f(2x) = \frac{2x}{e^{2x} - e^{-2x}}.$$

Ainsi :

$$2f(2x) = \frac{4x}{e^{2x} - e^{-2x}}.$$

Donc :

$$F'(x) = \frac{4x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}}.$$

Posons :

$$y = e^x.$$

Alors :

$$e^{-x} = \frac{1}{y},$$

et :

$$e^{2x} = y^2, \quad e^{-2x} = \frac{1}{y^2}.$$

On a :

$$f(x) = \frac{x}{y - \frac{1}{y}}.$$

Or :

$$y - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - 1}{y}.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{x}{\frac{y^2-1}{y}} = \frac{xy}{y^2 - 1}.$$

Calculons $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{4x}{y^2 - \frac{1}{y^2}} - \frac{x}{y - \frac{1}{y}}.$$

On simplifie :

$$y^2 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^4 - 1}{y^2} = \frac{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}{y^2}.$$

Donc :

$$\frac{4x}{y^2 - \frac{1}{y^2}} = \frac{4xy^2}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}.$$

Et :

$$\frac{x}{y - \frac{1}{y}} = \frac{xy}{y^2 - 1}.$$

Ainsi :

$$F'(x) = \frac{4xy^2}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)} - \frac{xy}{y^2 - 1}.$$

On met au même dénominateur :

$$F'(x) = \frac{4xy^2}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)} - \frac{xy(y^2 + 1)}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}.$$

Donc :

$$F'(x) = \frac{4xy^2 - xy(y^2 + 1)}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}.$$

On factorise par xy :

$$F'(x) = \frac{xy(4y - y^2 - 1)}{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}.$$

Or :

$$f(x) = \frac{xy}{y^2 - 1}.$$

Donc :

$$F'(x) = f(x) \frac{4y - y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

Comme :

$$4y - y^2 - 1 = -(y^2 - 4y + 1),$$

on obtient :

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{y^2 + 1}(y^2 - 4y + 1).$$

En remplaçant y par e^x :

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{e^{2x} + 1}(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

Donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F'(x) = -\frac{f(x)}{e^{2x} + 1}(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

2-c) Montrer que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de la fonction F sur $[0, +\infty[$

On étudie le signe de $F'(x)$.

D'après la question précédente :

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{e^{2x} + 1}(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) > 0$$

et :

$$e^{2x} + 1 > 0.$$

Donc le signe de $F'(x)$ dépend uniquement du signe de :

$$-(e^{2x} - 4e^x + 1).$$

Posons :

$$X = e^x.$$

Comme $x > 0$, on a :

$$X > 1.$$

L'expression devient :

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = X^2 - 4X + 1.$$

On résout :

$$X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12.$$

Donc :

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}.$$

Les racines sont :

$$X_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

et :

$$X_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Or :

$$2 - \sqrt{3} < 1.$$

Mais comme $X = e^x > 1$, cette racine ne correspond à aucune valeur de $x > 0$.

La seule racine utile est donc :

$$X = 2 + \sqrt{3}.$$

Ainsi :

$$e^x = 2 + \sqrt{3}.$$

Donc :

$$x = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Notons :

$$a = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Étudions le signe de :

$$X^2 - 4X + 1.$$

Comme le coefficient de X^2 est positif, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Sur l'intervalle $X > 1$, on a donc :

$$X^2 - 4X + 1 < 0$$

pour :

$$1 < X < 2 + \sqrt{3},$$

et :

$$X^2 - 4X + 1 > 0$$

pour :

$$X > 2 + \sqrt{3}.$$

Cela signifie :

$$e^{2x} - 4e^x + 1 < 0$$

pour :

$$0 < x < \ln(2 + \sqrt{3}),$$

et :

$$e^{2x} - 4e^x + 1 > 0$$

pour :

$$x > \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Comme :

$$F'(x) = -\frac{f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1),$$

avec :

$$\frac{f(x)}{e^{2x} + 1} > 0,$$

on obtient :

$$F'(x) > 0 \quad \text{sur} \quad]0, \ln(2 + \sqrt{3})[,$$

et :

$$F'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad]\ln(2 + \sqrt{3}), +\infty[.$$

Donc F est croissante sur :

$$[0, \ln(2 + \sqrt{3})]$$

puis décroissante sur :

$$[\ln(2 + \sqrt{3}), +\infty[.$$

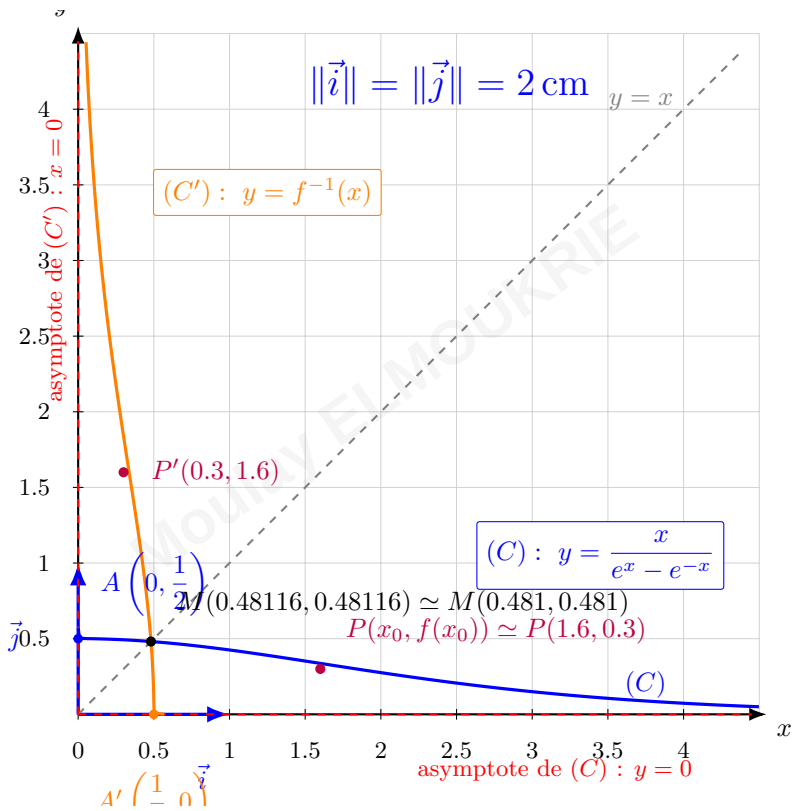
Ainsi, F admet un maximum en :

$$x = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Donc :

$F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un maximum de F sur $[0, +\infty[.$
--

En particulier, c'est un extremum de la fonction F sur $[0, +\infty[.$



Corrigé détaillé – Exercice 2, Partie I

Soit :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta}$$

avec :

$$\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m) : \quad \overline{m}z^2 - 2z + m = 0.$$

1) Détermination de la deuxième solution

On sait que :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$$

est une solution de l'équation (E_m) .

L'équation est de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec :

$$a = \overline{m}, \quad b = -2, \quad c = m.$$

D'après la relation entre les racines et les coefficients d'une équation du second degré, si les deux solutions sont z_1 et z_2 , alors :

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Donc ici :

$$z_1 z_2 = \frac{m}{\overline{m}}.$$

Ainsi :

$$z_2 = \frac{m}{\overline{m}z_1}.$$

Or :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}.$$

Donc :

$$z_2 = \frac{m}{\overline{m} \times \frac{m(1-i)}{2}}.$$

Ainsi :

$$z_2 = \frac{2m}{m\overline{m}(1-i)}.$$

Comme :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta},$$

on a :

$$|m| = \sqrt{2}.$$

Donc :

$$m\overline{m} = |m|^2 = 2.$$

Alors :

$$z_2 = \frac{2m}{2(1-i)}.$$

Donc :

$$z_2 = \frac{m}{1-i}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1-i$, c'est-à-dire par $1+i$:

$$z_2 = \frac{m}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}.$$

Donc :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{(1-i)(1+i)}.$$

Or :

$$(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2.$$

Ainsi :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

2) Écriture de z_1 sous forme exponentielle

On a :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}.$$

Or :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta}.$$

Donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1-i)}{2}.$$

Écrivons maintenant $1-i$ sous forme exponentielle.

Son module est :

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Un argument de $1-i$ est :

$$-\frac{\pi}{4}.$$

Donc :

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Ainsi :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}.$$

Donc :

$$z_1 = \frac{2}{2}e^{i\theta}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Par conséquent :

$$z_1 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

Finalement :

$$z_1 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

Corrigé détaillé – Exercice 2, Partie II

On rappelle que :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta},$$

avec :

$$\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Les points A , B , M , M_1 et M_2 ont pour affixes respectives :

$$a = 1, \quad b = -1, \quad m, \quad z_1, \quad z_2.$$

D'après la partie I :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

1) Montrer que $R(M_1) = M_2$

La rotation R est de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Dans le plan complexe, une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme tout point d'affixe z en un point d'affixe :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz.$$

Donc l'affixe de $R(M_1)$ est :

$$iz_1.$$

Or :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}.$$

Donc :

$$iz_1 = i \frac{m(1-i)}{2}.$$

Ainsi :

$$iz_1 = \frac{m(i-i^2)}{2}.$$

Comme :

$$i^2 = -1,$$

on obtient :

$$iz_1 = \frac{m(i+1)}{2}.$$

Donc :

$$iz_1 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

Or :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

Donc :

$$iz_1 = z_2.$$

Ainsi :

$$\boxed{R(M_1) = M_2.}$$

2-a) Montrer que $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$

On rappelle le critère suivant.

Si deux vecteurs ont pour affixes respectives u et v , avec $v \neq 0$, alors ces deux vecteurs sont perpendiculaires lorsque :

$$\frac{u}{v} \in i\mathbb{R}.$$

Autrement dit, le quotient est un imaginaire pur.

Première perpendicularité

L'affixe de $\overrightarrow{M_1M}$ est :

$$m - z_1.$$

Or :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_1 = m - \frac{m(1-i)}{2}.$$

Ainsi :

$$m - z_1 = \frac{2m - m(1-i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_1 = \frac{m(2-1+i)}{2}.$$

Par conséquent :

$$m - z_1 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

Or :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_1 = z_2.$$

L'affixe de $\overrightarrow{OM_1}$ est :

$$z_1.$$

Alors :

$$\frac{m - z_1}{z_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Or :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{m(1+i)}{2}}{\frac{m(1-i)}{2}}.$$

Donc :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i}.$$

En multipliant par le conjugué de $1-i$, on obtient :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}.$$

Or :

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

et :

$$(1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2.$$

Donc :

$$\frac{1 + i}{1 - i} = i.$$

Ainsi :

$$\frac{m - z_1}{z_1} = i.$$

Comme i est un imaginaire pur, on obtient :

$$\boxed{(MM_1) \perp (OM_1).}$$

Deuxième perpendicularité

L'affixe de $\overrightarrow{M_2M}$ est :

$$m - z_2.$$

Or :

$$z_2 = \frac{m(1 + i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_2 = m - \frac{m(1 + i)}{2}.$$

Ainsi :

$$m - z_2 = \frac{2m - m(1 + i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_2 = \frac{m(1 - i)}{2}.$$

Or :

$$z_1 = \frac{m(1 - i)}{2}.$$

Donc :

$$m - z_2 = z_1.$$

L'affixe de $\overrightarrow{OM_2}$ est :

$$z_2.$$

Alors :

$$\frac{m - z_2}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Or :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{1 + i}.$$

En multipliant par le conjugué de $1 + i$, on obtient :

$$\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)}.$$

Or :

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i,$$

et :

$$(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2.$$

Donc :

$$\frac{1-i}{1+i} = -i.$$

Ainsi :

$$\frac{m - z_2}{z_2} = -i.$$

Comme $-i$ est un imaginaire pur, on obtient :

$$\boxed{(MM_2) \perp (OM_2)}.$$

2-b) Vérifier que $OM_1 = OM_2 = 1$

On a :

$$OM_1 = |z_1|.$$

Or :

$$z_1 = \frac{m(1-i)}{2}.$$

Donc :

$$|z_1| = \left| \frac{m(1-i)}{2} \right|.$$

Ainsi :

$$|z_1| = \frac{|m||1-i|}{2}.$$

Comme :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta},$$

on a :

$$|m| = \sqrt{2}.$$

De plus :

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Donc :

$$|z_1| = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ainsi :

$$OM_1 = 1.$$

De même :

$$OM_2 = |z_2|.$$

Or :

$$z_2 = \frac{m(1+i)}{2}.$$

Donc :

$$|z_2| = \frac{|m||1+i|}{2}.$$

Et :

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ainsi :

$$|z_2| = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

Donc :

$$OM_2 = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{OM_1 = OM_2 = 1.}$$

2-c) Déterminer la nature du quadrilatère OM_1MM_2

D'après la question 1 :

$$R(M_1) = M_2,$$

où R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc :

$$(OM_1) \perp (OM_2).$$

D'après la question 2-a :

$$(MM_1) \perp (OM_1)$$

et :

$$(MM_2) \perp (OM_2).$$

Comme :

$$(MM_1) \perp (OM_1)$$

et :

$$(OM_2) \perp (OM_1),$$

on déduit :

$$(MM_1) \parallel (OM_2).$$

De même, comme :

$$(MM_2) \perp (OM_2)$$

et :

$$(OM_1) \perp (OM_2),$$

on déduit :

$$(MM_2) \parallel (OM_1).$$

Ainsi, dans le quadrilatère OM_1MM_2 , les côtés opposés sont parallèles.

Donc OM_1MM_2 est un parallélogramme.

De plus :

$$(OM_1) \perp (M_1M).$$

Donc ce parallélogramme possède un angle droit. C'est donc un rectangle.

Enfin :

$$OM_1 = 1.$$

Et :

$$M_1M = |m - z_1|.$$

Or, on a montré que :

$$m - z_1 = z_2.$$

Donc :

$$M_1M = |z_2|.$$

D'après 2-b :

$$|z_2| = 1.$$

Ainsi :

$$M_1 M = 1.$$

On a donc :

$$OM_1 = M_1 M.$$

Le rectangle $OM_1 M M_2$ possède deux côtés consécutifs égaux.

Donc :

$$\boxed{OM_1 M M_2 \text{ est un carré.}}$$

3-a) Montrer que $\operatorname{Re}(m - h) = 0$ et $\operatorname{Re}(1 - h\bar{m}) = 0$

On a :

$$h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{2i\theta}.$$

Comme :

$$e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta),$$

on obtient :

$$h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)).$$

Donc :

$$h = \frac{-i \cos(2\theta) - i^2 \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Comme :

$$i^2 = -1,$$

on a :

$$h = \frac{-i \cos(2\theta) + \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Ainsi :

$$h = \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} - i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Or :

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Donc :

$$\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2} \sin \theta} = \sqrt{2} \cos \theta.$$

Ainsi :

$$h = \sqrt{2} \cos \theta - i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

D'autre part :

$$m = \sqrt{2} e^{i\theta}.$$

Donc :

$$m = \sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Ainsi :

$$m = \sqrt{2} \cos \theta + i \sqrt{2} \sin \theta.$$

On calcule :

$$m - h = \sqrt{2} \cos \theta + i \sqrt{2} \sin \theta - \left(\sqrt{2} \cos \theta - i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} \right).$$

Donc :

$$m - h = i\sqrt{2} \sin \theta + i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Ainsi :

$$m - h = i \left(\sqrt{2} \sin \theta + \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} \right).$$

Ce nombre est imaginaire pur.

Par conséquent :

$$\boxed{\operatorname{Re}(m - h) = 0.}$$

Montrons maintenant que :

$$\operatorname{Re}(1 - h\overline{m}) = 0.$$

On a :

$$\overline{m} = \sqrt{2}e^{-i\theta}.$$

Donc :

$$h\overline{m} = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{2i\theta} \cdot \sqrt{2} e^{-i\theta}.$$

Ainsi :

$$h\overline{m} = \frac{-i\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i\theta}.$$

Donc :

$$h\overline{m} = \frac{-i}{\sin \theta} e^{i\theta}.$$

Or :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Donc :

$$h\overline{m} = \frac{-i(\cos \theta + i \sin \theta)}{\sin \theta}.$$

Ainsi :

$$h\overline{m} = \frac{-i \cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta}.$$

Donc :

$$h\overline{m} = 1 - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Comme :

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

on obtient :

$$h\overline{m} = 1 - i \cot \theta.$$

Donc :

$$1 - h\overline{m} = 1 - (1 - i \cot \theta).$$

Ainsi :

$$1 - h\overline{m} = i \cot \theta.$$

Ce nombre est imaginaire pur.

Par conséquent :

$$\boxed{\operatorname{Re}(1 - h\overline{m}) = 0.}$$

3-b) Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0$

On a :

$$a = 1.$$

Donc :

$$\frac{a-h}{m+1} = \frac{1-h}{m+1}.$$

Pour calculer la partie réelle, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $m+1$:

$$\frac{1-h}{m+1} = \frac{(1-h)(\overline{m}+1)}{(m+1)(\overline{m}+1)}.$$

Le dénominateur vaut :

$$(m+1)(\overline{m}+1) = |m+1|^2.$$

C'est un réel strictement positif, car $m+1 \neq 0$.

Donc il suffit de montrer que le numérateur a une partie réelle nulle.

On développe :

$$(1-h)(\overline{m}+1) = \overline{m}+1 - h\overline{m} - h.$$

Donc :

$$(1-h)(\overline{m}+1) = (\overline{m}-h) + (1-h\overline{m}).$$

Or :

$$\overline{m} = \sqrt{2} \cos \theta - i\sqrt{2} \sin \theta,$$

et :

$$h = \sqrt{2} \cos \theta - i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Donc :

$$\overline{m} - h = -i\sqrt{2} \sin \theta + i \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta}.$$

Ainsi :

$$\overline{m} - h = i \left(-\sqrt{2} \sin \theta + \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} \right).$$

Ce nombre est imaginaire pur.

Donc :

$$\operatorname{Re}(\overline{m} - h) = 0.$$

D'après la question 3-a :

$$\operatorname{Re}(1 - h\overline{m}) = 0.$$

Par conséquent :

$$\operatorname{Re}((1-h)(\overline{m}+1)) = 0.$$

Donc :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-h}{m+1}\right) = 0.$$

Comme $a = 1$, on obtient :

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right) = 0.}$$

3-c) En déduire que $(MH) \perp (AB)$ et $(AH) \perp (MB)$

On rappelle le critère suivant.

Si deux vecteurs ont pour affixes respectives u et v , avec $v \neq 0$, alors les deux vecteurs sont perpendiculaires lorsque :

$$\frac{u}{v}$$

est imaginaire pur.

Montrons que $(MH) \perp (AB)$

L'affixe de $\overrightarrow{MH}$ est :

$$h - m.$$

D'après 3-a :

$$\operatorname{Re}(m - h) = 0.$$

Donc $m - h$ est imaginaire pur.

Alors $h - m$ est aussi imaginaire pur.

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est :

$$b - a = -1 - 1 = -2.$$

Donc :

$$\frac{h - m}{b - a}$$

est encore imaginaire pur, car on divise un imaginaire pur par un réel non nul.

Ainsi :

$$\boxed{(MH) \perp (AB).}$$

Montrons que $(AH) \perp (MB)$

L'affixe de $\overrightarrow{AH}$ est :

$$h - a = h - 1.$$

L'affixe de $\overrightarrow{MB}$ est :

$$b - m = -1 - m = -(m + 1).$$

Donc :

$$\frac{h - a}{b - m} = \frac{h - 1}{-(m + 1)}.$$

Ainsi :

$$\frac{h - a}{b - m} = \frac{1 - h}{m + 1}.$$

Or, d'après la question 3-b :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 - h}{m + 1}\right) = 0.$$

Donc :

$$\frac{h - a}{b - m}$$

est imaginaire pur.

Par conséquent :

$$\boxed{(AH) \perp (MB).}$$

4-a) Montrer que $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta)$

On a :

$$z_1 = \frac{m(1 - i)}{2},$$

et :

$$z_2 = \frac{m(1 + i)}{2}.$$

Donc :

$$z_2 - z_1 = \frac{m(1 + i)}{2} - \frac{m(1 - i)}{2}.$$

Ainsi :

$$z_2 - z_1 = \frac{m((1 + i) - (1 - i))}{2}.$$

Donc :

$$z_2 - z_1 = \frac{m(2i)}{2}.$$

Par conséquent :

$$z_2 - z_1 = im.$$

Comme :

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta},$$

on obtient :

$$z_2 - z_1 = i\sqrt{2}e^{i\theta}.$$

D'autre part :

$$h = \frac{-i}{\sqrt{2}\sin \theta}e^{2i\theta}.$$

Et :

$$z_1 = \frac{m(1 - i)}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1 - i)}{2}.$$

Donc :

$$z_1 = \frac{e^{i\theta}(1 - i)}{\sqrt{2}}.$$

Alors :

$$h - z_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}\sin \theta}e^{2i\theta} - \frac{e^{i\theta}(1 - i)}{\sqrt{2}}.$$

On factorise par $\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}$:

$$h - z_1 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \left(\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} - (1 - i) \right).$$

Donc :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \left(\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} - (1 - i) \right)}{i\sqrt{2}e^{i\theta}}.$$

En simplifiant par $e^{i\theta}$, on obtient :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\left(\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} - (1 - i) \right)}{2i}.$$

Or :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Donc :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} = \frac{-i(\cos \theta + i \sin \theta)}{\sin \theta}.$$

Ainsi :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} = \frac{-i \cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta}.$$

Donc :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} = 1 - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Comme :

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

on obtient :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} = 1 - i \cot \theta.$$

Alors :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} - (1 - i) = 1 - i \cot \theta - 1 + i.$$

Donc :

$$\frac{-ie^{i\theta}}{\sin \theta} - (1 - i) = i(1 - \cot \theta).$$

Par conséquent :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i(1 - \cot \theta)}{2i}.$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta).}$$

4-b) En déduire que les points H , M_1 et M_2 sont alignés

D'après la question 4-a :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta).$$

Or :

$$\frac{1}{2}(1 - \cot \theta) \in \mathbb{R}.$$

Donc :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{M_1 H}$ et $\overrightarrow{M_1 M_2}$ sont colinéaires.

En effet, leurs affixes respectives sont :

$$h - z_1$$

et :

$$z_2 - z_1.$$

Comme leur quotient est réel, les deux vecteurs sont colinéaires.

Donc les points H , M_1 et M_2 sont alignés.

Ainsi :

$$\boxed{H, M_1, M_2 \text{ sont alignés.}}$$

Corrigé détaillé – Exercice 3, Partie I

A. Résolution de l'équation $5u - 9v = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$

On considère l'équation :

$$(F) : \quad 5u - 9v = 1.$$

1) Donner une solution particulière (u_0, v_0) dans $\mathbb{N}^2$

On cherche deux entiers naturels u_0 et v_0 tels que :

$$5u_0 - 9v_0 = 1.$$

On remarque que :

$$5 \times 2 - 9 \times 1 = 10 - 9 = 1.$$

Donc une solution particulière dans $\mathbb{N}^2$ est :

$$(u_0, v_0) = (2, 1).$$

2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)

Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de :

$$5u - 9v = 1.$$

On sait que :

$$5 \times 2 - 9 \times 1 = 1.$$

Donc :

$$5u - 9v = 5 \times 2 - 9 \times 1.$$

Ainsi :

$$5u - 10 = 9v - 9.$$

Donc :

$$5(u - 2) = 9(v - 1).$$

Comme 5 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, puisque 5 divise $9(v - 1)$, alors 5 divise $v - 1$.

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$v - 1 = 5k.$$

Ainsi :

$$v = 1 + 5k.$$

En remplaçant dans l'égalité :

$$5(u - 2) = 9(v - 1),$$

on obtient :

$$5(u - 2) = 9 \cdot 5k.$$

Donc :

$$u - 2 = 9k.$$

Ainsi :

$$u = 2 + 9k.$$

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons :

$$u = 2 + 9k$$

et :

$$v = 1 + 5k.$$

Alors :

$$5u - 9v = 5(2 + 9k) - 9(1 + 5k).$$

Donc :

$$5u - 9v = 10 + 45k - 9 - 45k = 1.$$

Donc tous ces couples sont bien solutions.

Finalement :

$$S = \{(2 + 9k, 1 + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Vérifier que $5^{u_0} \equiv 6 \pmod{19}$

On a trouvé :

$$u_0 = 2.$$

Donc :

$$5^{u_0} = 5^2 = 25.$$

Or :

$$25 = 19 + 6.$$

Donc :

$$25 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Par conséquent :

$$5^{u_0} \equiv 6 \pmod{19}.$$

B. Résolution de l'équation $x^{2026} \equiv 5 \pmod{19}$

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : \quad x^{2026} \equiv 5 \pmod{19}.$$

1) Soit x une solution de l'équation (E)

On suppose que :

$$x^{2026} \equiv 5 \pmod{19}.$$

1-a) Montrer que x et 19 sont premiers entre eux et que $x^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

Supposons par l'absurde que x ne soit pas premier avec 19.

Comme 19 est un nombre premier, cela signifie que :

$$19 \mid x.$$

Donc :

$$x \equiv 0 \pmod{19}.$$

Alors :

$$x^{2026} \equiv 0 \pmod{19}.$$

Mais on sait que :

$$x^{2026} \equiv 5 \pmod{19}.$$

Cela donnerait :

$$0 \equiv 5 \pmod{19},$$

ce qui est impossible.

Donc :

$x \text{ et } 19 \text{ sont premiers entre eux.}$

Comme 19 est premier et comme x est premier avec 19, le petit théorème de Fermat donne :

$$x^{19-1} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Donc :

$x^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$

1-b) Montrer que $x^{10} \equiv 5 \pmod{19}$

On remarque que :

$$2026 = 18 \times 112 + 10.$$

Donc :

$$x^{2026} = x^{18 \times 112 + 10}.$$

Ainsi :

$$x^{2026} = (x^{18})^{112} x^{10}.$$

Or, d'après la question précédente :

$$x^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Donc :

$$(x^{18})^{112} \equiv 1^{112} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Comme :

$$x^{2026} \equiv 5 \pmod{19},$$

on obtient :

$$x^{10} \equiv 5 \pmod{19}.$$

Ainsi :

$x^{10} \equiv 5 \pmod{19}.$

1-c) En déduire que $x^2 \equiv 6 \pmod{19}$

D'après la partie A, on a trouvé une solution particulière :

$$(u_0, v_0) = (2, 1)$$

de l'équation :

$$5u - 9v = 1.$$

Donc :

$$5u_0 - 9v_0 = 1.$$

En multipliant par 2, on obtient :

$$10u_0 - 18v_0 = 2.$$

Ainsi :

$$x^2 = x^{10u_0 - 18v_0}.$$

Or :

$$x^{10u_0 - 18v_0} = \frac{x^{10u_0}}{x^{18v_0}}.$$

Donc :

$$x^2 = \frac{(x^{10})^{u_0}}{(x^{18})^{v_0}}.$$

Modulo 19, on a :

$$x^{10} \equiv 5 \pmod{19}$$

et :

$$x^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Donc :

$$x^2 \equiv \frac{5^{u_0}}{1^{v_0}} \pmod{19}.$$

Comme :

$$1^{v_0} = 1,$$

on obtient :

$$x^2 \equiv 5^{u_0} \pmod{19}.$$

D'après la partie A :

$$5^{u_0} \equiv 6 \pmod{19}.$$

Donc :

$$\boxed{x^2 \equiv 6 \pmod{19}}.$$

1-d) Montrer que $x \equiv 5 \pmod{19}$ ou $x \equiv -5 \pmod{19}$

On a montré que :

$$x^2 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Or :

$$5^2 = 25.$$

Et :

$$25 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Donc :

$$x^2 \equiv 5^2 \pmod{19}.$$

Ainsi :

$$x^2 - 5^2 \equiv 0 [19].$$

En factorisant :

$$(x - 5)(x + 5) \equiv 0 [19].$$

Donc :

$$19 \mid (x - 5)(x + 5).$$

Comme 19 est un nombre premier, d'après le théorème de Gauss :

$$19 \mid (x - 5)$$

ou :

$$19 \mid (x + 5).$$

Ainsi :

$$x \equiv 5 [19]$$

ou :

$$x \equiv -5 [19].$$

Donc :

$$x \equiv 5 [19] \quad \text{ou} \quad x \equiv -5 [19].$$

2) Montrer que si $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$, alors x est solution de (E)

Supposons que :

$$x \equiv 5 [19]$$

ou :

$$x \equiv -5 [19].$$

Dans les deux cas :

$$x^2 \equiv 25 [19].$$

Or :

$$25 \equiv 6 [19].$$

Donc :

$$x^2 \equiv 6 [19].$$

Alors :

$$x^{10} = (x^2)^5.$$

Donc :

$$x^{10} \equiv 6^5 [19].$$

Calculons 6^5 modulo 19.

On a :

$$6^2 = 36.$$

Or :

$$36 \equiv -2 [19].$$

Donc :

$$6^4 \equiv (-2)^2 \equiv 4 [19].$$

Ainsi :

$$6^5 = 6^4 \cdot 6.$$

Donc :

$$6^5 \equiv 4 \cdot 6 \equiv 24 [19].$$

Or :

$$24 \equiv 5 [19].$$

Donc :

$$x^{10} \equiv 5 [19].$$

De plus, puisque :

$$x \equiv 5 [19]$$

ou :

$$x \equiv -5 [19],$$

on a :

$$x \not\equiv 0 [19].$$

Donc x et 19 sont premiers entre eux.

D'après le petit théorème de Fermat :

$$x^{18} \equiv 1 [19].$$

Or :

$$2026 = 18 \times 112 + 10.$$

Donc :

$$x^{2026} = x^{18 \times 112 + 10}.$$

Ainsi :

$$x^{2026} = (x^{18})^{112} x^{10}.$$

Modulo 19, cela donne :

$$x^{2026} \equiv 1^{112} \cdot 5 [19].$$

Donc :

$$x^{2026} \equiv 5 [19].$$

Ainsi x est solution de l'équation (E) .

Finalement :

$x^{2026} \equiv 5 [19] \iff x \equiv 5 [19] \text{ ou } x \equiv -5 [19].$

Autre alternative pour 1-c

On a montré à la question précédente que :

$$x^{18} \equiv 1 \pmod{19}$$

et

$$x^{10} \equiv 5 \pmod{19}.$$

Élevons cette dernière congruence au carré :

$$(x^{10})^2 \equiv 5^2 \pmod{19}.$$

On obtient alors :

$$x^{20} \equiv 25 \pmod{19}.$$

Or,

$$25 = 19 + 6,$$

donc

$$25 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Ainsi,

$$x^{20} \equiv 6 \pmod{19}.$$

D'autre part,

$$x^{20} = x^{18} \times x^2.$$

Par conséquent,

$$x^{18}x^2 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Comme

$$x^{18} \equiv 1 \pmod{19},$$

on en déduit que

$$1 \times x^2 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Finalement,

$$\boxed{x^2 \equiv 6 \pmod{19}.$$

Corrigé détaillé – Exercice 3, Partie II

On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100, indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard de cette urne.

On considère l'événement :

V : "Le numéro de la boule tirée est solution de l'équation (E) ".

D'après la partie précédente, les solutions de l'équation (E) sont les entiers x tels que :

$$x \equiv 5 \pmod{19}$$

ou :

$$x \equiv -5 \pmod{19}.$$

Or :

$$-5 \equiv 14 \pmod{19}.$$

Donc les numéros favorables sont les entiers compris entre 1 et 100 qui sont congrus à 5 ou à 14 modulo 19.

1) Montrer que la probabilité de l'événement V est $p = 0,11$

Les nombres compris entre 1 et 100 qui sont congrus à 5 modulo 19 sont :

5, 24, 43, 62, 81, 100.

Il y en a donc 6.

Les nombres compris entre 1 et 100 qui sont congrus à 14 modulo 19 sont :

14, 33, 52, 71, 90.

Il y en a donc 5.

Ainsi, le nombre total de numéros favorables est :

$$6 + 5 = 11.$$

L'urne contient 100 boules, et comme les boules sont indiscernables au toucher, chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

Donc :

$$p(V) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Ainsi :

$$p(V) = \frac{11}{100}.$$

Donc :

$$\boxed{p(V) = 0,11.}$$

2) Déterminer la valeur minimale de n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.

Cela signifie qu'après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne. Par conséquent, les tirages sont indépendants et la probabilité de l'événement V reste la même à chaque tirage.

À chaque tirage, on a deux possibilités :

V : le numéro tiré est solution de (E) ,

ou :

$\bar{V}$: le numéro tiré n'est pas solution de (E) .

On a :

$$p(V) = 0,11.$$

Donc :

$$p(\bar{V}) = 1 - p(V).$$

Ainsi :

$$p(\bar{V}) = 1 - 0,11 = 0,89.$$

On est donc dans un schéma de Bernoulli, car :

- on répète n fois la même expérience ;
- chaque expérience possède deux issues : succès V ou échec $\bar{V}$;
- les expériences sont indépendantes grâce à la remise ;
- la probabilité du succès reste constante et vaut $p = 0,11$.

On cherche la probabilité que l'événement V se réalise au moins une fois pendant les n tirages.

L'événement contraire est :

“l'événement V ne se réalise jamais”.

La probabilité que V ne se réalise pas lors d'un tirage est :

$$0,89.$$

Comme les tirages sont indépendants, la probabilité que V ne se réalise jamais pendant les n tirages est :

$$(0,89)^n.$$

Donc la probabilité que V se réalise au moins une fois est :

$$1 - (0,89)^n.$$

On veut que cette probabilité soit strictement supérieure à 0,95.

Donc :

$$1 - (0,89)^n > 0,95.$$

On résout cette inégalité :

$$-(0,89)^n > -0,05.$$

En multipliant par -1 , le sens de l'inégalité change :

$$(0,89)^n < 0,05.$$

On applique le logarithme népérien :

$$\ln((0,89)^n) < \ln(0,05).$$

Donc :

$$n \ln(0,89) < \ln(0,05).$$

Or :

$$0 < 0,89 < 1.$$

Donc :

$$\ln(0,89) < 0.$$

En divisant par $\ln(0,89)$, qui est négatif, le sens de l'inégalité change :

$$n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,89)}.$$

Avec la calculatrice :

$$\frac{\ln(0,05)}{\ln(0,89)} \approx 25,70.$$

Donc :

$$n > 25,70.$$

Comme n est un entier naturel non nul, la plus petite valeur possible est :

$$\boxed{n = 26.}$$

Corrigé détaillé – Exercice 4

On considère :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Montrer que $M(x)M(y) = M(x+y)$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

On a :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix}$$

et

$$M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 1-y & y \\ y^2+2y & -y & y+1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit $M(x)M(y)$.

La première ligne donne directement :

$$(1, 0, 0)M(y) = (1, 0, 0).$$

Pour la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} L_{21} &= x^2 + (1-x)y^2 + x(y^2 + 2y) \\ &= x^2 + y^2 - xy^2 + xy^2 + 2xy \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= (x+y)^2. \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} L_{22} &= (1-x)(1-y) + x(-y) \\ &= 1 - y - x + xy - xy \\ &= 1 - (x+y). \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} L_{23} &= (1-x)y + x(y+1) \\ &= y - xy + xy + x \\ &= x+y. \end{aligned}$$

Pour la troisième ligne :

$$\begin{aligned} L_{31} &= x^2 + 2x + (-x)y^2 + (x+1)(y^2 + 2y) \\ &= x^2 + 2x - xy^2 + xy^2 + y^2 + 2xy + 2y \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y \\ &= (x+y)^2 + 2(x+y). \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}L_{32} &= (-x)(1-y) + (x+1)(-y) \\&= -x + xy - xy - y \\&= -(x+y).\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}L_{33} &= (-x)y + (x+1)(y+1) \\&= -xy + xy + x + y + 1 \\&= x + y + 1.\end{aligned}$$

Donc :

$$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1-(x+y) & x+y \\ (x+y)^2 + 2(x+y) & -(x+y) & x+y+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{M(x)M(y) = M(x+y).}$$

2-a) Montrer que φ est un homomorphisme et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$

On définit :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M_3(\mathbb{R})$$

par :

$$\varphi(x) = M(x).$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a montré que :

$$M(x)M(y) = M(x+y).$$

Donc :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{R}, +) \text{ vers } (M_3(\mathbb{R}), \times).}$$

De plus, par définition :

$$E = \{M(x) ; x \in \mathbb{R}\}.$$

Or :

$$\varphi(x) = M(x).$$

Donc :

$$\boxed{\varphi(\mathbb{R}) = E.}$$

2-b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif

On sait que :

$$E = \{M(x) ; x \in \mathbb{R}\}.$$

D'après la question 1 :

$$M(x)M(y) = M(x + y).$$

Comme $x + y \in \mathbb{R}$, on a :

$$M(x + y) \in E.$$

Donc E est stable pour la multiplication matricielle.

L'élément neutre est :

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc :

$$\boxed{I \in E.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$M(x)M(-x) = M(x - x) = M(0) = I.$$

Donc l'inverse de $M(x)$ dans E est :

$$\boxed{M(x)^{-1} = M(-x).}$$

La loi est associative car la multiplication matricielle est associative.

Enfin, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$M(x)M(y) = M(x + y)$$

et :

$$M(y)M(x) = M(y + x).$$

Comme :

$$x + y = y + x,$$

on obtient :

$$M(x)M(y) = M(y)M(x).$$

Donc :

$$\boxed{(E, \times) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

3-a) Montrer que $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif

On définit sur E la loi T par :

$$M(x)TM(y) = M(2xy).$$

D'abord, remarquons que :

$$I = M(0).$$

Donc :

$$E - \{I\} = \{M(x) ; x \in \mathbb{R}^*\}.$$

Stabilité

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Alors :

$$xy \neq 0.$$

Donc :

$$2xy \neq 0.$$

Ainsi :

$$M(2xy) \in E - \{I\}.$$

Donc $E - \{I\}$ est stable pour T .

Associativité

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

On a :

$$(M(x)TM(y))TM(z) = M(2xy)TM(z).$$

Donc :

$$(M(x)TM(y))TM(z) = M(2(2xy)z) = M(4xyz).$$

D'autre part :

$$M(x)T(M(y)TM(z)) = M(x)TM(2yz).$$

Donc :

$$M(x)T(M(y)TM(z)) = M(2x(2yz)) = M(4xyz).$$

Ainsi :

$$(M(x)TM(y))TM(z) = M(x)T(M(y)TM(z)).$$

Donc T est associative.

Élément neutre

On cherche un élément $M(e)$ tel que :

$$M(x)TM(e) = M(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Or :

$$M(x)TM(e) = M(2xe).$$

On veut donc :

$$2xe = x.$$

Comme $x \neq 0$, on divise par x :

$$2e = 1.$$

Donc :

$$e = \frac{1}{2}.$$

L'élément neutre pour T est donc :

$$M\left(\frac{1}{2}\right).$$

Symétrique

Soit $M(x) \in E - \{I\}$, avec $x \neq 0$.

On cherche $M(y)$ tel que :

$$M(x)TM(y) = M\left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc :

$$M(2xy) = M\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi :

$$2xy = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$y = \frac{1}{4x}.$$

Comme $x \neq 0$, ce réel existe et est non nul.

Ainsi, le symétrique de $M(x)$ pour T est :

$$M\left(\frac{1}{4x}\right).$$

Commutativité

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$:

$$M(x)TM(y) = M(2xy).$$

Or :

$$xy = yx.$$

Donc :

$$M(2xy) = M(2yx).$$

Ainsi :

$$M(x)TM(y) = M(y)TM(x).$$

Donc :

$(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

3-b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif

On veut montrer que E muni des deux lois $\times$ et T est un corps commutatif.

D'après la question 2-b :

$$(E, \times)$$

est un groupe commutatif.

Son élément neutre est :

$$I = M(0).$$

D'après la question 3-a :

$$(E - \{I\}, T)$$

est un groupe commutatif.

L'élément neutre de T est :

$$M\left(\frac{1}{2}\right).$$

Il reste à vérifier la distributivité de T par rapport à $\times$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

On a :

$$M(y) \times M(z) = M(y + z).$$

Donc :

$$M(x)T(M(y) \times M(z)) = M(x)TM(y + z).$$

Ainsi :

$$M(x)T(M(y) \times M(z)) = M(2x(y + z)).$$

Or :

$$2x(y + z) = 2xy + 2xz.$$

Donc :

$$M(2x(y + z)) = M(2xy + 2xz).$$

D'après la question 1 :

$$M(2xy + 2xz) = M(2xy) \times M(2xz).$$

Donc :

$$M(x)T(M(y) \times M(z)) = M(2xy) \times M(2xz).$$

Or :

$$M(2xy) = M(x)TM(y),$$

et :

$$M(2xz) = M(x)TM(z).$$

Ainsi :

$$M(x)T(M(y) \times M(z)) = (M(x)TM(y)) \times (M(x)TM(z)).$$

Donc T est distributive par rapport à $\times$.

Par conséquent :

$(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

4-a) Montrer que $(M(x))^n = M(nx)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (M(x))^n = M(nx).$$

On raisonne par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 1$:

$$(M(x))^1 = M(x).$$

Et :

$$M(1x) = M(x).$$

Donc :

$$(M(x))^1 = M(1x).$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(M(x))^n = M(nx).$$

Alors :

$$(M(x))^{n+1} = (M(x))^n M(x).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$(M(x))^{n+1} = M(nx)M(x).$$

D'après la question 1 :

$$M(nx)M(x) = M(nx + x).$$

Donc :

$$M(nx)M(x) = M((n+1)x).$$

Ainsi :

$$(M(x))^{n+1} = M((n+1)x).$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (M(x))^n = M(nx).}$$

4-b) Résoudre dans E l'équation

$$X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $X \in E$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$X = M(x).$$

D'après la question 4-a :

$$X^3 = (M(x))^3 = M(3x),$$

et :

$$X^2 = (M(x))^2 = M(2x).$$

Donc :

$$X^3 - X^2 = M(3x) - M(2x).$$

Calculons :

$$M(3x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9x^2 & 1-3x & 3x \\ 9x^2+6x & -3x & 3x+1 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$M(2x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4x^2 & 1-2x & 2x \\ 4x^2+4x & -2x & 2x+1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$M(3x) - M(2x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2+2x & -x & x \end{pmatrix}.$$

On veut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2+2x & -x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$5x^2 = 5,$$

$$-x = 1,$$

et :

$$x = -1.$$

L'équation $-x = 1$ donne directement :

$$x = -1.$$

Vérifions que cette valeur convient :

$$5x^2 = 5(-1)^2 = 5,$$

et :

$$5x^2 + 2x = 5 - 2 = 3.$$

Tous les coefficients correspondent bien.

Donc :

$$x = -1.$$

Ainsi :

$$X = M(-1).$$

Calculons $M(-1)$:

$$M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-1)^2 & 1 - (-1) & -1 \\ (-1)^2 + 2(-1) & -(-1) & -1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$