

# Corrigé détaillé – Exercice 1 – Partie I

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(t) = \ln(t) - (t - 1).$$

Soit

$$x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}.$$

On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$h(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}(t-1)^2 - g(t).$$

Il faut bien remarquer que dans la fonction  $h$ , la variable est  $t$ , tandis que  $x$  est considéré comme un nombre fixé.

## 1. Montrer que $h$ est dérivable et calculer $h'(t)$

La fonction

$$t \mapsto (t-1)^2$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , car la fonction logarithme est dérivable sur cet intervalle.

Donc la fonction  $h$ , qui est une combinaison de fonctions dérivables, est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

On calcule d'abord la dérivée de  $g$ .

Comme

$$g(t) = \ln(t) - (t - 1),$$

alors

$$g'(t) = \frac{1}{t} - 1.$$

On peut écrire

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t} = \frac{1-t}{t}.$$

Donc

$$g'(t) = -\frac{t-1}{t}.$$

Maintenant, on dérive  $h$ .

On a

$$h(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}(t-1)^2 - g(t).$$

Comme  $x$  est fixé, le nombre

$$\frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

est une constante.

Donc

$$h'(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} \cdot 2(t-1) - g'(t).$$

Ainsi,

$$h'(t) = \frac{2g(x)}{(x-1)^2}(t-1) - \left(\frac{1}{t} - 1\right).$$

Or

$$-\left(\frac{1}{t} - 1\right) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}.$$

Donc

$$h'(t) = \frac{2g(x)}{(x-1)^2}(t-1) + \frac{t-1}{t}.$$

On factorise par  $t-1$  :

$$h'(t) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t}\right)(t-1).$$

Donc

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad h'(t) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t}\right)(t-1)$$

## 2. Application du théorème de Rolle

On veut montrer qu'il existe un réel  $\theta$  compris entre  $x$  et  $1$  tel que

$$\frac{g(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2\theta}.$$

Calculons d'abord  $h(1)$ .

On a

$$h(1) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}(1-1)^2 - g(1).$$

Donc

$$h(1) = 0 - g(1).$$

Or

$$g(1) = \ln(1) - (1-1) = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi,

$$h(1) = 0.$$

Calculons maintenant  $h(x)$ .

On a

$$h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}(x-1)^2 - g(x).$$

Donc

$$h(x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Ainsi,

$$h(1) = h(x) = 0.$$

La fonction  $h$  est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités  $1$  et  $x$ , et dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant.

Comme  $h(1) = h(x)$ , on peut appliquer le théorème de Rolle.

Donc il existe un réel  $\theta$  strictement compris entre  $1$  et  $x$  tel que

$$h'(\theta) = 0.$$

D'après la question précédente,

$$h'(\theta) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{\theta}\right)(\theta-1).$$

Donc

$$\left( \frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{\theta} \right) (\theta - 1) = 0.$$

Comme  $\theta$  est strictement compris entre 1 et  $x$ , on a

$$\theta \neq 1.$$

Donc

$$\theta - 1 \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{\theta} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{2g(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{\theta}.$$

En divisant par 2, on obtient

$$\boxed{\frac{g(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2\theta}}$$

### 3. Encadrement de $\theta$

D'après la question précédente, le réel  $\theta$  est strictement compris entre 1 et  $x$ .

Comme

$$x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\},$$

on a deux cas possibles :

$$x > 1 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1.$$

#### Premier cas : $x > 1$

Si  $x > 1$ , alors  $\theta$  est strictement compris entre 1 et  $x$ . Donc

$$1 < \theta < x.$$

Dans ce cas,

$$x - 1 > 0.$$

Donc, par définition de la valeur absolue,

$$|x - 1| = x - 1.$$

Calculons maintenant le membre de gauche de l'encadrement demandé :

$$\frac{x + 1 - |x - 1|}{2} = \frac{x + 1 - (x - 1)}{2}.$$

On simplifie :

$$x + 1 - (x - 1) = x + 1 - x + 1 = 2.$$

Donc

$$\frac{x + 1 - |x - 1|}{2} = 1.$$

Calculons maintenant le membre de droite :

$$\frac{x+1+|x-1|}{2} = \frac{x+1+(x-1)}{2}.$$

On simplifie :

$$x+1+x-1=2x.$$

Donc

$$\frac{x+1+|x-1|}{2} = x.$$

Or, dans ce cas, on a déjà

$$1 < \theta < x.$$

On peut donc écrire

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}.$$

## Deuxième cas : $0 < x < 1$

Si  $0 < x < 1$ , alors  $\theta$  est strictement compris entre  $x$  et 1. Donc

$$x < \theta < 1.$$

Dans ce cas,

$$x-1 < 0.$$

Donc, par définition de la valeur absolue,

$$|x-1| = -(x-1) = 1-x.$$

Calculons maintenant le membre de gauche de l'encadrement demandé :

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} = \frac{x+1-(1-x)}{2}.$$

On simplifie :

$$x+1-(1-x) = x+1-1+x = 2x.$$

Donc

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} = x.$$

Calculons maintenant le membre de droite :

$$\frac{x+1+|x-1|}{2} = \frac{x+1+(1-x)}{2}.$$

On simplifie :

$$x+1+1-x = 2.$$

Donc

$$\frac{x+1+|x-1|}{2} = 1.$$

Or, dans ce cas, on a déjà

$$x < \theta < 1.$$

On peut donc écrire

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}.$$

## Conclusion

Dans les deux cas possibles, on obtient le même encadrement :

$$\boxed{\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}}$$

## 4. Encadrement de $\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

On vient de montrer que

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}.$$

Pour alléger l'écriture, posons

$$A = \frac{x+1-|x-1|}{2}$$

et

$$B = \frac{x+1+|x-1|}{2}.$$

Alors

$$A < \theta < B.$$

De plus, comme  $x > 0$ , les nombres  $A$ ,  $\theta$  et  $B$  sont strictement positifs.

On va transformer cet encadrement afin d'obtenir un encadrement de

$$-\frac{1}{2\theta}.$$

Comme

$$0 < A < \theta < B,$$

on a, en prenant les inverses,

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{\theta} > \frac{1}{B}.$$

On peut réécrire cela dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{B} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{A}.$$

En multipliant par  $-\frac{1}{2}$ , qui est un nombre négatif, le sens des inégalités change :

$$-\frac{1}{2B} > -\frac{1}{2\theta} > -\frac{1}{2A}.$$

En remettant dans l'ordre croissant, on obtient

$$-\frac{1}{2A} < -\frac{1}{2\theta} < -\frac{1}{2B}.$$

Or, d'après la question 2,

$$-\frac{1}{2\theta} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}.$$

Donc

$$-\frac{1}{2A} < \frac{g(x)}{(x-1)^2} < -\frac{1}{2B}.$$

Remplaçons maintenant  $A$  et  $B$ .

Comme

$$A = \frac{x + 1 - |x - 1|}{2},$$

on a

$$2A = x + 1 - |x - 1|.$$

Donc

$$-\frac{1}{2A} = -\frac{1}{x + 1 - |x - 1|}.$$

De même, comme

$$B = \frac{x + 1 + |x - 1|}{2},$$

on a

$$2B = x + 1 + |x - 1|.$$

Donc

$$-\frac{1}{2B} = -\frac{1}{x + 1 + |x - 1|}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{-\frac{1}{x + 1 - |x - 1|} < \frac{g(x)}{(x - 1)^2} < -\frac{1}{x + 1 + |x - 1|}}$$

Or

$$x + 1 + |x - 1| = |x - 1| + x + 1.$$

Donc on peut aussi écrire l'encadrement sous la forme demandée :

$$\boxed{-\frac{1}{x + 1 - |x - 1|} < \frac{g(x)}{(x - 1)^2} < -\frac{1}{|x - 1| + x + 1}}$$

## Corrigé détaillé – Exercice 1 – Partie II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(1) = 1$$

et, pour tout

$$x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[,$$

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2.$$

### 1-a. Calcul des limites

**Limite lorsque  $x \rightarrow 0^+$**

Pour  $x \neq 1$ ,

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2.$$

Lorsque

$$x \rightarrow 0^+,$$

on a

$$\ln x \rightarrow -\infty$$

et

$$x-1 \rightarrow -1.$$

Donc

$$\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2 \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.}$$

**Limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$**

Lorsque

$$x \rightarrow +\infty,$$

on écrit

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1}.$$

Or, d'après le résultat classique du cours,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

De plus,

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Par produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

## Interprétation graphique

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

la courbe ( $C$ ) admet une asymptote verticale d'équation

$$\boxed{x = 0.}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

la courbe ( $C$ ) admet une asymptote horizontale au voisinage de  $+\infty$ , d'équation

$$\boxed{y = 0.}$$

## 1-b. Continuité de $f$ au point 1

Pour montrer que  $f$  est continue en 1, il faut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

Or

$$f(1) = 1.$$

Pour  $x \neq 1$ ,

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2.$$

On remarque que

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}.$$

Comme la fonction logarithme est dérivable en 1, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln)'(1).$$

Or

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x},$$

donc

$$(\ln)'(1) = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\ln x}{x - 1} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1),$$

on conclut que

$$\boxed{f \text{ est continue en } 1.}$$

## 2-a. Montrer l'égalité demandée

Pour tout

$$x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[,$$

on a

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x - 1} \right)^2.$$

Donc

$$f(x) - 1 = \left( \frac{\ln x}{x - 1} \right)^2 - 1.$$

On utilise l'identité remarquable

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1),$$

avec

$$A = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Ainsi,

$$f(x) - 1 = \left( \frac{\ln x}{x - 1} - 1 \right) \left( \frac{\ln x}{x - 1} + 1 \right).$$

Or

$$\frac{\ln x}{x - 1} - 1 = \frac{\ln x - (x - 1)}{x - 1}.$$

Mais

$$g(x) = \ln x - (x - 1).$$

Donc

$$\frac{\ln x}{x - 1} - 1 = \frac{g(x)}{x - 1}.$$

Par conséquent,

$$f(x) - 1 = \frac{g(x)}{x - 1} \left( 1 + \frac{\ln x}{x - 1} \right).$$

En divisant par  $x - 1$ , puisque  $x \neq 1$ , on obtient

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{g(x)}{(x - 1)^2} \left( 1 + \frac{\ln x}{x - 1} \right).$$

Donc

$$\boxed{\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \left( 1 + \frac{\ln x}{x - 1} \right) \left( \frac{g(x)}{(x - 1)^2} \right).}$$

## 2-b. En déduire que $f$ est dérivable en 1

On doit étudier la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Comme

$$f(1) = 1,$$

cela revient à étudier

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \left(1 + \frac{\ln x}{x - 1}\right) \left(\frac{g(x)}{(x - 1)^2}\right).$$

On a déjà montré que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\ln x}{x - 1}\right) = 1 + 1 = 2.$$

D'après la Partie I, on a l'encadrement

$$-\frac{1}{x + 1 - |x - 1|} < \frac{g(x)}{(x - 1)^2} < -\frac{1}{x + 1 + |x - 1|}.$$

Lorsque

$$x \rightarrow 1,$$

on a

$$x + 1 - |x - 1| \rightarrow 2$$

et

$$x + 1 + |x - 1| \rightarrow 2.$$

Donc

$$-\frac{1}{x + 1 - |x - 1|} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

et

$$-\frac{1}{x + 1 + |x - 1|} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

La limite existe et est finie. Donc  $f$  est dérivable en 1, et

$$\boxed{f'(1) = -1.}$$

## 2-c. Équation de la tangente au point d'abscisse 1

La tangente à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or

$$f'(1) = -1$$

et

$$f(1) = 1.$$

Donc

$$y = -(x - 1) + 1.$$

Ainsi,

$$y = -x + 1 + 1.$$

Donc

$$\boxed{(T) : y = -x + 2.}$$

## 3-a. Dérivabilité de $f$ sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et calcul de $f'(x)$

Pour tout

$$x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\},$$

on a

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x - 1} \right)^2.$$

La fonction logarithme est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et la fonction

$$x \mapsto x - 1$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Comme

$$x \neq 1,$$

on a

$$x - 1 \neq 0.$$

Donc la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x - 1}$$

est dérivable sur  $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ .

La fonction carré est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est dérivable sur

$$]0, +\infty[\setminus\{1\}.$$

Posons

$$u(x) = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Alors

$$f(x) = u(x)^2.$$

Donc

$$f'(x) = 2u(x)u'(x).$$

On calcule  $u'(x)$ . Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$u'(x) = \frac{(\ln x)'(x-1) - \ln x (x-1)'}{(x-1)^2}.$$

Or

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

et

$$(x-1)' = 1.$$

Donc

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}.$$

Simplifions maintenant le numérateur

$$\frac{x-1}{x} - \ln x.$$

On a

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Donc

$$\frac{x-1}{x} - \ln x = 1 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

D'autre part,

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Comme

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x,$$

on obtient

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x - \frac{1}{x} + 1.$$

Donc

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

Par conséquent,

$$\frac{x-1}{x} - \ln x = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{2 \ln x}{x-1} \cdot \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}.$$

### 3-b. Montrer que $\frac{\ln x}{x-1} > 0$

On veut montrer que

$$\forall x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[, \quad \frac{\ln x}{x-1} > 0.$$

On distingue deux cas.

### Premier cas : $x > 1$

Si

$$x > 1,$$

alors, puisque la fonction logarithme est strictement croissante et que  $\ln 1 = 0$ ,

$$\ln x > \ln 1 = 0.$$

Donc

$$\ln x > 0.$$

De plus,

$$x - 1 > 0.$$

Ainsi, le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif :

$$\frac{\ln x}{x - 1} > 0.$$

### Deuxième cas : $0 < x < 1$

Si

$$0 < x < 1,$$

alors, puisque la fonction logarithme est strictement croissante,

$$\ln x < \ln 1 = 0.$$

Donc

$$\ln x < 0.$$

De plus,

$$x - 1 < 0.$$

Ainsi, le quotient de deux nombres strictement négatifs est strictement positif :

$$\frac{\ln x}{x - 1} > 0.$$

Dans les deux cas, on a bien

|                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------|
| $\forall x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[, \quad \frac{\ln x}{x - 1} > 0.$ |
|--------------------------------------------------------------------------|

# Corrigé détaillé

## Exercice 1 : fin de la Partie II

### Exercice 2 : questions 2 à 5

## Exercice 1 – Partie II

On rappelle que

$$g(x) = \ln x - (x - 1), \quad x > 0,$$

et que la fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(1) = 1$$

et, pour  $x \neq 1$ ,

$$f(x) = \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^2.$$

D'après les questions précédentes,  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , avec

$$f'(1) = -1,$$

et, pour tout  $x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}$ ,

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x-1} \cdot \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}.$$

On a également montré que

$$\forall x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}, \quad \frac{\ln x}{x-1} > 0.$$

## 3-c. Signe de $g$ et sens de variation de $f$

### Étude du signe de $g$

La fonction  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = \ln x - (x - 1).$$

Elle est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

On met cette expression au même dénominateur :

$$g'(x) = \frac{1-x}{x}.$$

Comme  $x > 0$ , le dénominateur  $x$  est strictement positif. Le signe de  $g'(x)$  est donc celui de  $1-x$ .

Ainsi :

$$\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ g'(1) = 0, \\ g'(x) < 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, 1]$ , puis strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

Calculons sa valeur en 1 :

$$g(1) = \ln 1 - (1 - 1) = 0.$$

La fonction  $g$  atteint donc en 1 sa valeur maximale, qui est égale à 0.

On en déduit que

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad g(x) \leq 0.$$

De plus, puisque  $g$  est strictement croissante avant 1 et strictement décroissante après 1, l'égalité  $g(x) = 0$  n'est obtenue que pour  $x = 1$ .

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, \quad g(x) \leq 0,}$$

avec

$$\boxed{g(x) = 0 \iff x = 1.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}, \quad g(x) < 0.}$$

## Sens de variation de $f$

Soit

$$x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}.$$

On a

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x - 1} \cdot \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x - 1)^2}.$$

Étudions le signe de chacun des facteurs.

D'après la question 3-b,

$$\frac{\ln x}{x - 1} > 0.$$

Donc

$$\frac{2 \ln x}{x - 1} > 0.$$

Par ailleurs,

$$(x - 1)^2 > 0,$$

car  $x \neq 1$ .

Enfin, comme  $x \neq 1$ , on a

$$\frac{1}{x} \neq 1.$$

Or  $g(t) < 0$  pour tout  $t > 0$  différent de 1. En prenant  $t = \frac{1}{x}$ , on obtient

$$g\left(\frac{1}{x}\right) < 0.$$

Ainsi,

$$\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x - 1)^2} < 0.$$

Le premier facteur de  $f'(x)$  est strictement positif, tandis que le second est strictement négatif. Par conséquent,

$$\forall x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}, \quad f'(x) < 0.$$

Au point 1, on a déjà montré que

$$f'(1) = -1 < 0.$$

Finalement,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f'(x) < 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } ]0, +\infty[.}$$

Son tableau de variation est donc :

| $x$     | $0^+$     | $1$                   | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$                   |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow 1 \swarrow$ | $0$       |

## 4. Résolution de l'équation $f(x) = x$

On veut montrer que le réel 1 est la seule solution de l'équation

$$f(x) = x$$

sur  $]0, +\infty[$ .

On vérifie d'abord que 1 est une solution :

$$f(1) = 1.$$

Il reste à montrer qu'il n'existe aucune autre solution.

### Premier cas : $0 < x < 1$

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Comme

$$x < 1,$$

la décroissance de  $f$  donne

$$f(x) > f(1).$$

Or

$$f(1) = 1.$$

Donc

$$f(x) > 1.$$

Mais  $0 < x < 1$ , donc

$$1 > x.$$

Par conséquent,

$$f(x) > 1 > x,$$

d'où

$$f(x) \neq x.$$

Ainsi, l'équation  $f(x) = x$  n'admet aucune solution dans  $]0, 1[$ .

## Deuxième cas : $x > 1$

Comme  $f$  est strictement décroissante et que  $x > 1$ , on a

$$f(x) < f(1) = 1.$$

Or

$$x > 1.$$

Donc

$$f(x) < 1 < x.$$

Par conséquent,

$$f(x) \neq x.$$

L'équation  $f(x) = x$  n'admet donc aucune solution dans  $]1, +\infty[$ .

## Conclusion

Le réel 1 est solution, et il n'existe aucune solution différente de 1. Ainsi,

|                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|
| $1$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ . |
|-------------------------------------------------------------------------|

## 5. Représentation de la tangente ( $T$ ) et de la courbe ( $C$ )

Rassemblons les résultats obtenus.

— La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

— On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation

$$x = 0$$

est donc une asymptote verticale à la courbe ( $C$ ).

— On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La droite d'équation

$$y = 0$$

est donc une asymptote horizontale à la courbe ( $C$ ) au voisinage de  $+\infty$ .

— La courbe ( $C$ ) passe par le point

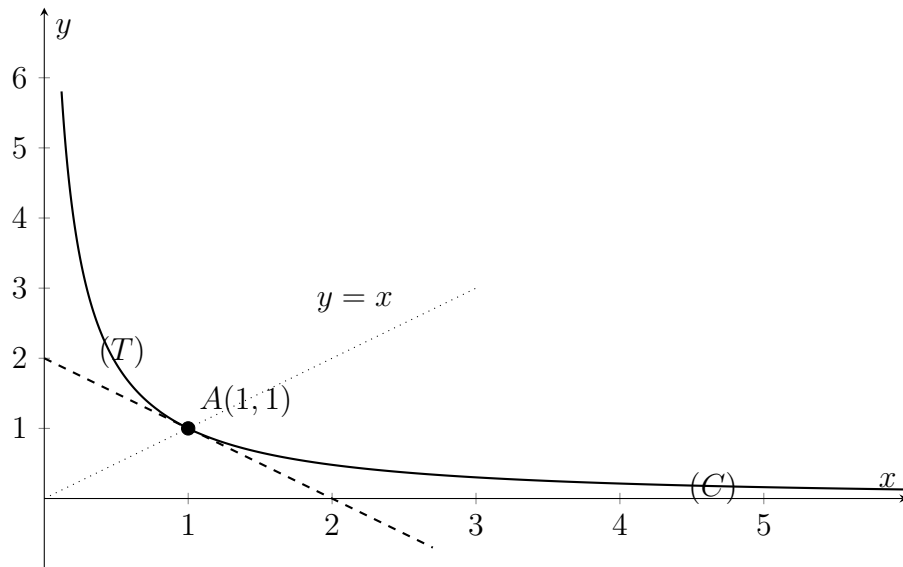
$$A(1, 1).$$

— La tangente à ( $C$ ) au point  $A(1, 1)$  a pour équation

$$(T) : y = -x + 2.$$

— La courbe ( $C$ ) rencontre la droite d'équation  $y = x$  uniquement au point  $A(1, 1)$ .

On obtient la représentation suivante. Le dessin est une représentation graphique approchée servant à faire apparaître les principaux éléments de la courbe.



## 6-a. Existence et unicité de $x_n$

Soit

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

On veut montrer que l'équation

$$f(x) = n$$

admet une solution unique  $x_n$  dans  $]0, 1]$ .

Sur l'intervalle  $]0, 1]$ , la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

et

$$f(1) = 1.$$

Ainsi, lorsque  $x$  parcourt  $]0, 1]$ , la fonction  $f(x)$  prend toutes les valeurs de l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

Or, puisque

$$n \in \mathbb{N}^*,$$

on a

$$n \geq 1.$$

Donc  $n \in [1, +\infty[$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel  $x_n \in ]0, 1]$  tel que

$$f(x_n) = n.$$

De plus, comme  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 1]$ , elle ne peut prendre une même valeur qu'une seule fois.

La solution est donc unique.

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! x_n \in ]0, 1] \text{ tel que } f(x_n) = n.}$$

En particulier, pour  $n = 1$ ,

$$f(x_1) = 1.$$

Comme 1 est l'unique solution de  $f(x) = 1$ , on a

$$\boxed{x_1 = 1.}$$

Pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$\boxed{0 < x_n < 1.}$$

## 6-b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Nous allons d'abord montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement décroissante.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$f(x_n) = n$$

et

$$f(x_{n+1}) = n + 1.$$

Donc

$$f(x_{n+1}) > f(x_n).$$

Or  $f$  est strictement décroissante.

Pour une fonction strictement décroissante, une plus grande valeur de la fonction correspond à une plus petite valeur de la variable.

On obtient donc

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ainsi, la suite  $(x_n)$  est strictement décroissante.

De plus,

$$x_n > 0.$$

La suite  $(x_n)$  est donc décroissante et minorée par 0. Elle est par conséquent convergente.

Notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Comme

$$0 < x_n \leq 1,$$

on a

$$0 \leq \ell \leq 1.$$

Montrons que  $\ell = 0$ .

Supposons, par l'absurde, que

$$\ell > 0.$$

Dans ce cas,

$$\ell \in ]0, 1].$$

Comme  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , elle est continue en  $\ell$ . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

Le nombre  $f(\ell)$  est un nombre réel fini.

Mais

$$f(x_n) = n.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

On obtient une contradiction, car une même suite ne peut pas converger à la fois vers le réel fini  $f(\ell)$  et vers  $+\infty$ .

L'hypothèse  $\ell > 0$  est donc impossible.

Ainsi,

$$\ell = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.}$$

## 6-c. Relation vérifiée par $x_n$ et calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$f(x_n) = n.$$

Pour  $n \geq 2$ , on a  $0 < x_n < 1$ , donc  $x_n \neq 1$ , et

$$f(x_n) = \left( \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} \right)^2.$$

Ainsi,

$$\left( \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} \right)^2 = n.$$

En prenant la racine carrée, on obtient

$$\left| \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} \right| = \sqrt{n}.$$

Or, d'après la question 3-b,

$$\frac{\ln x}{x - 1} > 0$$

pour tout  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Comme  $0 < x_n < 1$ , on a donc

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} > 0.$$

Par conséquent, la valeur absolue peut être supprimée :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}.$$

### Remarque importante :

Pour  $n = 1$ , on a  $x_1 = 1$ , et le quotient

$$\frac{\ln(x_1)}{x_1 - 1}$$

n'est pas défini. L'égalité précédente est donc rigoureusement valable pour  $n \geq 2$ . Cela ne change évidemment pas l'étude de la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n}$

Pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}.$$

En multipliant par  $x_n$ , on obtient

$$x_n \sqrt{n} = \frac{x_n \ln(x_n)}{x_n - 1}.$$

D'après la question 6-b,

$$x_n \rightarrow 0^+.$$

On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

On peut retrouver ce résultat sans utiliser aucune formule particulière. En posant

$$X = \frac{1}{x},$$

on a  $X \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , et

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \left( \frac{1}{X} \right) = -\frac{\ln X}{X}.$$

Or

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Ainsi,

$$x_n \ln(x_n) \rightarrow 0.$$

D'autre part,

$$x_n - 1 \rightarrow -1.$$

Par quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n \ln(x_n)}{x_n - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n} = 0.}$$

## Exercice 2

Soit  $\varphi$  une fonction dérivable sur  $[0, 1]$ , telle que  $\varphi'$  soit continue sur  $[0, 1]$ .

### 2. Montrer que $\varphi'$ est bornée sur $[0, 1]$

La fonction  $\varphi'$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ .

Or toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

La fonction

$$x \mapsto |\varphi'(x)|$$

est également continue sur  $[0, 1]$ .

Elle admet donc un maximum sur ce segment.

Posons

$$M = \max_{x \in [0, 1]} |\varphi'(x)|.$$

Alors

$$M \geq 0$$

et, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|\varphi'(x)| \leq M.$$

Si l'on veut choisir  $M$  strictement positif même dans le cas où  $\varphi'$  est identiquement nulle, on peut prendre

$$M = 1 + \max_{x \in [0, 1]} |\varphi'(x)|.$$

Dans tous les cas, il existe un réel  $M > 0$  tel que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |\varphi'(x)| \leq M.}$$

### 3. Montrer que $|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1 - x)$

Soit

$$x \in [0, 1].$$

Si  $x = 1$ , alors

$$|\varphi(1) - \varphi(1)| = 0$$

et

$$M(1 - 1) = 0.$$

L'inégalité est donc vérifiée.

Supposons maintenant que

$$0 \leq x < 1.$$

La fonction  $\varphi$  est continue sur  $[x, 1]$  et dérivable sur  $]x, 1[$ .

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c \in ]x, 1[$  tel que

$$\varphi(1) - \varphi(x) = \varphi'(c)(1 - x).$$

En prenant les valeurs absolues, on obtient

$$|\varphi(1) - \varphi(x)| = |\varphi'(c)| |1 - x|.$$

Comme  $x \leq 1$ ,

$$|1 - x| = 1 - x.$$

De plus,  $c \in [0, 1]$ , donc, d'après la question précédente,

$$|\varphi'(c)| \leq M.$$

Par conséquent,

$$|\varphi(1) - \varphi(x)| \leq M(1 - x).$$

Comme

$$|\varphi(1) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(1)|,$$

on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad |\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1 - x).}$$

#### 4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1)$

On veut comparer

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx$$

à  $\varphi(1)$ .

On écrit

$$\varphi(x) = (\varphi(x) - \varphi(1)) + \varphi(1).$$

Donc

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx + n \varphi(1) \int_0^1 x^n dx.$$

Or

$$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx + \frac{n}{n+1} \varphi(1).$$

Soustrayons  $\varphi(1)$  :

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) = n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx + \left( \frac{n}{n+1} - 1 \right) \varphi(1).$$

Or

$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n - (n+1)}{n+1} = -\frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) = n \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx - \frac{\varphi(1)}{n+1}.$$

En prenant les valeurs absolues et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) \right| \leq n \int_0^1 x^n |\varphi(x) - \varphi(1)| dx + \frac{|\varphi(1)|}{n+1}.$$

D'après la question 3,

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1 - x).$$

Donc

$$\left| n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) \right| \leq nM \int_0^1 x^n (1 - x) dx + \frac{|\varphi(1)|}{n+1}.$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n(1-x) dx = \int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 x^n(1-x) dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2 - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc

$$\left| n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) \right| \leq \frac{nM}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\varphi(1)|}{n+1}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nM}{(n+1)(n+2)} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\varphi(1)|}{n+1} = 0.$$

Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx - \varphi(1) \right| = 0.$$

Cela signifie que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1).}$$

## 5. Calcul des limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$

Les suites sont définies par

$$u_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+2t} dt$$

et

$$v_n = 2^{n+1} n \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \operatorname{Arctan}(2x) dx.$$

**Calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$**

On écrit

$$u_n = n \int_0^1 t^n \varphi(t) dt,$$

où

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+2t}.$$

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , et sa dérivée

$$\varphi'(t) = -\frac{2}{(1+2t)^2}$$

est continue sur  $[0, 1]$ .

On peut donc appliquer le résultat de la question 4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n \varphi(t) dt = \varphi(1).$$

Or

$$\varphi(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}.}$$

**Calcul de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$**

On a

$$v_n = 2^{n+1} n \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \operatorname{Arctan}(2x) dx.$$

Pour ramener l'intégrale à l'intervalle  $[0, 1]$ , on effectue le changement de variable

$$t = 2x.$$

Alors

$$x = \frac{t}{2}$$

et

$$dx = \frac{1}{2} dt.$$

Lorsque  $x = 0$ , on a  $t = 0$ , et lorsque  $x = \frac{1}{2}$ , on a  $t = 1$ .

Ainsi,

$$v_n = 2^{n+1} n \int_0^1 \left(\frac{t}{2}\right)^n \operatorname{Arctan}(t) \frac{dt}{2}.$$

Or

$$\left(\frac{t}{2}\right)^n = \frac{t^n}{2^n}.$$

Donc

$$v_n = 2^{n+1} n \int_0^1 \frac{t^n}{2^n} \operatorname{Arctan}(t) \frac{dt}{2}.$$

Les facteurs constants donnent

$$2^{n+1} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} = 1.$$

Par conséquent,

$$v_n = n \int_0^1 t^n \operatorname{Arctan}(t) dt.$$

On pose

$$\varphi(t) = \operatorname{Arctan}(t).$$

Cette fonction est dérivable sur  $[0, 1]$ , et

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

est continue sur  $[0, 1]$ .

On peut donc appliquer le résultat de la question 4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi(1).$$

Or

$$\varphi(1) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{4}.$$

Moulay ELMOUKRIE

# Corrigé détaillé – Exercice 3

## Nombres complexes

Soit

$$m \in \mathbb{C}^* \setminus \{1, -i\}.$$

### Partie I

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(E_m) : z^3 - (1 + (1 + i)m)z^2 + ((1 + i)m + im^2)z - im^2 = 0.$$

Pour simplifier les écritures, posons

$$P(z) = z^3 - (1 + (1 + i)m)z^2 + ((1 + i)m + im^2)z - im^2.$$

Ainsi, résoudre l'équation  $(E_m)$  revient à résoudre

$$P(z) = 0.$$

### 1. Montrer que 1 et $m$ sont des solutions de $(E_m)$

#### Vérification pour $z = 1$

Calculons  $P(1)$  :

$$P(1) = 1 - (1 + (1 + i)m) + ((1 + i)m + im^2) - im^2.$$

Développons :

$$P(1) = 1 - 1 - (1 + i)m + (1 + i)m + im^2 - im^2.$$

Les termes s'annulent deux à deux :

$$1 - 1 = 0,$$

$$-(1 + i)m + (1 + i)m = 0,$$

et

$$im^2 - im^2 = 0.$$

Par conséquent,

$$P(1) = 0.$$

Donc

$1 \text{ est une solution de l'équation } (E_m).$

## Vérification pour $z = m$

Calculons maintenant  $P(m)$  :

$$P(m) = m^3 - (1 + (1 + i)m)m^2 + ((1 + i)m + im^2)m - im^2.$$

Développons chaque produit :

$$(1 + (1 + i)m)m^2 = m^2 + (1 + i)m^3,$$

et

$$((1 + i)m + im^2)m = (1 + i)m^2 + im^3.$$

Ainsi,

$$P(m) = m^3 - m^2 - (1 + i)m^3 + (1 + i)m^2 + im^3 - im^2.$$

Regroupons les termes en  $m^3$  :

$$m^3 - (1 + i)m^3 + im^3 = (1 - (1 + i) + i)m^3.$$

Or

$$1 - (1 + i) + i = 1 - 1 - i + i = 0.$$

Donc tous les termes en  $m^3$  s'annulent.

Regroupons maintenant les termes en  $m^2$  :

$$-m^2 + (1 + i)m^2 - im^2 = (-1 + 1 + i - i)m^2 = 0.$$

Par conséquent,

$$P(m) = 0.$$

Donc

$m \text{ est une solution de l'équation } (E_m).$

## 2. En déduire l'ensemble des solutions de $(E_m)$

Nous savons que 1 et  $m$  sont deux racines du polynôme  $P$ .

Le moyen le plus simple consiste à remarquer que le polynôme peut être factorisé sous la forme

$$P(z) = (z - 1)(z - m)(z - im).$$

Vérifions cette factorisation.

On commence par développer

$$(z - m)(z - im).$$

On obtient

$$(z - m)(z - im) = z^2 - imz - mz + im^2.$$

Donc

$$(z - m)(z - im) = z^2 - (1 + i)mz + im^2.$$

Multiplions maintenant par  $z - 1$  :

$$(z - 1)(z - m)(z - im) = (z - 1)(z^2 - (1 + i)mz + im^2).$$

En développant,

$$(z - 1)(z - m)(z - im) = z(z^2 - (1 + i)mz + im^2) - (z^2 - (1 + i)mz + im^2).$$

Donc

$$(z - 1)(z - m)(z - im) = z^3 - (1 + i)mz^2 + im^2z - z^2 + (1 + i)mz - im^2.$$

Regroupons les termes de même degré :

$$(z - 1)(z - m)(z - im) = z^3 - (1 + (1 + i)m)z^2 + ((1 + i)m + im^2)z - im^2.$$

Il s'agit exactement du polynôme  $P(z)$ .

Ainsi,

$$P(z) = (z - 1)(z - m)(z - im).$$

L'équation  $(E_m)$  devient alors

$$(z - 1)(z - m)(z - im) = 0.$$

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc

$$z - 1 = 0$$

ou

$$z - m = 0$$

ou

$$z - im = 0.$$

Par conséquent,

$$z = 1, \quad z = m, \quad z = im.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$S_{(E_m)} = \{1, m, im\}.$$

Les hypothèses

$$m \neq 0, \quad m \neq 1, \quad m \neq -i$$

garantissent que ces trois solutions sont deux à deux distinctes.

En effet :

$$m \neq 1,$$

$$m \neq im$$

car  $m \neq 0$  et  $i \neq 1$ , et

$$im \neq 1$$

car cela donnerait

$$m = \frac{1}{i} = -i,$$

ce qui est exclu.

Moulay ELMOUKRIE

## Partie II

On suppose désormais que

$$m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, -1, 1\}$$

et

$$|m| = 1.$$

Comme

$$|m| = 1,$$

on a

$$m\bar{m} = |m|^2 = 1.$$

Puisque  $m \neq 0$ , on peut diviser par  $m$ , d'où

$$\boxed{\bar{m} = \frac{1}{m}.}$$

Cette relation sera utilisée plusieurs fois dans la suite.

## A

### A-1. Montrer les deux égalités demandées

#### Première égalité

On veut montrer que

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} - \frac{m+i}{1+im} = 0.$$

Autrement dit, on veut montrer que

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{m+i}{1+im}.$$

Le dénominateur  $1+im$  est non nul. En effet,

$$1+im = 0$$

entraînerait

$$im = -1,$$

puis

$$m = \frac{-1}{i} = i,$$

ce qui est exclu par les hypothèses.

On utilise la propriété

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}, \quad v \neq 0.$$

Ainsi,

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{\overline{m+i}}{\overline{1+im}}.$$

Or

$$\overline{m+i} = \overline{m} - i,$$

et

$$\overline{1+im} = 1 + \overline{i} \overline{m} = 1 - i\overline{m}.$$

Donc

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{\overline{m} - i}{1 - i\overline{m}}.$$

Comme

$$\overline{m} = \frac{1}{m},$$

on obtient

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{\frac{1}{m} - i}{1 - \frac{i}{m}}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par  $m$  :

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} = \frac{1 - im}{m - i}.$$

Or

$$1 - im = -i(m + i),$$

car

$$-i(m + i) = -im - i^2 = 1 - im.$$

De même,

$$1 + im = i(m - i),$$

car

$$i(m - i) = im - i^2 = 1 + im.$$

Ainsi,

$$\frac{1 - im}{m - i} = \frac{-i(m + i)}{m - i}.$$

D'autre part,

$$\frac{m+i}{1+im} = \frac{m+i}{i(m-i)} = \frac{1}{i} \frac{m+i}{m-i}.$$

Comme

$$\frac{1}{i} = -i,$$

on a

$$\frac{m+i}{1+im} = -i \frac{m+i}{m-i}.$$

On obtient donc bien

$$\overline{\left( \frac{m+i}{1+im} \right)} = \frac{m+i}{1+im}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overline{\left( \frac{m+i}{1+im} \right)} - \frac{m+i}{1+im} = 0.}$$

Cette égalité montre en particulier que le nombre

$$\boxed{\frac{m+i}{1+im}}$$

est un nombre réel, puisqu'un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

## Deuxième égalité

On veut montrer que

$$\frac{\overline{m}+1}{\overline{m}-1} + \frac{m+1}{m-1} = 0.$$

Les dénominateurs sont non nuls, puisque  $m \neq 1$ , et donc  $\overline{m} \neq 1$ .

En utilisant

$$\overline{m} = \frac{1}{m},$$

on obtient

$$\frac{\overline{m}+1}{\overline{m}-1} = \frac{\frac{1}{m}+1}{\frac{1}{m}-1}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par  $m$  :

$$\frac{\overline{m}+1}{\overline{m}-1} = \frac{1+m}{1-m}.$$

Or

$$1-m = -(m-1).$$

Donc

$$\frac{1+m}{1-m} = -\frac{m+1}{m-1}.$$

Ainsi,

$$\frac{\overline{m}+1}{\overline{m}-1} = -\frac{m+1}{m-1}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{\overline{m} + 1}{\overline{m} - 1} + \frac{m + 1}{m - 1} = 0.}$$

Remarquons maintenant que

$$\overline{\left(\frac{m + 1}{m - 1}\right)} = \frac{\overline{m} + 1}{\overline{m} - 1}.$$

L'égalité précédente donne donc

$$\overline{\left(\frac{m + 1}{m - 1}\right)} = -\frac{m + 1}{m - 1}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{m + 1}{m - 1} \text{ est un imaginaire pur.}}$$

En effet, un nombre complexe  $Z$  est imaginaire pur si et seulement si

$$\overline{Z} = -Z.$$

## A-2. Montrer que $(1 + i)\frac{m - 1}{m + i}$ est un imaginaire pur

Posons

$$Z = (1 + i)\frac{m - 1}{m + i}.$$

Le dénominateur  $m + i$  est non nul puisque  $m \neq -i$ .

Pour montrer que  $Z$  est un imaginaire pur, il suffit de montrer que

$$\overline{Z} = -Z.$$

Calculons  $\overline{Z}$  :

$$\overline{Z} = \overline{1 + i} \overline{\left(\frac{m - 1}{m + i}\right)}.$$

Or

$$\overline{1 + i} = 1 - i.$$

Donc

$$\overline{Z} = (1 - i)\frac{\overline{m} - 1}{\overline{m} - i}.$$

Comme

$$\overline{m} = \frac{1}{m},$$

on obtient

$$\overline{Z} = (1 - i)\frac{\frac{1}{m} - 1}{\frac{1}{m} - i}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par  $m$  :

$$\overline{Z} = (1 - i) \frac{1 - m}{1 - im}.$$

Or

$$1 - m = -(m - 1)$$

et

$$1 - im = -i(m + i).$$

Donc

$$\overline{Z} = (1 - i) \frac{-(m - 1)}{-i(m + i)}.$$

Les deux signes négatifs s'annulent :

$$\overline{Z} = \frac{1 - i}{i} \frac{m - 1}{m + i}.$$

Calculons

$$\frac{1 - i}{i}.$$

On a

$$\frac{1 - i}{i} = \frac{1}{i} - \frac{i}{i} = -i - 1 = -(1 + i).$$

Donc

$$\overline{Z} = -(1 + i) \frac{m - 1}{m + i}.$$

Comme

$$Z = (1 + i) \frac{m - 1}{m + i},$$

on obtient

$$\overline{Z} = -Z.$$

Par conséquent,

|                                                      |
|------------------------------------------------------|
| $(1 + i) \frac{m - 1}{m + i}$ est un imaginaire pur. |
|------------------------------------------------------|

## B. Interprétation géométrique

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C, E, F$  d'affixes respectives :

$$a = m, \quad b = 1, \quad c = im,$$

$$e = \frac{1}{2}(1+i)(m-i),$$

et

$$f = \frac{1}{2}(1+i)(1+m).$$

On rappelle les deux critères géométriques suivants.

Pour quatre points  $M, N, P, Q$ , d'affixes respectives  $m, n, p, q$ , avec les dénominateurs non nuls :

$$\frac{m-n}{p-q} \in \mathbb{R}$$

signifie que les vecteurs correspondants sont colinéaires.

De même,

$$\frac{m-n}{p-q} \in i\mathbb{R}$$

signifie que les vecteurs correspondants sont perpendiculaires.

**B-1-a. Montrer que**  $\frac{e-c}{e-b} = -i \frac{m+1}{m-1}$

On commence par calculer  $e$ .

On a

$$e = \frac{1}{2}(1+i)(m-i).$$

Développons :

$$(1+i)(m-i) = (1+i)m - i(1+i).$$

Or

$$i(1+i) = i + i^2 = i - 1.$$

Donc

$$-i(1+i) = 1 - i.$$

Ainsi,

$$e = \frac{1}{2}((1+i)m + 1 - i).$$

Calculons maintenant  $e - c$ .

Comme

$$c = im,$$

on a

$$\begin{aligned} e - c &= \frac{1}{2}((1+i)m + 1 - i) - im \\ &= \frac{1}{2}((1+i)m + 1 - i - 2im). \end{aligned}$$

Or

$$(1+i)m - 2im = (1-i)m.$$

Donc

$$e - c = \frac{1}{2}((1-i)m + 1 - i).$$

On factorise par  $1 - i$  :

$$e - c = \frac{1}{2}(1-i)(m+1).$$

Calculons maintenant  $e - b$ .

Comme

$$b = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} e - b &= \frac{1}{2}((1+i)m + 1 - i) - 1 \\ &= \frac{1}{2}((1+i)m + 1 - i - 2) \\ &= \frac{1}{2}((1+i)m - 1 - i). \end{aligned}$$

On factorise par  $1 + i$  :

$$e - b = \frac{1}{2}(1+i)(m-1).$$

Ainsi,

$$\frac{e - c}{e - b} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)(m+1)}{\frac{1}{2}(1+i)(m-1)}.$$

Les facteurs  $\frac{1}{2}$  s'annulent :

$$\frac{e - c}{e - b} = \frac{1 - i}{1 + i} \frac{m + 1}{m - 1}.$$

Calculons

$$\frac{1 - i}{1 + i}.$$

On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par  $1 - i$  :

$$\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)}.$$

Or

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i,$$

et

$$(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2.$$

Donc

$$\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{e - c}{e - b} = -i \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right)}.$$

### B-1-b. En déduire que $E \in (BC)$

D'après la question A-1,

$$\frac{m + 1}{m - 1}$$

est un imaginaire pur.

Il existe donc un réel  $\lambda$  tel que

$$\frac{m + 1}{m - 1} = i\lambda.$$

Alors

$$-i \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right) = -i(i\lambda).$$

Comme

$$-i^2 = 1,$$

on obtient

$$-i(i\lambda) = \lambda.$$

Donc

$$-i \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right) \in \mathbb{R}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{e - c}{e - b} = -i \left( \frac{m + 1}{m - 1} \right).$$

Par conséquent,

$$\frac{e - c}{e - b} \in \mathbb{R}.$$

Cela signifie que les vecteurs

$$\overrightarrow{EC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EB}$$

sont colinéaires.

Les points  $E$ ,  $C$  et  $B$  sont donc alignés.

Ainsi,

$$\boxed{E \in (BC).}$$

**B-2-a. Montrer que**  $\frac{e - a}{c - b} = \frac{1}{2}(1 + i)\frac{m - 1}{m + i}$

On a

$$e = \frac{1}{2}(1 + i)(m - i)$$

et

$$a = m.$$

Donc

$$e - a = \frac{1}{2}(1 + i)(m - i) - m.$$

On met au même dénominateur :

$$e - a = \frac{1}{2}((1 + i)(m - i) - 2m).$$

Développons :

$$(1 + i)(m - i) = (1 + i)m + 1 - i.$$

Donc

$$e - a = \frac{1}{2}((1 + i)m + 1 - i - 2m).$$

Or

$$(1 + i)m - 2m = (-1 + i)m.$$

Ainsi,

$$e - a = \frac{1}{2}((-1 + i)m + 1 - i).$$

On remarque que

$$(-1 + i)m + 1 - i = (i - 1)(m - 1).$$

En effet,

$$(i - 1)(m - 1) = (i - 1)m - (i - 1) = (i - 1)m + 1 - i.$$

Donc

$$e - a = \frac{1}{2}(i - 1)(m - 1).$$

D'autre part,

$$c - b = im - 1.$$

Or

$$i(m + i) = im + i^2 = im - 1.$$

Donc

$$c - b = i(m + i).$$

Ainsi,

$$\frac{e - a}{c - b} = \frac{\frac{1}{2}(i - 1)(m - 1)}{i(m + i)}.$$

Donc

$$\frac{e - a}{c - b} = \frac{1}{2} \frac{i - 1}{i} \frac{m - 1}{m + i}.$$

Calculons

$$\frac{i - 1}{i}.$$

On a

$$\frac{i - 1}{i} = \frac{i}{i} - \frac{1}{i} = 1 - (-i) = 1 + i.$$

Par conséquent,

$$\frac{e - a}{c - b} = \frac{1}{2}(1 + i) \left( \frac{m - 1}{m + i} \right).$$

## B-2-b. En déduire que $(AE) \perp (BC)$

D'après la question A-2,

$$(1 + i) \frac{m - 1}{m + i}$$

est un imaginaire pur.

En multipliant ce nombre par le réel  $\frac{1}{2}$ , on obtient encore un imaginaire pur.

Donc

$$\frac{1}{2}(1 + i) \frac{m - 1}{m + i} \in i\mathbb{R}.$$

D'après la question précédente,

$$\frac{e - a}{c - b} = \frac{1}{2}(1 + i) \frac{m - 1}{m + i}.$$

Ainsi,

$$\frac{e-a}{c-b} \in i\mathbb{R}.$$

Or

$$e-a$$

est l'afixe du vecteur

$$\overrightarrow{AE},$$

et

$$c-b$$

est l'afixe du vecteur

$$\overrightarrow{BC}.$$

Le quotient des affixes de ces deux vecteurs est un imaginaire pur. Les vecteurs  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont donc orthogonaux.

Par conséquent,

$$\boxed{(AE) \perp (BC).}$$

Comme  $E \in (BC)$ , on peut également en déduire que

$$\boxed{(AE) \perp (EC).}$$

Ainsi, le triangle  $AEC$  est rectangle en  $E$ , et

$$\boxed{\widehat{AEC} = \frac{\pi}{2}.}$$

**B-3-a. Montrer que**  $\frac{f-c}{f-a} = -i \frac{m+i}{1+im}$

On a

$$f = \frac{1}{2}(1+i)(1+m).$$

Calculons d'abord  $f-c$ .

Comme

$$c = im,$$

on obtient

$$f-c = \frac{1}{2}(1+i)(1+m) - im.$$

On met au même dénominateur :

$$f-c = \frac{1}{2}((1+i)(1+m) - 2im).$$

Développons :

$$(1+i)(1+m) = 1+i+(1+i)m.$$

Donc

$$f-c = \frac{1}{2}(1+i+(1+i)m-2im).$$

Or

$$(1+i)m-2im = (1-i)m.$$

Ainsi,

$$f-c = \frac{1}{2}(1+i+(1-i)m).$$

On remarque que

$$1+i+(1-i)m = (1-i)(m+i).$$

En effet,

$$(1-i)(m+i) = (1-i)m+i-i^2 = (1-i)m+1+i.$$

Donc

$$f-c = \frac{1}{2}(1-i)(m+i).$$

Calculons maintenant  $f-a$ .

Comme

$$a = m,$$

on a

$$f-a = \frac{1}{2}(1+i)(1+m)-m.$$

Donc

$$f-a = \frac{1}{2}((1+i)(1+m)-2m).$$

En développant,

$$f-a = \frac{1}{2}(1+i+(1+i)m-2m).$$

Or

$$(1+i)m-2m = (-1+i)m.$$

Donc

$$f-a = \frac{1}{2}(1+i+(-1+i)m).$$

On remarque que

$$1+i+(-1+i)m = (1+i)(1+im).$$

En effet,

$$\begin{aligned}(1+i)(1+im) &= 1+i+im+i^2m \\ &= 1+i+im-m \\ &= 1+i+(-1+i)m.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f-a = \frac{1}{2}(1+i)(1+im).$$

On peut maintenant calculer le quotient :

$$\frac{f-c}{f-a} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)(m+i)}{\frac{1}{2}(1+i)(1+im)}.$$

Les facteurs  $\frac{1}{2}$  s'annulent :

$$\frac{f-c}{f-a} = \frac{1-i}{1+i} \frac{m+i}{1+im}.$$

Or nous avons déjà montré que

$$\frac{1-i}{1+i} = -i.$$

Donc

$$\frac{f-c}{f-a} = -i \left( \frac{m+i}{1+im} \right).$$

### B-3-b. En déduire que $A, E, C, F$ sont cocycliques

D'après la question A-1,

$$\frac{m+i}{1+im}$$

est un nombre réel.

Il existe donc un réel  $\mu$  tel que

$$\frac{m+i}{1+im} = \mu.$$

D'après la question 3-a,

$$\frac{f-c}{f-a} = -i\mu.$$

Le nombre  $-i\mu$  est un imaginaire pur. Donc

$$\frac{f-c}{f-a} \in i\mathbb{R}.$$

Cela signifie que les vecteurs

$$\overrightarrow{FC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FA}$$

sont perpendiculaires.

Ainsi,

$$(FC) \perp (FA).$$

Le triangle  $AFC$  est donc rectangle en  $F$ , et

$$\widehat{AFC} = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, nous avons montré à la question 2-b que

$$(AE) \perp (BC).$$

Comme

$$E \in (BC),$$

les droites  $(EC)$  et  $(BC)$  sont confondues. Donc

$$(AE) \perp (EC).$$

Ainsi, le triangle  $AEC$  est rectangle en  $E$ , et

$$\widehat{AEC} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc

$$\widehat{AEC} = \widehat{AFC} = \frac{\pi}{2}.$$

Les points  $E$  et  $F$  voient donc le segment  $[AC]$  sous un angle droit.

D'après la propriété du cercle de diamètre  $[AC]$ , tout point  $M$  tel que

$$\widehat{AMC} = \frac{\pi}{2}$$

appartient au cercle de diamètre  $[AC]$ .

Ainsi,  $E$  et  $F$  appartiennent tous les deux au cercle de diamètre  $[AC]$ .

Les quatre points  $A, E, C, F$  appartiennent donc à un même cercle.

Par conséquent,

$$A, E, C \text{ et } F \text{ sont cocycliques.}$$

# Corrigé détaillé – Exercice 4

## Arithmétique

### Partie I

On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation

$$(E) : \quad 5x - 6y = 2.$$

### 1. Résolution de l'équation $(E)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

On veut montrer que l'ensemble des solutions de l'équation

$$5x - 6y = 2$$

est

$$\{(4 + 6k, 3 + 5k) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

### Recherche d'une solution particulière

On cherche d'abord un couple d'entiers  $(x_0, y_0)$  vérifiant

$$5x_0 - 6y_0 = 2.$$

On remarque que

$$5 \times 4 - 6 \times 3 = 20 - 18 = 2.$$

Ainsi,

$$(x_0, y_0) = (4, 3)$$

est une solution particulière de l'équation  $(E)$ .

### Détermination de toutes les solutions

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution quelconque de  $(E)$ . On a donc

$$5x - 6y = 2.$$

Comme le couple  $(4, 3)$  est également solution, on a

$$5 \times 4 - 6 \times 3 = 2.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient

$$(5x - 6y) - (5 \times 4 - 6 \times 3) = 0.$$

Donc

$$5x - 20 - 6y + 18 = 0.$$

Ainsi,

$$5(x - 4) - 6(y - 3) = 0.$$

Par conséquent,

$$5(x - 4) = 6(y - 3).$$

On a donc

$$6 \mid 5(x - 4).$$

Or

$$\gcd(5, 6) = 1.$$

D'après le théorème de Gauss, puisque 6 divise  $5(x - 4)$  et que 5 et 6 sont premiers entre eux, alors

$$6 \mid (x - 4).$$

Il existe donc un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$x - 4 = 6k.$$

Ainsi,

$$x = 4 + 6k.$$

En remplaçant dans

$$5(x - 4) = 6(y - 3),$$

on obtient

$$5(6k) = 6(y - 3).$$

Donc

$$30k = 6(y - 3).$$

En divisant par 6,

$$y - 3 = 5k.$$

Ainsi,

$$y = 3 + 5k.$$

Par conséquent, toute solution de  $(E)$  est de la forme

$$(x, y) = (4 + 6k, 3 + 5k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Vérification réciproque

Réciproquement, soit  $k \in \mathbb{Z}$  et considérons le couple

$$(x, y) = (4 + 6k, 3 + 5k).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} 5x - 6y &= 5(4 + 6k) - 6(3 + 5k) \\ &= 20 + 30k - 18 - 30k \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc tout couple de la forme

$$(4 + 6k, 3 + 5k)$$

est bien une solution de l'équation  $(E)$ .

Finalement,

$$S_{(E)} = \{(4 + 6k, 3 + 5k) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

## 2-a. Valeurs possibles de $d = \gcd(x, y)$

Soit  $(x, y)$  une solution de l'équation  $(E)$ , et soit

$$d = \gcd(x, y).$$

Par définition du plus grand commun diviseur,

$$d \mid x \quad \text{et} \quad d \mid y.$$

Donc

$$d \mid 5x$$

et

$$d \mid 6y.$$

Par conséquent,  $d$  divise toute combinaison linéaire entière de  $5x$  et  $6y$ . En particulier,

$$d \mid (5x - 6y).$$

Or, puisque  $(x, y)$  est une solution de  $(E)$ ,

$$5x - 6y = 2.$$

Donc

$$d \mid 2.$$

Comme  $d$  est un entier naturel strictement positif, les seuls diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2. Ainsi,

$$d \in \{1, 2\}.$$

## 2-b. Déterminer les couples $(x, y)$ pour lesquels $d = 1$

D'après la question 1, toute solution de  $(E)$  est de la forme

$$x = 4 + 6k, \quad y = 3 + 5k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons étudier la parité de  $x$  et de  $y$  selon la parité de  $k$ .

### Premier cas : $k$ est pair

Supposons que  $k$  soit pair.

Il existe alors un entier  $q \in \mathbb{Z}$  tel que

$$k = 2q.$$

On obtient

$$x = 4 + 6(2q) = 4 + 12q.$$

Le nombre  $x$  est donc pair.

D'autre part,

$$y = 3 + 5(2q) = 3 + 10q.$$

Le nombre  $10q$  est pair, donc  $3 + 10q$  est impair. Ainsi,

$y$  est impair.

Comme  $x$  est pair et  $y$  est impair, leur plus grand commun diviseur ne peut pas être égal à 2.  
Or, d'après la question précédente,

$$d \in \{1, 2\}.$$

Puisque  $d \neq 2$ , on en déduit nécessairement

$$d = 1.$$

Ainsi, lorsque  $k$  est pair, on a

$$\gcd(x, y) = 1.$$

## Deuxième cas : $k$ est impair

Supposons que  $k$  soit impair.

Il existe alors un entier  $q \in \mathbb{Z}$  tel que

$$k = 2q + 1.$$

On a

$$\begin{aligned} x &= 4 + 6(2q + 1) \\ &= 4 + 12q + 6 \\ &= 10 + 12q \\ &= 2(5 + 6q). \end{aligned}$$

Donc  $x$  est pair.

De même,

$$\begin{aligned} y &= 3 + 5(2q + 1) \\ &= 3 + 10q + 5 \\ &= 8 + 10q \\ &= 2(4 + 5q). \end{aligned}$$

Donc  $y$  est également pair.

Ainsi,

$$2 \mid x \quad \text{et} \quad 2 \mid y.$$

Par conséquent,

$$2 \mid \gcd(x, y).$$

Or

$$d \in \{1, 2\}.$$

Donc, dans ce cas,

$$d = 2.$$

## Conclusion

On a montré que

$$d = 1 \iff k \text{ est pair.}$$

En posant

$$k = 2q, \quad q \in \mathbb{Z},$$

on obtient

$$x = 4 + 12q$$

et

$$y = 3 + 10q.$$

Par conséquent, les couples solutions de  $(E)$  pour lesquels  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux sont

$$\boxed{\{(4 + 12q, 3 + 10q) ; q \in \mathbb{Z}\} .}$$

Moulay ELMOUKRIE

## Partie II

Soient

$$n \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{N}.$$

On considère l'écriture de  $n$  dans le système de numération de base  $b$  :

$$n = \sum_{i=0}^p a_i b^i,$$

où

$$a_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_i < b$$

et

$$a_p \neq 0.$$

On pose

$$S_b(n) = \sum_{i=0}^p a_i.$$

Le nombre  $S_b(n)$  est la somme des chiffres représentant  $n$  dans le système de numération de base  $b$ .

### 1. Montrer que $S_b(n) \equiv n \pmod{b-1}$

On a

$$n = \sum_{i=0}^p a_i b^i.$$

Comme

$$b \equiv 1 \pmod{b-1},$$

on obtient, pour tout entier naturel  $i$ ,

$$b^i \equiv 1^i \pmod{b-1}.$$

Donc

$$b^i \equiv 1 \pmod{b-1}.$$

Par conséquent,

$$a_i b^i \equiv a_i \pmod{b-1}.$$

En additionnant ces congruences pour

$$i = 0, 1, \dots, p,$$

on obtient

$$\sum_{i=0}^p a_i b^i \equiv \sum_{i=0}^p a_i \pmod{b-1}.$$

Or

$$\sum_{i=0}^p a_i b^i = n$$

et

$$\sum_{i=0}^p a_i = S_b(n).$$

Donc

$$n \equiv S_b(n) \pmod{b-1}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{S_b(n) \equiv n \pmod{b-1}.$$

## 2-a. Montrer que $n \equiv 0 \pmod{4}$ et $n \equiv 3 \pmod{5}$

On suppose que le couple

$$(S_5(n), S_6(n))$$

est une solution de l'équation

$$5x - 6y = 2$$

et que les nombres  $S_5(n)$  et  $S_6(n)$  sont premiers entre eux.

Posons

$$x = S_5(n) \quad \text{et} \quad y = S_6(n).$$

Le couple  $(x, y)$  est donc une solution de  $(E)$ , et

$$\gcd(x, y) = 1.$$

D'après la question 2-b de la Partie I, les solutions de  $(E)$  dont les deux composantes sont premières entre elles sont de la forme

$$x = 4 + 12q, \quad y = 3 + 10q, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi,

$$S_5(n) = 4 + 12q.$$

Comme

$$4 + 12q = 4(1 + 3q),$$

on a

$$S_5(n) \equiv 0 \pmod{4}.$$

D'après la question 1, appliquée à la base 5, on a

$$S_5(n) \equiv n \pmod{5-1}.$$

Donc

$$S_5(n) \equiv n \pmod{4}.$$

Comme

$$S_5(n) \equiv 0 \pmod{4},$$

on en déduit

$$\boxed{n \equiv 0 \pmod{4}}.$$

D'autre part,

$$S_6(n) = 3 + 10q.$$

Comme

$$10q \equiv 0 \pmod{5},$$

on a

$$S_6(n) \equiv 3 \pmod{5}.$$

D'après la question 1, appliquée à la base 6, on a

$$S_6(n) \equiv n \pmod{6-1}.$$

Donc

$$S_6(n) \equiv n \pmod{5}.$$

Comme

$$S_6(n) \equiv 3 \pmod{5},$$

on obtient

$$n \equiv 3 \pmod{5}.$$

Finalement,

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \equiv 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

## 2-b. En déduire que $n \equiv 8 \pmod{20}$

On part du système

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \equiv 3 \pmod{5}. \end{cases}$$

La première congruence signifie que  $n$  est un multiple de 4.

Il existe donc un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$n = 4k.$$

On remplace cette expression dans la deuxième congruence :

$$4k \equiv 3 \pmod{5}.$$

Or

$$4 \equiv -1 \pmod{5}.$$

Donc

$$-k \equiv 3 \pmod{5}.$$

En multipliant les deux membres par  $-1$ , on obtient

$$k \equiv -3 \pmod{5}.$$

Or

$$-3 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Donc

$$k \equiv 2 \pmod{5}.$$

Cela signifie qu'il existe un entier  $q \in \mathbb{Z}$  tel que

$$k = 5q + 2.$$

Ainsi,

$$n = 4k = 4(5q + 2).$$

Donc

$$n = 20q + 8.$$

Par conséquent,

$$n \equiv 8 \pmod{20}.$$

On peut également vérifier ce résultat en examinant les multiples de 4 modulo 20 :

$$0, \quad 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16.$$

Parmi ces nombres, le seul qui soit congru à 3 modulo 5 est 8, car

$$8 \equiv 3 \pmod{5}.$$

On retrouve donc

$$n \equiv 8 \pmod{20}.$$

### 3-a. Calcul de $S_5(28)$ et $S_6(28)$

#### Calcul de $S_5(28)$

Pour calculer  $S_5(28)$ , on écrit 28 en base 5.

Les puissances de 5 utiles sont

$$5^0 = 1, \quad 5^1 = 5, \quad 5^2 = 25.$$

On effectue la division de 28 par 25 :

$$28 = 1 \times 25 + 3.$$

Comme

$$3 = 0 \times 5 + 3,$$

on obtient

$$28 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 3.$$

Ainsi, l'écriture de 28 en base 5 est

$$28 = (103)_5.$$

La somme de ses chiffres est donc

$$S_5(28) = 1 + 0 + 3.$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_5(28) = 4.}$$

#### Calcul de $S_6(28)$

Pour calculer  $S_6(28)$ , on écrit 28 en base 6.

On effectue la division euclidienne de 28 par 6 :

$$28 = 4 \times 6 + 4.$$

Ainsi,

$$28 = 4 \times 6^1 + 4 \times 6^0.$$

L'écriture de 28 en base 6 est donc

$$28 = (44)_6.$$

La somme de ses chiffres est

$$S_6(28) = 4 + 4.$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_6(28) = 8.}$$

Finalement,

$$\boxed{(S_5(28), S_6(28)) = (4, 8).}$$

### 3-b. Le couple $(S_5(28), S_6(28))$ est-il solution de $(E)$ ?

On a trouvé

$$S_5(28) = 4$$

et

$$S_6(28) = 8.$$

Le couple à tester est donc

$$(4, 8).$$

Pour qu'il soit solution de l'équation

$$5x - 6y = 2,$$

il faudrait que

$$5 \times 4 - 6 \times 8 = 2.$$

Calculons :

$$5 \times 4 - 6 \times 8 = 20 - 48.$$

Donc

$$5 \times 4 - 6 \times 8 = -28.$$

Or

$$-28 \neq 2.$$

Par conséquent, le couple  $(4, 8)$  n'est pas une solution de l'équation  $(E)$ .

Ainsi,

|                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------|
| $(S_5(28), S_6(28))$ n'est pas une solution de l'équation $(E)$ . |
|-------------------------------------------------------------------|

#### Remarque importante :

La congruence

$$n \equiv 8 \pmod{20}$$

obtenue à la question 2-b est une *condition nécessaire* pour que

$$(S_5(n), S_6(n))$$

soit une solution de  $(E)$  avec  $S_5(n)$  et  $S_6(n)$  premiers entre eux.

Cela ne signifie pas que tout entier  $n$  vérifiant

$$n \equiv 8 \pmod{20}$$

convient nécessairement.

En effet,

$$28 \equiv 8 \pmod{20},$$

mais le couple

$$(S_5(28), S_6(28)) = (4, 8)$$

n'est pas solution de  $(E)$ .

La réciproque est donc fausse.

# Corrigé détaillé – Exercice 4 – Partie III

## Probabilités

### Énoncé et rappel

On considère une urne contenant 25 boules numérotées de 1 à 25, indiscernables au toucher.

On tire successivement, avec remise, deux boules de cette urne.

On note

$$(x, y)$$

le couple obtenu, où :

—  $x$  est le numéro de la première boule tirée ;

—  $y$  est le numéro de la deuxième boule tirée.

On considère l'événement

$$V : \quad \text{« le couple } (x, y) \text{ obtenu est une solution de l'équation } (E) \text{ »,}$$

où

$$(E) : \quad 5x - 6y = 2.$$

D'après la Partie I, l'ensemble des solutions entières de l'équation  $(E)$  est

$$\{(4 + 6k, 3 + 5k) ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

## 1. Calcul de la probabilité de l'événement $V$

### Détermination de l'univers

À chaque tirage, on peut obtenir l'un des 25 numéros

$$1, 2, \dots, 25.$$

Le premier tirage donne 25 possibilités.

Comme le tirage se fait avec remise, la boule tirée en premier est remise dans l'urne avant le deuxième tirage. Le deuxième tirage donne donc également 25 possibilités.

Le résultat de l'expérience est un couple ordonné

$$(x, y).$$

Il est important de préciser que l'ordre compte : par exemple,

$$(4, 3) \neq (3, 4),$$

car  $x$  représente le numéro de la première boule et  $y$  celui de la deuxième boule.

Le nombre total de couples possibles est donc

$$25 \times 25 = 625.$$

Ainsi,

$$\boxed{|\Omega| = 625.}$$

Comme les boules sont indiscernables au toucher et que chaque boule a la même probabilité d'être tirée, les 625 couples sont équiprobables.

## Détermination des couples favorables

L'événement  $V$  est réalisé lorsque le couple  $(x, y)$  vérifie

$$5x - 6y = 2.$$

D'après la Partie I, les solutions entières sont données par

$$x = 4 + 6k$$

et

$$y = 3 + 5k,$$

où

$$k \in \mathbb{Z}.$$

Cependant, les numéros des boules sont compris entre 1 et 25. On doit donc imposer

$$1 \leq x \leq 25$$

et

$$1 \leq y \leq 25.$$

En remplaçant  $x$  par  $4 + 6k$ , on obtient

$$1 \leq 4 + 6k \leq 25.$$

Cette double inégalité donne

$$1 \leq 4 + 6k$$

et

$$4 + 6k \leq 25.$$

La première inégalité donne

$$6k \geq -3,$$

donc

$$k \geq -\frac{1}{2}.$$

La deuxième inégalité donne

$$6k \leq 21,$$

donc

$$k \leq \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}.$$

Comme  $k$  est un entier, on obtient

$$k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Vérifions également la condition portant sur  $y$ .

On doit avoir

$$1 \leq 3 + 5k \leq 25.$$

Cela donne

$$1 \leq 3 + 5k$$

et

$$3 + 5k \leq 25.$$

La première inégalité donne

$$5k \geq -2,$$

donc

$$k \geq -\frac{2}{5}.$$

La deuxième inégalité donne

$$5k \leq 22,$$

donc

$$k \leq \frac{22}{5}.$$

Ainsi,

$$-\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{22}{5}.$$

Comme  $k \in \mathbb{Z}$ , cette condition donne

$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pour que les deux conditions sur  $x$  et  $y$  soient satisfaites simultanément, il faut donc

$$k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Calculons les couples correspondants.

**Pour**  $k = 0$

$$x = 4 + 6 \times 0 = 4$$

et

$$y = 3 + 5 \times 0 = 3.$$

On obtient

$$(4, 3).$$

**Pour**  $k = 1$

$$x = 4 + 6 = 10$$

et

$$y = 3 + 5 = 8.$$

On obtient

$$(10, 8).$$

**Pour**  $k = 2$

$$x = 4 + 12 = 16$$

et

$$y = 3 + 10 = 13.$$

On obtient

$$(16, 13).$$

Pour  $k = 3$

$$x = 4 + 18 = 22$$

et

$$y = 3 + 15 = 18.$$

On obtient

$$(22, 18).$$

Les couples favorables sont donc

$$(4, 3), \quad (10, 8), \quad (16, 13), \quad (22, 18).$$

Il y a donc exactement 4 issues favorables.

Ainsi,

$$|V| = 4.$$

## Calcul de la probabilité

Puisque les 625 couples possibles sont équiprobables, on a

$$P(V) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}.$$

Donc

$$P(V) = \frac{4}{625}.$$

Or

$$625 = 5^4$$

et

$$\frac{4}{625} = 0,0064.$$

De plus,

$$0,0064 = 64 \times 10^{-4}.$$

Par conséquent,

$$P(V) = \frac{4}{625} = 0,0064 = 64 \times 10^{-4}.$$

Ainsi, en notant

$$p = P(V),$$

on obtient bien

$$p = 64 \times 10^{-4}.$$

## 2. Probabilité que l'événement $V$ se réalise exactement deux fois

On répète l'expérience précédente 10 fois successivement.

Après chaque expérience, les deux boules tirées sont remises dans l'urne.

## Pourquoi s'agit-il d'un schéma de Bernoulli ?

À chaque répétition, il n'y a que deux résultats possibles relativement à l'événement étudié :

- l'événement  $V$  se réalise : c'est un succès ;
- l'événement  $V$  ne se réalise pas : c'est un échec.

La probabilité du succès reste constante à chaque répétition, car les boules sont remises dans l'urne après chaque expérience.

Elle vaut

$$p = P(V) = 64 \times 10^{-4}.$$

La probabilité de l'échec vaut donc

$$1 - p = 1 - 64 \times 10^{-4}.$$

De plus, grâce à la remise, les différentes répétitions sont indépendantes : le résultat d'une expérience ne modifie pas les probabilités des expériences suivantes.

On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres

$$n = 10 \quad \text{et} \quad p = 64 \times 10^{-4}.$$

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement  $V$  au cours des 10 expériences.

Alors

$X$

suit une loi binomiale de paramètres

$$10 \quad \text{et} \quad p = 64 \times 10^{-4}.$$

On écrit

$$X \sim \mathcal{B}(10, 64 \times 10^{-4}).$$

## Calcul de la probabilité de deux réalisations exactement

On cherche

$$P(X = 2).$$

Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale

$$\mathcal{B}(n, p),$$

on a

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Ici,

$$n = 10 \quad \text{et} \quad k = 2.$$

Donc

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1 - p)^8.$$

Calculons le coefficient binomial :

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! 8!}.$$

Ainsi,

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45.$$

Comme

$$p = 64 \times 10^{-4},$$

on obtient

$$P(X = 2) = 45 \left(64 \times 10^{-4}\right)^2 \left(1 - 64 \times 10^{-4}\right)^8.$$

Par conséquent,

$$P(X = 2) = 45 \left(64 \times 10^{-4}\right)^2 \left(1 - 64 \times 10^{-4}\right)^8.$$

Le développement numérique n'étant pas demandé, cette expression est la réponse exacte attendue.

À titre indicatif seulement, on a

$$P(X = 2) \approx 0,0017509.$$

En pourcentage,

$$P(X = 2) \approx 0,1751\%.$$

Mais la forme exacte demandée est

$$45 \left(64 \times 10^{-4}\right)^2 \left(1 - 64 \times 10^{-4}\right)^8.$$

## Corrigé détaillé – Exercice 5

### Structures algébriques

On rappelle que

$$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$$

est un anneau unitaire non commutatif, dont l'élément nul est

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et dont l'élément unité est

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Ainsi,

$$a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1.$$

Pour tout réel  $x$ , on pose

$$M(x) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble

$$E = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

### 1. Montrer que $E$ est stable pour le produit matriciel

Pour montrer que  $E$  est stable pour le produit matriciel, il faut vérifier que le produit de deux éléments quelconques de  $E$  appartient encore à  $E$ .

Soient donc

$$M(x) \in E \quad \text{et} \quad M(y) \in E,$$

avec

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

On a

$$M(x) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}$$

et

$$M(y) = \begin{pmatrix} a^y & a^y - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^y \end{pmatrix}.$$

Calculons leur produit :

$$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^y & a^y - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^y \end{pmatrix}.$$

Calculons chaque coefficient.

Le coefficient de la première ligne et de la première colonne est

$$a^x \cdot a^y + (a^x - 1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a^{x+y}.$$

Le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne est

$$a^x(a^y - 1) + (a^x - 1) \cdot 1 + 0 \cdot 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} a^x(a^y - 1) + (a^x - 1) &= a^{x+y} - a^x + a^x - 1 \\ &= a^{x+y} - 1. \end{aligned}$$

Le coefficient de la première ligne et de la troisième colonne vaut

$$0.$$

La deuxième ligne du produit est

$$(0 \quad 1 \quad 0).$$

Enfin, le coefficient de la troisième ligne et de la troisième colonne est

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Ainsi,

$$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} a^{x+y} & a^{x+y} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Or, par définition,

$$M(x+y) = \begin{pmatrix} a^{x+y} & a^{x+y} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{M(x)M(y) = M(x+y)}.$$

Comme

$$x + y \in \mathbb{R},$$

on a

$$M(x+y) \in E.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall M(x), M(y) \in E, \quad M(x)M(y) \in E.}$$

Ainsi,

$$\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

## 2-a. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$

On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow E$$

définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = M(x).$$

Pour montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de

$$(\mathbb{R}, +)$$

vers

$$(E, \times),$$

il faut montrer que :

- 1)  $\varphi$  est un morphisme ;
- 2)  $\varphi$  est injective ;
- 3)  $\varphi$  est surjective.

### 1) $\varphi$ est un morphisme

Soient

$$x, y \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\varphi(x + y) = M(x + y).$$

D'après la question précédente,

$$M(x + y) = M(x)M(y).$$

Or

$$M(x) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad M(y) = \varphi(y).$$

Donc

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y).}$$

L'application  $\varphi$  est donc un morphisme de

$$(\mathbb{R}, +)$$

vers

$$(E, \times).$$

## 2) $\varphi$ est injective

Soient

$$x, y \in \mathbb{R}$$

tels que

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

Cela signifie que

$$M(x) = M(y).$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^y & a^y - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^y \end{pmatrix}.$$

En comparant, par exemple, les coefficients situés à la première ligne et à la première colonne, on obtient

$$a^x = a^y.$$

Comme

$$a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1,$$

la fonction

$$t \mapsto a^t$$

est strictement monotone sur  $\mathbb{R}$ , donc injective.

Ainsi,

$$a^x = a^y \implies x = y.$$

Par conséquent,

$\varphi$  est injective.

## 3) $\varphi$ est surjective

Par définition,

$$E = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Soit

$$X \in E.$$

Alors il existe un réel  $x$  tel que

$$X = M(x).$$

Or

$$M(x) = \varphi(x).$$

Donc tout élément de  $E$  possède un antécédent par  $\varphi$ .

Ainsi,

$\varphi$  est surjective.

## Conclusion

L'application  $\varphi$  est un morphisme bijectif. Elle est donc un isomorphisme.

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } (\mathbb{R}, +) \text{ vers } (E, \times).}$$

## 2-b. En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif

On sait que

$$(\mathbb{R}, +)$$

est un groupe commutatif.

Or

$$\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (E, \times)$$

est un isomorphisme.

Un isomorphisme conserve la structure algébrique. Par conséquent,

$$(E, \times)$$

est également un groupe commutatif.

On peut aussi retrouver directement ses principaux éléments.

### Élément neutre

L'élément neutre de  $(\mathbb{R}, +)$  est 0. Son image par  $\varphi$  est

$$\varphi(0) = M(0).$$

Or

$$a^0 = 1.$$

Donc

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi, l'élément neutre de  $(E, \times)$  est

$$\boxed{I = M(0).}$$

### Inverse d'un élément

Soit

$$M(x) \in E.$$

On a

$$M(x)M(-x) = M(x - x) = M(0) = I.$$

Donc l'inverse de  $M(x)$  est

$$\boxed{M(x)^{-1} = M(-x).}$$

## Commutativité

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$M(x)M(y) = M(x + y).$$

Comme l'addition dans  $\mathbb{R}$  est commutative,

$$x + y = y + x.$$

Donc

$$M(x + y) = M(y + x).$$

Ainsi,

$$M(x)M(y) = M(y)M(x).$$

Finalement,

$$(E, \times) \text{ est un groupe commutatif.}$$

### 3. Dans cette question, $a = 5$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Lorsque  $a = 5$ , on a

$$M(x) = \begin{pmatrix} 5^x & 5^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^x \end{pmatrix}.$$

#### 3-a. Vérifier que $A \in E$ et $B \in E$

##### Étude de la matrice $A$

On remarque que

$$\frac{1}{25} = 5^{-2}.$$

De plus,

$$5^{-2} - 1 = \frac{1}{25} - 1 = \frac{1 - 25}{25} = -\frac{24}{25}.$$

Ainsi,

$$M(-2) = \begin{pmatrix} 5^{-2} & 5^{-2} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A = M(-2).$$

Comme

$$-2 \in \mathbb{R},$$

on en déduit

$$A \in E.$$

### Étude de la matrice $B$

On remarque que

$$25 = 5^2$$

et

$$24 = 25 - 1 = 5^2 - 1.$$

Ainsi,

$$M(2) = \begin{pmatrix} 5^2 & 5^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$B = M(2).$$

Comme

$$2 \in \mathbb{R},$$

on en déduit

$$B \in E.$$

Finalement,

$$A = M(-2) \in E \quad \text{et} \quad B = M(2) \in E.$$

### 3-b. Résoudre dans $E$ l'équation $A^5 X^6 = B^{2026}$

On cherche une matrice

$$X \in E$$

telle que

$$A^5 X^6 = B^{2026}.$$

Comme  $X \in E$ , il existe un réel  $t$  tel que

$$X = M(t).$$

On a montré que

$$A = M(-2) \quad \text{et} \quad B = M(2).$$

On utilise la relation

$$M(x)M(y) = M(x+y).$$

On en déduit, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$M(x)^n = M(nx).$$

En effet,

$$M(x)^2 = M(x)M(x) = M(2x),$$

puis, par répétition,

$$M(x)^n = M(nx).$$

Ainsi,

$$A^5 = M(-2)^5 = M(5 \times (-2)) = M(-10).$$

De même,

$$X^6 = M(t)^6 = M(6t),$$

et

$$B^{2026} = M(2)^{2026} = M(2026 \times 2) = M(4052).$$

L'équation

$$A^5 X^6 = B^{2026}$$

devient donc

$$M(-10)M(6t) = M(4052).$$

Or

$$M(-10)M(6t) = M(-10 + 6t).$$

Donc

$$M(6t - 10) = M(4052).$$

Comme l'application

$$t \mapsto M(t)$$

est injective, on obtient

$$6t - 10 = 4052.$$

Donc

$$6t = 4062.$$

Ainsi,

$$t = \frac{4062}{6} = 677.$$

Par conséquent,

$$X = M(677).$$

La solution est unique, car le réel  $t$  obtenu est unique.

Ainsi,

$$\boxed{X = M(677)}.$$

Explicitement,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 5^{677} & 5^{677} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{677} \end{pmatrix}}.$$

## 4. Étude de la loi $T$

On définit sur  $E$  une loi de composition interne  $T$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

Il faut bien distinguer les deux lois utilisées sur  $E$  :

$$M(x) \times M(y) = M(x + y)$$

et

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

### 4-a. Montrer que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif

On sait que

$$I = M(0).$$

Comme l'application  $x \mapsto M(x)$  est injective,

$$M(x) \neq I \iff M(x) \neq M(0) \iff x \neq 0.$$

Ainsi,

$$E \setminus \{I\} = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}^*\}.$$

Pour montrer que

$$(E \setminus \{I\}, T)$$

est un groupe commutatif, nous allons vérifier successivement :

- 1) la stabilité ;
- 2) l'associativité ;
- 3) l'existence d'un élément neutre ;
- 4) l'existence d'un symétrique pour chaque élément ;
- 5) la commutativité.

#### 1) Stabilité

Soient

$$M(x), M(y) \in E \setminus \{I\}.$$

Alors

$$x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0.$$

On a

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

Comme

$$x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \neq 0,$$

on a

$$\frac{xy}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Donc

$$M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) \neq M(0) = I.$$

Ainsi,

$$M(x) T M(y) \in E \setminus \{I\}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{E \setminus \{I\} \text{ est stable pour la loi } T.}$$

## 2) Associativité

Soient

$$M(x), M(y), M(z) \in E \setminus \{I\}.$$

Calculons d'abord

$$(M(x) T M(y)) T M(z).$$

On a

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} (M(x) T M(y)) T M(z) &= M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) T M(z) \\ &= M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{xy}{\sqrt{2}} \cdot z\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(M(x) T M(y)) T M(z) = M\left(\frac{xyz}{2}\right).$$

D'autre part,

$$M(y) T M(z) = M\left(\frac{yz}{\sqrt{2}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} M(x) T (M(y) T M(z)) &= M(x) T M\left(\frac{yz}{\sqrt{2}}\right) \\ &= M\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x \cdot \frac{yz}{\sqrt{2}}\right) \\ &= M\left(\frac{xyz}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(M(x) T M(y)) T M(z) = M(x) T (M(y) T M(z)).$$

Donc

$$\boxed{T \text{ est associative.}}$$

### 3) Élément neutre pour la loi $T$

Cherchons un élément

$$M(e) \in E \setminus \{I\}$$

tel que, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$M(x) T M(e) = M(x).$$

On a

$$M(x) T M(e) = M\left(\frac{xe}{\sqrt{2}}\right).$$

Comme l'application  $t \mapsto M(t)$  est injective, l'égalité

$$M\left(\frac{xe}{\sqrt{2}}\right) = M(x)$$

équivalent à

$$\frac{xe}{\sqrt{2}} = x.$$

Comme  $x \neq 0$ , on peut diviser par  $x$ . On obtient

$$\frac{e}{\sqrt{2}} = 1,$$

donc

$$e = \sqrt{2}.$$

L'élément neutre pour la loi  $T$  est donc

$$M(\sqrt{2}).$$

Vérifions :

$$M(x) T M(\sqrt{2}) = M\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = M(x).$$

De même,

$$M(\sqrt{2}) T M(x) = M\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}\right) = M(x).$$

Comme

$$\sqrt{2} \neq 0,$$

on a

$$M(\sqrt{2}) \neq I.$$

Ainsi,

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| l'élément neutre de $(E \setminus \{I\}, T)$ est $M(\sqrt{2})$ . |
|------------------------------------------------------------------|

### 4) Symétrique d'un élément

Soit

$$M(x) \in E \setminus \{I\}.$$

On a donc

$$x \neq 0.$$

Cherchons un réel  $y \neq 0$  tel que

$$M(x) T M(y) = M(\sqrt{2}).$$

On a

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

Par injectivité de  $t \mapsto M(t)$ , il faut que

$$\frac{xy}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Donc

$$xy = 2.$$

Ainsi,

$$y = \frac{2}{x}.$$

Comme  $x \neq 0$ ,

$$\frac{2}{x} \neq 0.$$

Donc

$$M\left(\frac{2}{x}\right) \in E \setminus \{I\}.$$

Vérifions :

$$M(x) T M\left(\frac{2}{x}\right) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\frac{2}{x}\right).$$

Donc

$$M(x) T M\left(\frac{2}{x}\right) = M\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ainsi,

$$M(x) T M\left(\frac{2}{x}\right) = M(\sqrt{2}).$$

Donc le symétrique de  $M(x)$  pour la loi  $T$  est

$$\boxed{M(x)^{-1_T} = M\left(\frac{2}{x}\right)}.$$

## 5) Commutativité

Soient

$$M(x), M(y) \in E \setminus \{I\}.$$

On a

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right).$$

Comme la multiplication des réels est commutative,

$$xy = yx.$$

Donc

$$M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) = M\left(\frac{yx}{\sqrt{2}}\right).$$

Ainsi,

$$M(x) T M(y) = M(y) T M(x).$$

Par conséquent,

$$\boxed{T \text{ est commutative.}}$$

## Conclusion

La loi  $T$  est stable et associative sur  $E \setminus \{I\}$ , elle possède un élément neutre  $M(\sqrt{2})$ , chaque élément possède un symétrique, et elle est commutative.

Ainsi,

$$\boxed{(E \setminus \{I\}, T) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

## 4-b. Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif

Attention à l'interprétation des deux lois :

- la loi  $\times$ , qui est ici le produit matriciel, joue le rôle de l'addition du corps ;
- la loi  $T$  joue le rôle de la multiplication du corps.

Pour montrer que

$$(E, \times, T)$$

est un corps commutatif, il faut vérifier les propriétés suivantes :

- 1)  $(E, \times)$  est un groupe commutatif ;
- 2)  $(E \setminus \{I\}, T)$  est un groupe commutatif ;
- 3) la loi  $T$  est distributive par rapport à la loi  $\times$ .

### 1) Groupe commutatif pour la première loi

D'après la question 2-b,

$$\boxed{(E, \times) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

Son élément neutre est

$$I = M(0).$$

Dans la structure de corps considérée, la matrice  $I$  joue donc le rôle de l'élément nul.

## 2) Groupe commutatif pour la seconde loi

D'après la question 4-a,

$$(E \setminus \{I\}, T) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Son élément neutre est

$$M(\sqrt{2}).$$

Dans la structure de corps considérée,  $M(\sqrt{2})$  joue donc le rôle de l'élément unité.

## 3) Distributivité de $T$ par rapport à $\times$

Soient

$$M(x), M(y), M(z) \in E.$$

On veut montrer que

$$M(x) T (M(y) \times M(z)) = (M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)).$$

Commençons par le membre de gauche.

Comme

$$M(y) \times M(z) = M(y + z),$$

on a

$$\begin{aligned} M(x) T (M(y) \times M(z)) &= M(x) T M(y + z) \\ &= M\left(\frac{x(y + z)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la distributivité de la multiplication réelle par rapport à l'addition réelle,

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Donc

$$\frac{x(y + z)}{\sqrt{2}} = \frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xz}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi,

$$M(x) T (M(y) \times M(z)) = M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xz}{\sqrt{2}}\right).$$

Or

$$M(u + v) = M(u) \times M(v).$$

En prenant

$$u = \frac{xy}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad v = \frac{xz}{\sqrt{2}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}} + \frac{xz}{\sqrt{2}}\right) &= M\left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right) \times M\left(\frac{xz}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)). \end{aligned}$$

Donc

$$M(x) T (M(y) \times M(z)) = (M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)).$$

La loi  $T$  est donc distributive à gauche par rapport à  $\times$ .

Comme  $T$  est commutative, la distributivité à droite en découle également. En effet,

$$\begin{aligned} (M(y) \times M(z)) T M(x) &= M(x) T (M(y) \times M(z)) \\ &= (M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)) \\ &= (M(y) T M(x)) \times (M(z) T M(x)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $T$  est distributive par rapport à  $\times$ .

## Conclusion

On a montré que :

$$(E, \times)$$

est un groupe commutatif;

$$(E \setminus \{I\}, T)$$

est un groupe commutatif;

et  $T$  est distributive par rapport à  $\times$ .

Par conséquent,

$$(E, \times, T) \text{ est un corps commutatif.}$$

Dans ce corps :

$$\text{l'élément nul est } I = M(0)$$

et

$$\text{l'élément unité est } M(\sqrt{2}).$$