

Examen National Unifié du Baccalauréat

Session de rattrapage 2026

Sections internationales

RS 24F

Code	Sujet	
RS 24F		
Durée de réalisation	4 h	Matière
Coefficient	9	Mathématiques
Filière et branche	Sciences Mathématiques A et B, option française	

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- LEXERCICE1 se rapporte à l'analyse (7.5 pts)
- LEXERCICE2 se rapporte à l'analyse (2.5 pts)
- LEXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes (3.5 pts)
- LEXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique et aux probabilités (3 pts)
- LEXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques (3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (7.5 points)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(t) = \ln(t) - (t - 1)$$

Soit $x \in]0, +\infty[- \{1\}$.

On considère la fonction h de la variable réelle t définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$h(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}(t-1)^2 - g(t)$$

1. Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0, +\infty[; \quad h'(t) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t} \right) (t-1)$$

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h , montrer qu'il existe un réel θ compris entre x et 1 tel que :

$$\frac{g(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2\theta}$$

3. Montrer que :

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}$$

4. En déduire que :

$$\frac{-1}{x+1-|x-1|} < \frac{g(x)}{(x-1)^2} < \frac{-1}{|x-1|+x+1}$$

Partie II :

Soient f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(1) = 1$$

et

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[; \quad f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)^2$$

et (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. (a) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

- (b) Montrer que f est continue au point 1.

2. (a) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[; \quad \frac{f(x)-1}{x-1} = \left(1 + \frac{\ln(x)}{x-1} \right) \left(\frac{g(x)}{(x-1)^2} \right)$$

- (b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1.

- (c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[- \{1\} ; \quad f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x-1} \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

- (b) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[; \quad \frac{\ln(x)}{x-1} > 0$$

- (c) Montrer que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Montrer que le réel 1 est la seule solution de l'équation

$$f(x) = x$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

5. Représenter la tangente (T) et la courbe (C) dans le repère

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n sur l'intervalle $]0, 1]$.

- (b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

- (c) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}$$

puis en déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n}$$

EXERCICE2 : (2.5 points)

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que sa dérivée φ' est continue sur cet intervalle.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \frac{\varphi(1)}{n+1} + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx$$

2. Montrer que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [0, 1] ; \quad |\varphi'(x)| \leq M$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1] ; \quad |\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1-x)$$

4. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1)$$

5. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+2t} dt$$

et

$$v_n = 2^{n+1} n \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \arctan(2x) dx$$

En utilisant le résultat de la question 4., calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit :

$$m \in \mathbb{C} - \{1, -i\}$$

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E_m) : z^3 - (1 + (1+i)m)z^2 + ((1+i)m + im^2)z - im^2 = 0$$

1. Montrer que les nombres complexes 1 et m sont des solutions de l'équation (E_m) .
2. En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E_m) .

Partie II :

On suppose que :

$$m \in \mathbb{C} - \{-i, i, -1, 1\} \quad \text{et} \quad |m| = 1$$

A.

1. Montrer que :

$$\overline{\left(\frac{m+i}{1+im}\right)} - \left(\frac{m+i}{1+im}\right) = 0$$

et

$$\left(\frac{\overline{m}+1}{\overline{m}-1}\right) + \left(\frac{m+1}{m-1}\right) = 0$$

Remarque que :

$$m\overline{m} = 1$$

2. Montrer que :

$$(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i}\right)$$

est un imaginaire pur.

B.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct

$$(O; \vec{u}, \vec{v}),$$

on considère les points A, B, C, E et F d'affixes respectives

$$a = m, \quad b = 1, \quad c = im,$$

$$e = \frac{1}{2}(1+i)(m-i) \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2}(1+i)(1+m)$$

1. (a) Montrer que :

$$\frac{e-c}{e-b} = -i \left(\frac{m+1}{m-1}\right)$$

- (b) En déduire que :

$$E \in (BC)$$

2. (a) Montrer que :

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{1}{2}(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right)$$

- (b) En déduire que :

$$(AE) \perp (BC)$$

3. (a) Montrer que :

$$\frac{f-c}{f-a} = -i \left(\frac{m+i}{1+im} \right)$$

- (b) En déduire que les points A , E , C et F sont cocycliques.

EXERCICE4 : (3 points)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : \quad 5x - 6y = 2$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\{(4 + 6k, 3 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Soit (x, y) une solution de l'équation (E) et d le plus grand diviseur commun des nombres x et y .

- (a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
(b) Déterminer les couples (x, y) pour lesquels $d = 1$.

Partie II :

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On considère l'écriture de n dans le système de numération de base b :

$$n = \sum_{i=0}^p a_i b^i$$

avec

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_i < b \quad \text{et} \quad a_p \neq 0$$

On pose :

$$S_b(n) = \sum_{i=0}^p a_i$$

la somme des chiffres représentant n dans le système de numération de base b .

Montrer que :

$$S_b(n) \equiv n \pmod{b-1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le couple $(S_5(n), S_6(n))$ est une solution de l'équation (E) avec $S_5(n)$ et $S_6(n)$ premiers entre eux.

- (a) Montrer que :

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{4} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

- (b) En déduire que :

$$n \equiv 8 \pmod{20}$$

- (c) Calculer $S_5(28)$ et $S_6(28)$.

- (d) Le couple $(S_5(28), S_6(28))$ est-il une solution de l'équation (E) ? Justifier votre réponse.

Partie III :

On considère une urne contenant 25 boules numérotées de 1 à 25 et indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne et on note le couple (x, y) obtenu où x est le numéro de la première boule tirée et y est le numéro de la deuxième boule tirée.

Soit V l'événement : le couple (x, y) obtenu est une solution de l'équation (E) :

1. Montrer que la probabilité de l'événement V est :

$$p = 64.10^{-4}$$

2. On répète cette expérience 10 fois successives en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage.

Calculer la probabilité de la réalisation de l'événement V exactement deux fois.

(Le développement des calculs n'est pas demandé)

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'unité la matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

Pour tout réel x , on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble :

$$E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E est stable dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.
2. Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \varphi(x) = M(x)$$

- (a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.
 - (b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
3. On prend dans cette question $a = 5$ et on pose :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que $A \in E$ et $B \in E$.
 - (b) Résoudre dans E l'équation :

$$A^5 \times X^6 = B^{2026}$$

4. On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad M(x)TM(y) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

- (a) Montrer que $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.
 - (b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

FIN