

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace

Énoncé et correction complète et très détaillée

Instructions générales

- L'utilisation d'une calculatrice non programmable est autorisée.
- Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient.
- Il est recommandé d'éviter l'usage de la couleur rouge dans la rédaction des solutions.

Notations

- On note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z , et $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
- e est le nombre réel tel que

$$\ln(e) = 1.$$

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

on considère les points

$$A(-1, 0, 1), \quad B(-3, 2, 2), \quad C(-1, 1, 2)$$

et

$$D(2, 7, -4).$$

Soit (Δ) la droite passant par le point D et dirigée par le vecteur

$$\vec{u} = (2, 1, 2).$$

1.a. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

1.b. En déduire que

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

est une équation cartésienne du plan (ABC) .

1.c. Calculer

$$\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$$

et en déduire que la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) .

Correction détaillée

1.a. Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

Étape 1 : calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Pour calculer le vecteur allant d'un point A vers un point B , on effectue la différence

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Plus précisément, si

$$A(x_A, y_A, z_A) \quad \text{et} \quad B(x_B, y_B, z_B),$$

alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Dans notre cas,

$$A(-1, 0, 1) \quad \text{et} \quad B(-3, 2, 2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-3 - (-1), 2 - 0, 2 - 1) \\ &= (-3 + 1, 2, 1) \\ &= (-2, 2, 1). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1)}.$$

Étape 2 : calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AC}$

De même,

$$\overrightarrow{AC} = C - A.$$

Or

$$A(-1, 0, 1) \quad \text{et} \quad C(-1, 1, 2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (-1 - (-1), 1 - 0, 2 - 1) \\ &= (-1 + 1, 1, 1) \\ &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)}.$$

Rappel

Si

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

alors leur produit vectoriel est donné par

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.**Étape 3 : calcul de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$**

Nous avons

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1)$$

et

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1).$$

Appliquons la formule du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2 \times 1 - 1 \times 1, 1 \times 0 - (-2) \times 1, (-2) \times 1 - 2 \times 0).$$

Calculons chacune des trois coordonnées.

Première coordonnée

$$2 \times 1 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1.$$

Deuxième coordonnée

$$1 \times 0 - (-2) \times 1 = 0 - (-2) = 2.$$

Troisième coordonnée

$$(-2) \times 1 - 2 \times 0 = -2 - 0 = -2.$$

Par conséquent,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Dans la base

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

un vecteur de coordonnées $(1, 2, -2)$ s'écrit

$$\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Nous obtenons donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}.$$

Vérification

Vérifions que le vecteur

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= (1, 2, -2) \cdot (-2, 2, 1) \\ &= 1 \times (-2) + 2 \times 2 + (-2) \times 1 \\ &= -2 + 4 - 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= (1, 2, -2) \cdot (0, 1, 1) \\ &= 1 \times 0 + 2 \times 1 + (-2) \times 1 \\ &= 0 + 2 - 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $(1, 2, -2)$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Résultat

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2) = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

1.b. Détermination d'une équation cartésienne du plan (ABC) **Étape 1 : déterminer un vecteur normal au plan**

Les vecteurs

$$\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}$$

sont deux vecteurs appartenant au plan (ABC) .

Nous avons calculé

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Par définition du produit vectoriel, le vecteur

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC) , le vecteur

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est un vecteur normal au plan (ABC) .

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

Étape 2 : écrire la forme générale de l'équation du plan

Un plan ayant pour vecteur normal

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où d est une constante réelle.

Ici,

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme

$$x + 2y - 2z + d = 0.$$

Il reste à déterminer la constante d .

Étape 3 : utiliser les coordonnées du point A

Le point

$$A(-1, 0, 1)$$

appartient au plan (ABC) .

Ses coordonnées doivent donc vérifier l'équation

$$x + 2y - 2z + d = 0.$$

En remplaçant

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = 1,$$

on obtient

$$-1 + 2 \times 0 - 2 \times 1 + d = 0.$$

Donc

$$-1 - 2 + d = 0.$$

Ainsi,

$$-3 + d = 0,$$

d'où

$$d = 3.$$

L'équation cartésienne du plan est donc

$$\boxed{x + 2y - 2z + 3 = 0}.$$

Autre méthode directe

Comme

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est normal au plan (ABC) et que le point

$$A(-1, 0, 1)$$

appartient au plan, un point quelconque

$$M(x, y, z)$$

appartient au plan si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Or

$$\overrightarrow{AM} = (x - (-1), y - 0, z - 1) = (x + 1, y, z - 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (x + 1, y, z - 1) \cdot (1, 2, -2) \\ &= (x + 1) \times 1 + y \times 2 + (z - 1) \times (-2).\end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = x + 1 + 2y - 2z + 2.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = x + 2y - 2z + 3.$$

La condition

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

devient donc

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

On retrouve bien la même équation.

Vérification

Vérifions que les trois points A , B et C vérifient l'équation

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Pour

$$A(-1, 0, 1),$$

on a

$$-1 + 2 \times 0 - 2 \times 1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0.$$

Pour

$$B(-3, 2, 2),$$

on a

$$-3 + 2 \times 2 - 2 \times 2 + 3 = -3 + 4 - 4 + 3 = 0.$$

Pour

$$C(-1, 1, 2),$$

on a

$$-1 + 2 \times 1 - 2 \times 2 + 3 = -1 + 2 - 4 + 3 = 0.$$

Les trois points A , B et C vérifient donc bien l'équation obtenue.

Remarque

Le produit vectoriel

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2)$$

n'est pas nul.

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A , B et C ne sont pas alignés.

Ils déterminent donc un unique plan.

Résultat

Une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

1.c. Étude du parallélisme entre la droite (Δ) et le plan (ABC)

La droite (Δ) est dirigée par le vecteur

$$\vec{u} = (2, 1, 2).$$

Nous avons trouvé que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Le vecteur

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est un vecteur normal au plan (ABC) .

Étape 1 : calcul du produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

est donné par

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Calculons

$$\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).$$

On a

$$\vec{u} = (2, 1, 2)$$

et

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) &= (2, 1, 2) \cdot (1, 2, -2) \\ &= 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) \\ &= 2 + 2 - 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0}.$$

Étape 2 : interprétation du produit scalaire nul

Nous avons

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$

Cela signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Or $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Par conséquent, le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un vecteur normal au plan (ABC) .

Cela signifie que le vecteur $\vec{u}$ est parallèle au plan (ABC) .

Comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) , on en déduit que la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) .

$$(\Delta) \parallel (ABC)$$

Rappel

Soit un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$.

Si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0,$$

alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

La direction de la droite est alors parallèle au plan.

Ainsi,

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \implies d \parallel P.$$

La droite peut alors être soit incluse dans le plan, soit strictement parallèle au plan.

Étape 3 : préciser si la droite est contenue dans le plan

Cette étape n'est pas explicitement demandée, mais elle permet de préciser la position exacte de la droite (Δ) par rapport au plan (ABC) .

La droite (Δ) passe par le point

$$D(2, 7, -4).$$

Vérifions si D appartient au plan d'équation

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

En remplaçant

$$x = 2, \quad y = 7, \quad z = -4,$$

on obtient

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 3 &= 2 + 2 \times 7 - 2 \times (-4) + 3 \\ &= 2 + 14 + 8 + 3 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Or

$$27 \neq 0.$$

Le point D n'appartient donc pas au plan (ABC) .

Comme la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) et qu'elle passe par un point extérieur à ce plan, elle est strictement parallèle au plan.

(Δ) est strictement parallèle au plan (ABC) .

Résultat

$$\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Par conséquent,

$$(\Delta) \parallel (ABC).$$

De plus, puisque

$$D \notin (ABC),$$

la droite (Δ) est strictement parallèle au plan (ABC) .

Synthèse générale

Les coordonnées des vecteurs sont

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 1)$$

et

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1).$$

Leur produit vectoriel est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (1, 2, -2) \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Le vecteur

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est donc un vecteur normal au plan (ABC) .

Une équation du plan (ABC) est

$$x + 2y - 2z + d = 0.$$

Comme

$$A(-1, 0, 1) \in (ABC),$$

on obtient

$$d = 3.$$

Ainsi,

$$\boxed{(ABC) : x + 2y - 2z + 3 = 0}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{n} &= (2, 1, 2) \cdot (1, 2, -2) \\ &= 2 + 2 - 4 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (Δ) est donc orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ du plan (ABC) .

Par conséquent,

$$\boxed{(\Delta) \parallel (ABC)}.$$

Comme le point $D(2, 7, -4)$ ne vérifie pas l'équation du plan, la droite (Δ) n'est pas contenue dans le plan. Elle est donc strictement parallèle au plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(ABC) : x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$(\Delta) \parallel (ABC)$$

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace

Partie 2 : Sphère tangente à une droite

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données de l'exercice

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

on considère les points

$$A(-1, 0, 1), \quad B(-3, 2, 2), \quad C(-1, 1, 2)$$

et

$$D(2, 7, -4).$$

La droite (Δ) passe par le point D et est dirigée par le vecteur

$$\vec{u} = (2, 1, 2).$$

Dans la première partie, on a obtenu

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2),$$

ainsi qu'une équation cartésienne du plan (ABC) :

$$(ABC) : \quad x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Le vecteur

$$\vec{n} = (1, 2, -2)$$

est donc un vecteur normal au plan (ABC) .

Énoncé

Soit (S) la sphère de centre

$$\Omega(0, 3, 0)$$

et tangente à la droite (Δ) .

2.a. Vérifier que

$$\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$$

et en déduire que le rayon de la sphère (S) est égal à 6.

2.b. Calculer

$$d(\Omega, (ABC))$$

et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon

$$r = 3\sqrt{3}.$$

2.c. Vérifier que

$$\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

et en déduire que le point C est le centre du cercle (Γ) .

Correction détaillée

2.a. Détermination du rayon de la sphère

La sphère (S) est de centre

$$\Omega(0, 3, 0)$$

et elle est tangente à la droite (Δ) .

La droite (Δ) passe par le point

$$D(2, 7, -4)$$

et possède pour vecteur directeur

$$\vec{u} = (2, 1, 2).$$

Étape 1 : calcul du vecteur $\overrightarrow{\Omega D}$

Pour calculer le vecteur allant du point Ω vers le point D , on effectue la différence

$$\overrightarrow{\Omega D} = D - \Omega.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega D} &= (2 - 0, 7 - 3, -4 - 0) \\ &= (2, 4, -4).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega D} = (2, 4, -4)}.$$

Étape 2 : calcul du produit scalaire $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u}$

Nous avons

$$\overrightarrow{\Omega D} = (2, 4, -4)$$

et

$$\vec{u} = (2, 1, 2).$$

Le produit scalaire de deux vecteurs

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

est donné par

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} &= (2, 4, -4) \cdot (2, 1, 2) \\ &= 2 \times 2 + 4 \times 1 + (-4) \times 2 \\ &= 4 + 4 - 8 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0}.$$

Étape 3 : interprétation géométrique

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

L'égalité

$$\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$$

signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega D}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

On a donc

$$\overrightarrow{\Omega D} \perp \vec{u}.$$

Comme le point D appartient à la droite (Δ) , cela signifie que la droite (ΩD) est perpendiculaire à la droite (Δ) au point D .

Par conséquent, le point D est le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite (Δ) .

Autrement dit,

$$d(\Omega, (\Delta)) = \Omega D.$$

Rappel

Lorsqu'une sphère de centre Ω est tangente à une droite en un point T , le rayon $\overrightarrow{\Omega T}$ est perpendiculaire à la droite.

Le rayon de la sphère est donc égal à la distance entre le centre Ω et la droite.

Ici, comme $D \in (\Delta)$ et

$$\overrightarrow{\Omega D} \perp (\Delta),$$

le point de tangence est D et le rayon de la sphère est

$$R = \Omega D.$$

Étape 4 : calcul de la longueur ΩD

Puisque

$$\overrightarrow{\Omega D} = (2, 4, -4),$$

on a

$$\begin{aligned}
 \Omega D &= \|\overrightarrow{\Omega D}\| \\
 &= \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 16 + 16} \\
 &= \sqrt{36} \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Le rayon de la sphère est donc

$$\boxed{R = 6}.$$

Résultat

On a

$$\overrightarrow{\Omega D} = (2, 4, -4)$$

et

$$\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + 4 \times 1 - 4 \times 2 = 0.$$

Donc $\overrightarrow{\Omega D}$ est perpendiculaire à la droite (Δ) .

Comme $D \in (\Delta)$, le point D est le point de tangence de la sphère avec la droite. Le rayon de la sphère est alors

$$R = \Omega D = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6.$$

Ainsi,

$$\boxed{R = 6}.$$

2.b. Intersection du plan (ABC) et de la sphère (S)

Nous savons que le plan (ABC) possède pour équation cartésienne

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Le centre de la sphère est

$$\Omega(0, 3, 0)$$

et son rayon est

$$R = 6.$$

Nous allons commencer par calculer la distance entre le point Ω et le plan (ABC) .

Étape 1 : rappel de la formule de la distance d'un point à un plan

Soit un plan P d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

et un point

$$M(x_M, y_M, z_M).$$

La distance du point M au plan P est donnée par

$$d(M, P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dans notre cas, l'équation du plan est

$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Nous avons donc

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2, \quad d = 3.$$

Les coordonnées du point Ω sont

$$x_\Omega = 0, \quad y_\Omega = 3, \quad z_\Omega = 0.$$

Étape 2 : application de la formule

On obtient

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 \times 0 + 2 \times 3 - 2 \times 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}.$$

Calculons séparément le numérateur et le dénominateur.

Pour le numérateur :

$$\begin{aligned} |0 + 6 - 0 + 3| &= |9| \\ &= 9. \end{aligned}$$

Pour le dénominateur :

$$\begin{aligned} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} &= \sqrt{1 + 4 + 4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d(\Omega, (ABC)) &= \frac{9}{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{d(\Omega, (ABC)) = 3}.$$

Étape 3 : nature de l'intersection entre le plan et la sphère

Le rayon de la sphère est

$$R = 6,$$

tandis que la distance entre son centre et le plan vaut

$$d = 3.$$

On constate que

$$d < R,$$

car

$$3 < 6.$$

Rappel

Soit une sphère de centre Ω et de rayon R , et un plan P situé à une distance d du centre. Trois situations sont possibles :

- si $d > R$, le plan ne coupe pas la sphère ;
- si $d = R$, le plan est tangent à la sphère et l'intersection est réduite à un point ;
- si $d < R$, le plan coupe la sphère suivant un cercle.

Ici,

$$d = 3 < 6 = R.$$

Le plan (ABC) coupe donc la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .

Étape 4 : calcul du rayon du cercle d'intersection

Notons :

- R le rayon de la sphère ;
- d la distance du centre Ω au plan ;
- r le rayon du cercle d'intersection.

La relation entre ces trois longueurs est

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

Cette relation provient du théorème de Pythagore.

En effet, si H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan et si M est un point du cercle d'intersection, alors :

$$\Omega H = d,$$

$$HM = r,$$

et

$$\Omega M = R.$$

Le triangle ΩHM est rectangle en H , donc

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2.$$

Ainsi,

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

On en déduit

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Dans notre cas,

$$R = 6$$

et

$$d = 3.$$

Donc

$$\begin{aligned} r^2 &= 6^2 - 3^2 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{27} \\ &= \sqrt{9 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$r = 3\sqrt{3}.$$

Résultat

La distance du centre $\Omega(0, 3, 0)$ au plan

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

est

$$\begin{aligned} d(\Omega, (ABC)) &= \frac{|0 + 2 \times 3 - 2 \times 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Comme

$$3 < 6,$$

le plan (ABC) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) .

Son rayon vérifie

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$r = 3\sqrt{3}.$$

2.c. Détermination du centre du cercle (Γ)

Nous devons vérifier que

$$\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

puis en déduire que le point C est le centre du cercle (Γ).

Nous savons déjà que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Étape 1 : calcul du vecteur $\overrightarrow{C\Omega}$

Le point C a pour coordonnées

$$C(-1, 1, 2)$$

et le point Ω a pour coordonnées

$$\Omega(0, 3, 0).$$

Le vecteur allant de C vers Ω est

$$\overrightarrow{C\Omega} = \Omega - C.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C\Omega} &= (0 - (-1), 3 - 1, 0 - 2) \\ &= (1, 2, -2).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{C\Omega} = (1, 2, -2)}.$$

Or, d'après la première partie,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}.$$

Étape 2 : interprétation géométrique

Le vecteur

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

est un vecteur normal au plan (ABC) .

Comme

$$\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC},$$

le vecteur $\overrightarrow{C\Omega}$ est également normal au plan (ABC) .

Cela signifie que la droite $(C\Omega)$ est perpendiculaire au plan (ABC) .

De plus, le point C appartient au plan (ABC) , puisque le plan est précisément le plan passant par les points A , B et C .

Ainsi :

- $C \in (ABC)$;
- $(C\Omega) \perp (ABC)$.

Par conséquent, C est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC) .

Étape 3 : pourquoi le projeté orthogonal est-il le centre du cercle ?

Lorsqu'un plan coupe une sphère suivant un cercle, le centre de ce cercle est le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan.

Dans notre cas :

- Ω est le centre de la sphère ;
- C est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) .

Le point C est donc le centre du cercle d'intersection (Γ) .

Ainsi,

$$C \text{ est le centre du cercle } (\Gamma).$$

Méthode

On peut également démontrer directement que tous les points du cercle (Γ) sont situés à la même distance du point C .

Soit M un point quelconque du cercle (Γ) .

Comme M appartient à la sphère (S) ,

$$\Omega M = 6.$$

Comme M appartient au plan (ABC) et que

$$(C\Omega) \perp (ABC),$$

le triangle ΩCM est rectangle en C .

D'après le théorème de Pythagore,

$$\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2.$$

Or

$$\Omega M = 6$$

et

$$\Omega C = \|\vec{C\Omega}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Donc

$$\begin{aligned} CM^2 &= OM^2 - OC^2 \\ &= 6^2 - 3^2 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$CM = 3\sqrt{3}.$$

Cette distance ne dépend pas du choix du point M sur le cercle.

Tous les points du cercle (Γ) sont donc situés à la distance $3\sqrt{3}$ du point C .

Cela confirme que C est bien le centre du cercle (Γ) .

Vérification

Vérifions également que la longueur OC est égale à la distance du point O au plan (ABC) .

Nous avons

$$\overrightarrow{CO} = (1, 2, -2).$$

Donc

$$\begin{aligned} OC &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Or, dans la question précédente, nous avons trouvé

$$d(O, (ABC)) = 3.$$

On retrouve bien

$$OC = d(O, (ABC)).$$

Cela confirme que C est le projeté orthogonal de O sur le plan.

Résultat

On calcule

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CO} &= (0 - (-1), 3 - 1, 0 - 2) \\ &= (1, 2, -2). \end{aligned}$$

Or

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Donc

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{CO}$ est donc normal au plan (ABC) .

Comme $C \in (ABC)$, le point C est le projeté orthogonal du centre O sur le plan (ABC) .

Par conséquent,

C est le centre du cercle (Γ) .

Synthèse finale

1. Rayon de la sphère

On a

$$\overrightarrow{\Omega D} = (2, 4, -4).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} &= (2, 4, -4) \cdot (2, 1, 2) \\ &= 4 + 4 - 8 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{\Omega D}$ est perpendiculaire à la droite (Δ) .

Le rayon de la sphère vaut alors

$$\begin{aligned}R &= \Omega D \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} \\ &= 6.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{R = 6}.$$

2. Rayon du cercle d'intersection

La distance du centre Ω au plan (ABC) est

$$\begin{aligned}d(\Omega, (ABC)) &= \frac{|0 + 2 \times 3 - 2 \times 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Comme

$$3 < 6,$$

le plan coupe la sphère suivant un cercle (Γ) .

Son rayon est

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$r = 3\sqrt{3}.$$

3. Centre du cercle d'intersection

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C\Omega} &= (0 - (-1), 3 - 1, 0 - 2) \\ &= (1, 2, -2).\end{aligned}$$

Or

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 2, -2).$$

Donc

$$\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{C\Omega}$ est normal au plan (ABC) et le point C appartient à ce plan.

Ainsi, C est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) .

Par conséquent,

$$C \text{ est le centre du cercle } (\Gamma).$$

Résultats définitifs

$$R = 6$$

$$d(\Omega, (ABC)) = 3$$

$$r = 3\sqrt{3}$$

$$C \text{ est le centre du cercle } (\Gamma)$$

Exercice 2 : Nombres complexes

Énoncé et correction complète et très détaillée

Énoncé

On considère, dans le plan complexe, les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad b = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad c = 1.$$

1.a. Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

1.b. Vérifier que

$$b^2 = a$$

et que

$$b\bar{b} = 1.$$

1.c. Montrer que

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Correction détaillée

1.a. Écriture de a sous forme trigonométrique

On considère le nombre complexe

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

La forme algébrique générale d'un nombre complexe est

$$z = x + iy,$$

où x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire.

Dans notre cas,

$$\operatorname{Re}(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}.$$

Étape 1 : calcul du module de a

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est donné par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Par conséquent,

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Calculons séparément les deux carrés :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|a| &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{4}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{|a| = 1}.$$

Étape 2 : détermination d'un argument de a

La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul est

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

où

$$r = |z|$$

et θ est un argument de z .

Comme $|a| = 1$, nous cherchons un angle θ tel que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin \theta = \frac{1}{2}.$$

Or les valeurs trigonométriques remarquables donnent

$$\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

Nous pouvons donc prendre

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi,

$$a = 1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Finalement,

$$a = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

Comme le module vaut 1, nous pouvons également écrire, sous forme exponentielle,

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Rappel

Pour tout réel θ , la formule d'Euler donne

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Ainsi,

$$\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Résultat

La forme trigonométrique de a est

$$a = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

Sa forme exponentielle est

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

1.b. Vérification des égalités $b^2 = a$ et $b\bar{b} = 1$

On a

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Première égalité : vérification de $b^2 = a$

Calculons le carré de b :

$$b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2.$$

Nous utilisons la propriété

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b^2 &= e^{2i\frac{\pi}{12}} \\ &= e^{i\frac{2\pi}{12}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente,

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc

$$\boxed{b^2 = a}.$$

Vérification

On peut également vérifier cette égalité à l'aide de la forme trigonométrique.

On a

$$b = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}.$$

D'après la formule de Moivre,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 b^2 &= \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

On retrouve bien

$$b^2 = a.$$

Deuxième égalité : vérification de $b\bar{b} = 1$

Le conjugué d'un nombre complexe sous forme exponentielle

$$z = re^{i\theta}$$

est

$$\bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Ici,

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}},$$

donc

$$\bar{b} = e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

Calculons alors le produit :

$$\begin{aligned}
 b\bar{b} &= e^{i\frac{\pi}{12}} e^{-i\frac{\pi}{12}} \\
 &= e^{i\frac{\pi}{12} - i\frac{\pi}{12}} \\
 &= e^0 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{b\bar{b} = 1}.$$

Rappel

Pour tout nombre complexe z ,

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Ici,

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

est de module 1, car tout nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ a pour module 1.

Ainsi,

$$b\bar{b} = |b|^2 = 1^2 = 1.$$

Résultat

Nous avons vérifié que

$$b^2 = a$$

et

$$b\bar{b} = 1.$$

1.c. Démonstration de l'égalité $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$

Nous devons montrer que

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

On rappelle que

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Nous allons calculer séparément le membre de gauche et le membre de droite.

Étape 1 : calcul du membre de gauche

On a

$$a - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - 1.$$

Écrivons 1 sous la forme $\frac{2}{2}$:

$$a - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi,

$$a - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Comme

$$\sqrt{3} - 2 = -(2 - \sqrt{3}),$$

on peut également écrire

$$a - 1 = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Étape 2 : calcul de $a + 1$

On a

$$a + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1.$$

En écrivant de nouveau $1 = \frac{2}{2}$, il vient

$$a + 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Donc

$$a + 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Étape 3 : calcul de $i(a + 1)$

Multiplions $a + 1$ par i :

$$i(a + 1) = i \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

En distribuant i , on obtient

$$i(a + 1) = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}i + \frac{1}{2}i^2.$$

Or

$$i^2 = -1.$$

Par conséquent,

$$i(a + 1) = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}i - \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$i(a + 1) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{2}i.$$

Étape 4 : multiplication par $2 - \sqrt{3}$

Calculons maintenant

$$(2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

En utilisant l'expression précédente,

$$(2 - \sqrt{3})i(a + 1) = (2 - \sqrt{3}) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{2}i \right).$$

Développons :

$$(2 - \sqrt{3})i(a + 1) = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2}i.$$

Calculons le produit

$$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}).$$

Il s'agit d'un produit de deux quantités conjuguées :

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) &= 2^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 - 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$(2 - \sqrt{3})i(a + 1) = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Or

$$-\frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}.$$

Par conséquent,

$$(2 - \sqrt{3})i(a + 1) = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Mais nous avons trouvé

$$a - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Les deux expressions sont donc égales.

Finalement,

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Résultat

On a

$$a - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{3})i(a + 1) &= (2 - \sqrt{3}) \left(-\frac{1}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= a - 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Deuxième méthode pour la question 1.c

Cette seconde méthode utilise la forme trigonométrique de a .

Nous avons montré que

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Nous cherchons à calculer le quotient

$$\frac{a-1}{a+1}.$$

Comme $a \neq -1$, ce quotient est bien défini.

On utilise l'identité générale

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

lorsque le dénominateur est non nul.

Avec

$$\theta = \frac{\pi}{6},$$

on obtient

$$\frac{a-1}{a+1} = i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Or

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}.$$

Donc

$$\frac{a-1}{a+1} = (2 - \sqrt{3})i.$$

En multipliant les deux membres par $a+1$, on obtient

$$\boxed{a-1 = (2 - \sqrt{3})i(a+1)}.$$

Vérification

Vérifions que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

On remarque que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

La formule de la tangente d'une différence donne

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}}.\end{aligned}$$

Or

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

et

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.\end{aligned}$$

Rationalisons le dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}}.$$

Synthèse finale

Le nombre

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

a pour module

$$|a| = 1$$

et pour argument principal

$$\frac{\pi}{6}.$$

Ainsi,

$$a = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Comme

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}},$$

on a

$$\begin{aligned} b^2 &= e^{2i\frac{\pi}{12}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc

$$b^2 = a.$$

De plus,

$$\bar{b} = e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

d'où

$$\begin{aligned}b\bar{b} &= e^{i\frac{\pi}{12}} e^{-i\frac{\pi}{12}} \\&= e^0 \\&= 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$b\bar{b} = 1.$$

Enfin,

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Résultats définitifs

$$a = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$b^2 = a$$

$$b\bar{b} = 1$$

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$$

Exercice 2 : Nombres complexes

Questions 2.a, 2.b et 3.a

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

Dans le plan complexe, on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad b = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad c = 1.$$

Dans la première partie de l'exercice, on a établi les résultats suivants :

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}},$$

$$b^2 = a,$$

$$b\bar{b} = 1$$

et

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Ces résultats seront utilisés dans les questions suivantes.

Énoncé

Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D le point d'affixe d tel que

$$T(A) = D.$$

2.a. Vérifier que

$$d = b(b + \bar{b})$$

et en déduire que les points O , B et D sont alignés.

2.b. En déduire que

$$\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

3.a. Vérifier que

$$\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$$

et en déduire que les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

Correction détaillée

2.a. Expression de d et alignement des points O , B et D

Étape 1 : traduire géométriquement la transformation

La transformation T est la translation de vecteur

$$\overrightarrow{OC}.$$

Dire que

$$T(A) = D$$

signifie que le point D est l'image du point A par cette translation.

Par définition d'une translation, on a alors

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Passons maintenant aux affixes.

Rappel

Si M , N , P et Q sont des points d'affixes respectives m , n , p et q , alors

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$$

équivalent à

$$n - m = q - p.$$

En particulier, si une translation de vecteur d'affixe w transforme un point d'affixe z en un point d'affixe z' , alors

$$z' = z + w.$$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est

$$c - 0 = c.$$

Comme $c = 1$, le vecteur de la translation a pour affixe 1.

Puisque $T(A) = D$, on obtient donc

$$d = a + c.$$

Or

$$c = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{d = a + 1}.$$

Étape 2 : utiliser les égalités démontrées précédemment

Nous savons que

$$b^2 = a$$

et que

$$b\bar{b} = 1.$$

Par conséquent,

$$a + 1 = b^2 + b\bar{b}.$$

On peut mettre b en facteur :

$$a + 1 = b(b + \bar{b}).$$

Or nous venons de montrer que

$$d = a + 1.$$

Il vient donc

$$\boxed{d = b(b + \bar{b})}.$$

Vérification

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}
 b(b + \bar{b}) &= b^2 + b\bar{b} \\
 &= a + 1 \\
 &= d.
 \end{aligned}$$

L'égalité demandée est donc bien vérifiée.

Étape 3 : étudier le nombre $b + \bar{b}$

On a

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Sa forme trigonométrique est

$$b = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Son conjugué est donc

$$\bar{b} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

En additionnant b et $\bar{b}$, les parties imaginaires se simplifient :

$$\begin{aligned}
 b + \bar{b} &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
 &\quad + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Le nombre $\frac{\pi}{12}$ appartient à l'intervalle

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Par conséquent,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

Donc

$$b + \bar{b} > 0.$$

Ainsi, $b + \bar{b}$ est un nombre réel strictement positif.

Étape 4 : déduire l'alignement

Nous avons

$$d = b(b + \bar{b}).$$

Comme $b + \bar{b}$ est réel, il existe un réel λ tel que

$$d = \lambda b,$$

avec ici

$$\lambda = b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

Donc

$$\frac{d}{b} = b + \bar{b} \in \mathbb{R}.$$

Or b est l'affixe du point B , donc aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OB}$.

De même, d est l'affixe du point D , donc aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OD}$.

L'égalité

$$d = \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

Par conséquent, les points O , B et D sont alignés.

O , B et D sont alignés.

Rappel

Soient M et N deux points distincts du plan complexe d'affixes m et n .

Les points O , M et N sont alignés si et seulement si

$$\frac{n}{m} \in \mathbb{R},$$

à condition que $m \neq 0$.

Cela signifie que les affixes m et n sont proportionnelles par un coefficient réel.

Remarque

Puisque le coefficient

$$b + \bar{b} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

est strictement positif, les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ ont non seulement la même direction, mais également le même sens.

Les points B et D appartiennent donc à la même demi-droite d'origine O .

Résultat

La translation donne

$$d = a + c = a + 1.$$

Comme

$$a = b^2 \quad \text{et} \quad 1 = b\bar{b},$$

on obtient

$$\begin{aligned} d &= b^2 + b\bar{b} \\ &= b(b + \bar{b}). \end{aligned}$$

De plus,

$$b + \bar{b} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi,

$$\frac{d}{b} \in \mathbb{R},$$

d'où

$$\boxed{O, B \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

2.b. Détermination d'un argument de d

Nous avons montré à la question précédente que

$$d = b(b + \bar{b}).$$

Nous avons également établi que

$$b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

Posons

$$\lambda = b + \bar{b}.$$

Alors

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

et

$$d = \lambda b.$$

Étape 1 : utiliser l'effet d'une multiplication par un réel positif

Multiplier un nombre complexe non nul par un réel strictement positif ne modifie pas son argument.

En effet, si

$$z = re^{i\theta}$$

et si $\lambda > 0$, alors

$$\lambda z = \lambda re^{i\theta}.$$

Le module est multiplié par λ , mais l'angle θ ne change pas.

Ainsi,

$$\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Dans notre situation,

$$d = \lambda b$$

avec $\lambda > 0$.

Donc

$$\arg(d) \equiv \arg(b) \pmod{2\pi}.$$

Or

$$b = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Par conséquent,

$$\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

Finalement,

$$\boxed{\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}}.$$

Autre rédaction à partir de la forme exponentielle

Nous savons que

$$b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Ainsi,

$$d = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Or

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

Cette expression est donc directement la forme exponentielle de d :

$$d = |d| e^{i\frac{\pi}{12}},$$

avec

$$|d| = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right).$$

On lit alors immédiatement

$$\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

Vérification

On peut calculer explicitement d .

Comme

$$d = a + 1,$$

on a

$$d = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Donc

$$d = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont strictement positives, donc d appartient au premier quadrant.

De plus,

$$\tan(\arg d) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

En rationalisant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Or

$$\tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Comme d est dans le premier quadrant, on retrouve

$$\arg(d) = \frac{\pi}{12}.$$

Résultat

Comme

$$d = (b + \bar{b}) b$$

et que

$$b + \bar{b} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) > 0,$$

le nombre d possède le même argument que b .

Or

$$b = e^{i \frac{\pi}{12}}.$$

Ainsi,

$$\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

3.a. Perpendicularité des droites (AC) et (OD)

Nous devons vérifier que

$$\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i,$$

puis en déduire que les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

Étape 1 : simplifier le numérateur $a - c$

Nous savons que

$$c = 1.$$

Ainsi,

$$a - c = a - 1.$$

D'autre part, la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ nous a donné

$$d = a + c.$$

Puisque $c = 1$, on a

$$d = a + 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{a - c}{d} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Étape 2 : utiliser l'identité de la question 1.c

Dans la première partie, nous avons démontré que

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1).$$

Comme $a + 1 \neq 0$, nous pouvons diviser les deux membres par $a + 1$:

$$\frac{a - 1}{a + 1} = (2 - \sqrt{3})i.$$

Or

$$\frac{a - c}{d} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i.}$$

Vérification directe par calcul algébrique

Calculons directement le quotient pour confirmer le résultat.

On a

$$a - c = a - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

De plus,

$$d = a + 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Donc

$$\frac{a - c}{d} = \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}i}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, on obtient

$$\frac{a - c}{d} = \frac{\sqrt{3} - 2 + i}{\sqrt{3} + 2 + i}.$$

On multiplie alors le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{a - c}{d} = \frac{(\sqrt{3} - 2 + i)(\sqrt{3} + 2 - i)}{(\sqrt{3} + 2 + i)(\sqrt{3} + 2 - i)}.$$

Le dénominateur vaut

$$(\sqrt{3} + 2)^2 + 1.$$

Calculons-le :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} + 2)^2 + 1 &= 3 + 4\sqrt{3} + 4 + 1 \\
 &= 8 + 4\sqrt{3} \\
 &= 4(2 + \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

Développons maintenant le numérateur :

$$(\sqrt{3} - 2 + i)(\sqrt{3} + 2 - i).$$

En utilisant la distributivité,

$$(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) - (\sqrt{3} - 2)i + i(\sqrt{3} + 2) - i^2.$$

Or

$$(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) = 3 - 4 = -1$$

et

$$-i^2 = 1.$$

Les parties réelles s'annulent donc :

$$-1 + 1 = 0.$$

Pour la partie imaginaire,

$$-(\sqrt{3} - 2)i + (\sqrt{3} + 2)i = 4i.$$

Le numérateur est donc

$$4i.$$

Ainsi,

$$\frac{a - c}{d} = \frac{4i}{4(2 + \sqrt{3})} = \frac{i}{2 + \sqrt{3}}.$$

Rationalisons :

$$\begin{aligned}\frac{i}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}i \\ &= (2 - \sqrt{3})i.\end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\boxed{\frac{a - c}{d} = (2 - \sqrt{3})i}.$$

Étape 3 : interpréter géométriquement le quotient

Le nombre

$$a - c$$

est l'afixe du vecteur

$$\overrightarrow{CA}.$$

En effet, l'afixe de $\overrightarrow{CA}$ est

$$a - c.$$

Le nombre

$$d$$

est l'afixe du vecteur

$$\overrightarrow{OD},$$

puisque l'afixe de O est 0.

Ainsi,

$$\frac{a - c}{d}$$

est le quotient des affixes de deux vecteurs directeurs respectifs des droites (AC) et (OD) .

Or

$$\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i.$$

Le nombre $2 - \sqrt{3}$ est un réel strictement positif et i est un nombre imaginaire pur.

Par conséquent,

$$(2 - \sqrt{3})i \in i\mathbb{R}^*.$$

Le quotient est donc un imaginaire pur non nul.

Rappel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_u et z_v .

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\frac{z_u}{z_v} \in i\mathbb{R}^*.$$

En effet, cela signifie que l'argument du quotient est égal à

$$\frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

c'est-à-dire que l'angle entre les deux directions vaut un angle droit.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont perpendiculaires.

Comme $\overrightarrow{CA}$ dirige la droite (AC) et $\overrightarrow{OD}$ dirige la droite (OD) , on en déduit que

$$\boxed{(AC) \perp (OD)}.$$

Interprétation avec les arguments

On peut également écrire

$$(2 - \sqrt{3})i = (2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $2 - \sqrt{3} > 0$, un argument de ce nombre est

$$\frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$\arg\left(\frac{a-c}{d}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Or

$$\arg\left(\frac{a-c}{d}\right) \equiv \arg(a-c) - \arg(d) \pmod{2\pi}.$$

Donc l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{CA}$ est

$$\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Les deux directions sont donc perpendiculaires.

Résultat

Comme

$$c = 1 \quad \text{et} \quad d = a + 1,$$

on a

$$\frac{a-c}{d} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Or

$$a-1 = (2-\sqrt{3})i(a+1).$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{a-c}{d} = (2-\sqrt{3})i}.$$

Ce quotient est un imaginaire pur non nul. Par conséquent, les directions des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont perpendiculaires.

Finalement,

$$\boxed{(AC) \perp (OD)}.$$

Synthèse finale

La translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme A en D . Par conséquent,

$$d = a + c = a + 1.$$

En utilisant

$$a = b^2 \quad \text{et} \quad 1 = b\bar{b},$$

on obtient

$$\begin{aligned} d &= b^2 + b\bar{b} \\ &= b(b + \bar{b}). \end{aligned}$$

Or

$$b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

Ainsi,

$$d = \lambda b$$

avec $\lambda > 0$, ce qui entraîne

$$\boxed{O, B \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

Puisque le coefficient λ est positif, d et b ont le même argument. Donc

$$\boxed{\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}}.$$

Enfin,

$$\frac{a - c}{d} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Comme

$$a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1),$$

on obtient

$$\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i.$$

Ce quotient étant un imaginaire pur non nul, les droites correspondantes sont perpendiculaires :

$$(AC) \perp (OD).$$

Résultats définitifs

$$d = b(b + \bar{b})$$

O , B et D sont alignés

$$\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

$$\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$$

$$(AC) \perp (OD)$$

Exercice 2 : Nombres complexes

Question 3.b

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

Dans le plan complexe, on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad b = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad c = 1.$$

On note O l'origine du plan complexe, dont l'affixe est donc

$$0.$$

La translation T de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme le point A en un point D d'affixe d :

$$T(A) = D.$$

Dans les questions précédentes, on a montré que

$$d = a + c = a + 1.$$

On a également obtenu

$$|a| = 1$$

et

$$(AC) \perp (OD).$$

Énoncé

Montrer que le quadrilatère $OCDA$ est un losange.

Correction détaillée

Nous devons montrer que le quadrilatère dont les sommets sont pris dans l'ordre

$$O, \quad C, \quad D, \quad A$$

est un losange.

Nous présenterons d'abord une démonstration fondée sur les affixes et les vecteurs, puis une seconde démonstration utilisant la perpendicularité des diagonales obtenue à la question précédente.

Première méthode : montrer que les quatre côtés ont la même longueur

Étape 1 : rappeler les affixes des quatre sommets

Les affixes des points sont :

$$z_O = 0, \quad z_C = c = 1, \quad z_A = a, \quad z_D = d = a + 1.$$

Ainsi,

$$O(0), \quad C(1), \quad A(a), \quad D(a + 1).$$

Étape 2 : calculer les affixes des vecteurs des côtés

Le quadrilatère étudié est $OCDA$. Ses côtés successifs sont donc :

$$[OC], \quad [CD], \quad [DA], \quad [AO].$$

Calculons l'afixe de chacun des vecteurs correspondants.

Affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ L'afixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est

$$z_C - z_O = c - 0.$$

Comme $c = 1$, on obtient

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{OC}) = 1}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ L'afixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est

$$z_D - z_C = d - c.$$

Or

$$d = a + c.$$

Donc

$$\begin{aligned} d - c &= (a + c) - c \\ &= a. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{CD}) = a}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est

$$z_D - z_A = d - a.$$

Comme

$$d = a + c,$$

on obtient

$$\begin{aligned} d - a &= (a + c) - a \\ &= c \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = 1}.$$

On remarque donc déjà que

$$\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = \text{aff}(\overrightarrow{OC}).$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AO}$ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AO}$ est

$$z_O - z_A = 0 - a = -a.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{AO}) = -a}.$$

De même, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est

$$z_C - z_D = c - d.$$

Or

$$d = a + c,$$

donc

$$\begin{aligned} c - d &= c - (a + c) \\ &= -a. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{aff}(\overrightarrow{DC}) = -a = \text{aff}(\overrightarrow{AO}).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO}}.$$

Étape 3 : en déduire que $OCDA$ est un parallélogramme

Nous avons obtenu

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Cela signifie que les côtés opposés $[AD]$ et $[OC]$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Nous avons également

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO}.$$

Ainsi, les deux paires de côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

On peut donc conclure que

$OCDA$ est un parallélogramme.

Rappel

Un quadrilatère est un parallélogramme si l'on peut montrer que deux côtés opposés sont représentés par des vecteurs égaux.

Par exemple, pour un quadrilatère $MNPQ$, si

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP},$$

alors $MNPQ$ est un parallélogramme.

Dans notre situation,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD},$$

ce qui suffit déjà à montrer que $OCDA$ est un parallélogramme.

Étape 4 : calculer la longueur OC

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est

$$c = 1.$$

La longueur OC est donc le module de cette affixe :

$$\begin{aligned} OC &= |c| \\ &= |1| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{OC = 1}.$$

Étape 5 : calculer la longueur CD

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est

$$d - c = a.$$

Donc

$$CD = |d - c| = |a|.$$

Or, dans la première question, nous avons établi que

$$|a| = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{CD = 1}.$$

Nous avons donc

$$OC = CD.$$

Or $OCDA$ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Ainsi,

$$\boxed{OCDA \text{ est un losange.}}$$

Rappel

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.

Ainsi, si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme sont de même longueur, alors ses quatre côtés ont la même longueur.

Un parallélogramme dont les quatre côtés ont la même longueur est un losange.

Étape 6 : vérification directe des quatre longueurs

Vérifions explicitement que les quatre côtés du quadrilatère ont la même longueur.

Longueur OC

$$OC = |c - 0| = |1| = 1.$$

Longueur CD

$$\begin{aligned}
 CD &= |d - c| \\
 &= |a + c - c| \\
 &= |a| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Longueur DA

$$\begin{aligned}
 DA &= |a - d| \\
 &= |a - (a + c)| \\
 &= |-c| \\
 &= |c| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Longueur AO

$$\begin{aligned}
 AO &= |0 - a| \\
 &= |-a| \\
 &= |a| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$OC = CD = DA = AO = 1.$$

Le quadrilatère $OCDA$ possède donc quatre côtés de même longueur.

On conclut directement que

 $OCDA$ est un losange.
RésultatLa translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme A en D , donc

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Ainsi, le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

D'autre part,

$$OC = |c| = 1$$

et

$$CD = |d - c| = |a| = 1.$$

Le parallélogramme $OCDA$ possède donc deux côtés consécutifs de même longueur. Il s'agit par conséquent d'un losange.

$OCDA$ est un losange.

Deuxième méthode : utiliser les diagonales du parallélogramme

Cette méthode utilise le résultat de la question 3.a :

$$(AC) \perp (OD).$$

Étape 1 : montrer que $OCDA$ est un parallélogramme

Comme D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, on a, par définition de la translation,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Les côtés $[AD]$ et $[OC]$ sont deux côtés opposés du quadrilatère $OCDA$.

Ils sont parallèles et de même longueur.

Par conséquent,

$OCDA$ est un parallélogramme.

Étape 2 : identifier les diagonales du quadrilatère

Dans le quadrilatère dont les sommets sont pris dans l'ordre

$$O, \quad C, \quad D, \quad A,$$

les côtés sont

$$[OC], \quad [CD], \quad [DA], \quad [AO].$$

Les segments joignant les sommets opposés sont donc :

$$[OD]$$

et

$$[CA].$$

Les diagonales du parallélogramme $OCDA$ sont donc les droites

$$(OD) \quad \text{et} \quad (AC).$$

Étape 3 : utiliser la question précédente

La question 3.a a permis de montrer que

$$(AC) \perp (OD).$$

Les deux diagonales du parallélogramme $OCDA$ sont donc perpendiculaires.

Rappel

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors ce parallélogramme est un losange.

En effet, soient I le point d'intersection des diagonales et $MNPQ$ un parallélogramme. Les diagonales se coupent en leur milieu, donc

$$IM = IP \quad \text{et} \quad IN = IQ.$$

Si les diagonales sont perpendiculaires, les triangles rectangles formés autour de I permettent, par le théorème de Pythagore, d'établir que tous les côtés du parallélogramme ont la même longueur.

Comme $OCDA$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, on en déduit que

$OCDA$ est un losange.

Résultat

La translation donne

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Ainsi, $OCDA$ est un parallélogramme.

Ses diagonales sont $[OD]$ et $[AC]$. Or, d'après la question 3.a,

$$(OD) \perp (AC).$$

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Par conséquent,

$OCDA$ est un losange.

Rédaction synthétique prête à recopier

Puisque D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, on a

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Par conséquent, le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

D'autre part,

$$OC = |c| = |1| = 1.$$

De plus, comme

$$d = a + c,$$

on a

$$d - c = a.$$

Ainsi,

$$CD = |d - c| = |a|.$$

Or

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Donc

$$CD = 1 = OC.$$

Le parallélogramme $OCDA$ possède deux côtés consécutifs de même longueur. Il est donc un losange.

$OCDA$ est un losange.

Synthèse finale

Nous disposons de

$$z_O = 0, \quad z_C = 1, \quad z_A = a, \quad z_D = a + 1.$$

Les affixes des vecteurs des côtés sont :

$$\text{aff}(\overrightarrow{OC}) = 1,$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{CD}) = a,$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{DA}) = -1,$$

et

$$\text{aff}(\overrightarrow{AO}) = -a.$$

Leurs longueurs sont donc :

$$OC = |1| = 1,$$

$$CD = |a| = 1,$$

$$DA = |-1| = 1,$$

et

$$AO = |-a| = |a| = 1.$$

Ainsi,

$$OC = CD = DA = AO.$$

Le quadrilatère possède quatre côtés de même longueur. Par définition, il s'agit d'un losange.

Résultat définitif

$$OC = CD = DA = AO = 1$$

et par conséquent

$OCDA$ est un losange.

Exercice 2 : Nombres complexes

Question 3.b

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

Dans le plan complexe, on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad b = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad c = 1.$$

On note O l'origine du plan complexe, dont l'affixe est donc

$$0.$$

La translation T de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme le point A en un point D d'affixe d :

$$T(A) = D.$$

Dans les questions précédentes, on a montré que

$$d = a + c = a + 1.$$

On a également obtenu

$$|a| = 1$$

et

$$(AC) \perp (OD).$$

Énoncé

Montrer que le quadrilatère $OCDA$ est un losange.

Correction détaillée

Nous devons montrer que le quadrilatère dont les sommets sont pris dans l'ordre

$$O, \quad C, \quad D, \quad A$$

est un losange.

Nous présenterons d'abord une démonstration fondée sur les affixes et les vecteurs, puis une seconde démonstration utilisant la perpendicularité des diagonales obtenue à la question précédente.

Première méthode : montrer que les quatre côtés ont la même longueur

Étape 1 : rappeler les affixes des quatre sommets

Les affixes des points sont :

$$z_O = 0, \quad z_C = c = 1, \quad z_A = a, \quad z_D = d = a + 1.$$

Ainsi,

$$O(0), \quad C(1), \quad A(a), \quad D(a+1).$$

Étape 2 : calculer les affixes des vecteurs des côtés

Le quadrilatère étudié est $OCDA$. Ses côtés successifs sont donc :

$$[OC], \quad [CD], \quad [DA], \quad [AO].$$

Calculons l'afixe de chacun des vecteurs correspondants.

Affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ L'afixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est

$$z_C - z_O = c - 0.$$

Comme $c = 1$, on obtient

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{OC}) = 1}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ L'afixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est

$$z_D - z_C = d - c.$$

Or

$$d = a + c.$$

Donc

$$\begin{aligned} d - c &= (a + c) - c \\ &= a. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{CD}) = a}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est

$$z_D - z_A = d - a.$$

Comme

$$d = a + c,$$

on obtient

$$\begin{aligned} d - a &= (a + c) - a \\ &= c \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = 1}.$$

On remarque donc déjà que

$$\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = \text{aff}(\overrightarrow{OC}).$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}}.$$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AO}$ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AO}$ est

$$z_O - z_A = 0 - a = -a.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{aff}(\overrightarrow{AO}) = -a}.$$

De même, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est

$$z_C - z_D = c - d.$$

Or

$$d = a + c,$$

donc

$$\begin{aligned} c - d &= c - (a + c) \\ &= -a. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{aff}(\overrightarrow{DC}) = -a = \text{aff}(\overrightarrow{AO}).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO}}.$$

Étape 3 : en déduire que $OCDA$ est un parallélogramme

Nous avons obtenu

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Cela signifie que les côtés opposés $[AD]$ et $[OC]$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Nous avons également

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO}.$$

Ainsi, les deux paires de côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

On peut donc conclure que

$OCDA$ est un parallélogramme.

Rappel

Un quadrilatère est un parallélogramme si l'on peut montrer que deux côtés opposés sont représentés par des vecteurs égaux.

Par exemple, pour un quadrilatère $MNPQ$, si

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP},$$

alors $MNPQ$ est un parallélogramme.

Dans notre situation,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD},$$

ce qui suffit déjà à montrer que $OCDA$ est un parallélogramme.

Étape 4 : calculer la longueur OC

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est

$$c = 1.$$

La longueur OC est donc le module de cette affixe :

$$\begin{aligned} OC &= |c| \\ &= |1| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$OC = 1.$$

Étape 5 : calculer la longueur CD

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$ est

$$d - c = a.$$

Donc

$$CD = |d - c| = |a|.$$

Or, dans la première question, nous avons établi que

$$|a| = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{CD = 1}.$$

Nous avons donc

$$OC = CD.$$

Or $OCDA$ est un parallélogramme.

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Ainsi,

$$\boxed{OCDA \text{ est un losange.}}$$

Rappel

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur.

Ainsi, si deux côtés consécutifs d'un parallélogramme sont de même longueur, alors ses quatre côtés ont la même longueur.

Un parallélogramme dont les quatre côtés ont la même longueur est un losange.

Étape 6 : vérification directe des quatre longueurs

Vérifions explicitement que les quatre côtés du quadrilatère ont la même longueur.

Longueur OC

$$OC = |c - 0| = |1| = 1.$$

Longueur CD

$$\begin{aligned}
 CD &= |d - c| \\
 &= |a + c - c| \\
 &= |a| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Longueur DA

$$\begin{aligned}
 DA &= |a - d| \\
 &= |a - (a + c)| \\
 &= |-c| \\
 &= |c| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Longueur AO

$$\begin{aligned}
 AO &= |0 - a| \\
 &= |-a| \\
 &= |a| \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$OC = CD = DA = AO = 1.$$

Le quadrilatère $OCDA$ possède donc quatre côtés de même longueur.

On conclut directement que

 $OCDA$ est un losange.
RésultatLa translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ transforme A en D , donc

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Ainsi, le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

D'autre part,

$$OC = |c| = 1$$

et

$$CD = |d - c| = |a| = 1.$$

Le parallélogramme $OCDA$ possède donc deux côtés consécutifs de même longueur. Il s'agit par conséquent d'un losange.

$OCDA$ est un losange.

Deuxième méthode : utiliser les diagonales du parallélogramme

Cette méthode utilise le résultat de la question 3.a :

$$(AC) \perp (OD).$$

Étape 1 : montrer que $OCDA$ est un parallélogramme

Comme D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, on a, par définition de la translation,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Les côtés $[AD]$ et $[OC]$ sont deux côtés opposés du quadrilatère $OCDA$.

Ils sont parallèles et de même longueur.

Par conséquent,

$OCDA$ est un parallélogramme.

Étape 2 : identifier les diagonales du quadrilatère

Dans le quadrilatère dont les sommets sont pris dans l'ordre

$$O, \quad C, \quad D, \quad A,$$

les côtés sont

$$[OC], \quad [CD], \quad [DA], \quad [AO].$$

Les segments joignant les sommets opposés sont donc :

$$[OD]$$

et

$$[CA].$$

Les diagonales du parallélogramme $OCDA$ sont donc les droites

$$(OD) \quad \text{et} \quad (AC).$$

Étape 3 : utiliser la question précédente

La question 3.a a permis de montrer que

$$(AC) \perp (OD).$$

Les deux diagonales du parallélogramme $OCDA$ sont donc perpendiculaires.

Rappel

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors ce parallélogramme est un losange.

En effet, soient I le point d'intersection des diagonales et $MNPQ$ un parallélogramme. Les diagonales se coupent en leur milieu, donc

$$IM = IP \quad \text{et} \quad IN = IQ.$$

Si les diagonales sont perpendiculaires, les triangles rectangles formés autour de I permettent, par le théorème de Pythagore, d'établir que tous les côtés du parallélogramme ont la même longueur.

Comme $OCDA$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, on en déduit que

$OCDA$ est un losange.

Résultat

La translation donne

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Ainsi, $OCDA$ est un parallélogramme.

Ses diagonales sont $[OD]$ et $[AC]$. Or, d'après la question 3.a,

$$(OD) \perp (AC).$$

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Par conséquent,

$OCDA$ est un losange.

Rédaction synthétique prête à recopier

Puisque D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, on a

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}.$$

Par conséquent, le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

D'autre part,

$$OC = |c| = |1| = 1.$$

De plus, comme

$$d = a + c,$$

on a

$$d - c = a.$$

Ainsi,

$$CD = |d - c| = |a|.$$

Or

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Donc

$$CD = 1 = OC.$$

Le parallélogramme $OCDA$ possède deux côtés consécutifs de même longueur. Il est donc un losange.

$OCDA$ est un losange.

Synthèse finale

Nous disposons de

$$z_O = 0, \quad z_C = 1, \quad z_A = a, \quad z_D = a + 1.$$

Les affixes des vecteurs des côtés sont :

$$\text{aff}(\overrightarrow{OC}) = 1,$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{CD}) = a,$$

$$\text{aff}(\overrightarrow{DA}) = -1,$$

et

$$\text{aff}(\overrightarrow{AO}) = -a.$$

Leurs longueurs sont donc :

$$OC = |1| = 1,$$

$$CD = |a| = 1,$$

$$DA = |-1| = 1,$$

et

$$AO = |-a| = |a| = 1.$$

Ainsi,

$$OC = CD = DA = AO.$$

Le quadrilatère possède quatre côtés de même longueur. Par définition, il s'agit d'un losange.

Résultat définitif

$$OC = CD = DA = AO = 1$$

et par conséquent

$OCDA$ est un losange.

Exercice 3 : Probabilités

Énoncé et correction complète et très détaillée

Énoncé

Une urne contient :

5 boules blanches, 4 boules noires et 2 boules vertes.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées sont de même couleur. »

et

B : « Tirer au moins une boule verte. »

1.a. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{165}.$$

1.b. Calculer

$$\mathbb{P}(\overline{B}),$$

où $\overline{B}$ est l'événement contraire de B , puis en déduire que

$$\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}.$$

2. Calculer

$$\mathbb{P}(A \cup B).$$

Analyse préliminaire de l'expérience

L'urne contient au total

$$5 + 4 + 2 = 11$$

boules.

On tire simultanément trois boules.

Le mot *simultanément* signifie que l'ordre dans lequel les boules sont tirées n'a aucune importance.

Par exemple, tirer une boule blanche, puis une noire, puis une verte revient au même tirage que tirer une verte, puis une blanche, puis une noire.

Il faut donc utiliser des combinaisons.

Rappel

Le nombre de manières de choisir p objets parmi n objets, sans tenir compte de l'ordre, est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Dans cet exercice, les issues élémentaires sont les groupes de trois boules choisis parmi les onze boules de l'urne.

Le nombre total de tirages possibles est donc

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{11}{3}.$$

Calculons cette combinaison :

$$\begin{aligned} \binom{11}{3} &= \frac{11!}{3!8!} \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{990}{6} \\ &= 165. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Card}(\Omega) = 165}.$$

Comme le tirage est effectué au hasard et que toutes les boules sont indiscernables au toucher, les groupes de trois boules sont équiprobables.

Pour tout événement E , on pourra donc utiliser la formule

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{nombre de tirages favorables à } E}{\text{nombre total de tirages possibles}}.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

1.a. Calcul de $\mathbb{P}(A)$

L'événement A est défini par

A : « Les trois boules tirées sont de même couleur. »

Pour réaliser l'événement A , plusieurs situations sont théoriquement possibles :

- tirer trois boules blanches ;
- tirer trois boules noires ;
- tirer trois boules vertes.

Nous allons étudier séparément ces trois possibilités.

Premier cas : tirer trois boules blanches

L'urne contient cinq boules blanches.

Le nombre de manières de choisir trois boules blanches parmi les cinq est

$$\binom{5}{3}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} &= \frac{5!}{3!2!} \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Il existe donc

$$\boxed{10}$$

tirages composés de trois boules blanches.

Deuxième cas : tirer trois boules noires

L'urne contient quatre boules noires.

Le nombre de manières de choisir trois boules noires parmi les quatre est

$$\binom{4}{3}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\binom{4}{3} &= \frac{4!}{3! 1!} \\ &= 4.\end{aligned}$$

Il existe donc

$$\boxed{4}$$

tirages composés de trois boules noires.

Troisième cas : tirer trois boules vertes

L'urne ne contient que deux boules vertes.

Il est donc impossible d'en tirer trois.

Mathématiquement,

$$\binom{2}{3} = 0.$$

Il existe donc

$$\boxed{0}$$

tirage composé de trois boules vertes.

Point important

Il ne faut pas compter le cas « trois boules vertes », car l'urne ne contient que deux boules vertes.

Nombre total de tirages favorables à A

Les événements

« tirer trois blanches »

et

« tirer trois noires »

sont incompatibles : un même tirage ne peut pas être simultanément composé de trois boules blanches et de trois boules noires.

On additionne donc les nombres de cas favorables :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A) &= \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{2}{3} \\ &= 10 + 4 + 0 \\ &= 14.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Card}(A) = 14}.$$

La probabilité de l'événement A est alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{14}{165}.\end{aligned}$$

La fraction est irréductible, car $14 = 2 \times 7$ et

$$165 = 3 \times 5 \times 11$$

n'ont aucun facteur premier commun.

Résultat

Le nombre total de tirages est

$$\binom{11}{3} = 165.$$

Les tirages favorables sont :

$$\binom{5}{3} = 10$$

tirages de trois boules blanches et

$$\binom{4}{3} = 4$$

tirages de trois boules noires.

Ainsi,

$$\text{Card}(A) = 10 + 4 = 14.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{165}.$$

1.b. Calcul de $\mathbb{P}(\overline{B})$ puis de $\mathbb{P}(B)$

L'événement B est

B : « Tirer au moins une boule verte. »

L'expression « au moins une » signifie que le tirage peut contenir :

- exactement une boule verte ;
- ou exactement deux boules vertes.

Il ne peut pas contenir trois boules vertes, car l'urne ne contient que deux boules vertes.

Cependant, au lieu de compter séparément les tirages contenant une ou deux boules vertes, l'énoncé demande d'utiliser l'événement contraire $\overline{B}$.

Étape 1 : interprétation de l'événement contraire

L'événement contraire de

B : « tirer au moins une boule verte »

est

$\overline{B}$: « ne tirer aucune boule verte ».

Autrement dit, pour réaliser $\overline{B}$, les trois boules doivent être choisies uniquement parmi les boules blanches et les boules noires.

L'urne contient :

5 boules blanches

et

4 boules noires.

Le nombre total de boules non vertes est donc

$$5 + 4 = 9.$$

Le nombre de tirages de trois boules ne contenant aucune boule verte est

$$\binom{9}{3}.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\binom{9}{3} &= \frac{9!}{3!6!} \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{504}{6} \\ &= 84.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Card}(\overline{B}) = 84}.$$

La probabilité de $\overline{B}$ est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}) &= \frac{\text{Card}(\overline{B})}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{84}{165}.\end{aligned}$$

Simplifions cette fraction.

Comme

$$84 = 3 \times 28$$

et

$$165 = 3 \times 55,$$

on obtient

$$\frac{84}{165} = \frac{28}{55}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{28}{55}}.$$

Étape 2 : déduction de la probabilité de B

Deux événements contraires ont une somme de probabilités égale à 1 :

$$\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{B}) = 1.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}).$$

En remplaçant $\mathbb{P}(\overline{B})$ par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \frac{28}{55} \\ &= \frac{55}{55} - \frac{28}{55} \\ &= \frac{27}{55}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}}.$$

Vérification

On peut vérifier le résultat en comptant directement les tirages contenant au moins une boule verte.

Cas 1 : exactement une boule verte

On choisit une boule verte parmi les deux, puis deux boules non vertes parmi les neuf :

$$\binom{2}{1} \binom{9}{2}.$$

On obtient

$$\binom{2}{1} \binom{9}{2} = 2 \times 36 = 72.$$

Cas 2 : exactement deux boules vertes

On choisit les deux boules vertes, puis une boule non verte parmi les neuf :

$$\binom{2}{2} \binom{9}{1} = 1 \times 9 = 9.$$

Le nombre total de tirages favorables à B est donc

$$72 + 9 = 81.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{81}{165}.$$

En simplifiant par 3 :

$$\frac{81}{165} = \frac{27}{55}.$$

On retrouve bien

$$\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}.$$

Résultat

L'événement contraire de B est

$\overline{B}$: « ne tirer aucune boule verte ».

Les trois boules sont alors choisies parmi les neuf boules blanches ou noires.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}.$$

Par complémentarité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= 1 - \frac{28}{55} \\ &= \frac{27}{55}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{28}{55}}$$

et

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}}.$$

2. Calcul de $\mathbb{P}(A \cup B)$

L'événement

$$A \cup B$$

est réalisé lorsque :

- les trois boules tirées sont de même couleur ;
- ou le tirage contient au moins une boule verte ;
- ou les deux conditions sont simultanément réalisées.

Pour calculer la probabilité d'une union, on utilise la formule générale

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Il faut donc commencer par étudier l'intersection $A \cap B$.

Étape 1 : étude de l'événement $A \cap B$

L'événement $A \cap B$ signifie que les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

A : « les trois boules sont de même couleur »

et

B : « il y a au moins une boule verte ».

Si les trois boules sont de même couleur et qu'au moins l'une d'elles est verte, alors les trois boules doivent nécessairement être vertes.

En effet, puisque les trois boules ont la même couleur, dès qu'une boule est verte, les deux autres doivent également être vertes.

Ainsi,

$$A \cap B = \text{« tirer trois boules vertes »}.$$

Mais l'urne ne contient que deux boules vertes.

Il est donc impossible de tirer trois boules vertes.

Par conséquent,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = 0}.$$

Les événements A et B sont donc incompatibles.

Point important

Les événements A et B ne sont pas contraires, mais ils sont incompatibles. Ils sont incompatibles parce qu'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Étape 2 : application de la formule de l'union

Nous avons

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Comme

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,$$

il vient

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Or

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{165}$$

et

$$\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}.$$

Pour additionner ces fractions, nous les mettons au même dénominateur.

Comme

$$165 = 3 \times 55,$$

on a

$$\frac{27}{55} = \frac{27 \times 3}{55 \times 3} = \frac{81}{165}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{14}{165} + \frac{81}{165} \\ &= \frac{95}{165}.\end{aligned}$$

Simplifions par 5 :

$$\frac{95}{165} = \frac{19}{33}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{19}{33}}.$$

Vérification directe par dénombrement

Nous pouvons vérifier ce résultat en comptant directement les tirages favorables à $A \cup B$.

L'événement $A \cup B$ regroupe :

- les tirages de trois boules blanches ;
- les tirages de trois boules noires ;
- les tirages contenant au moins une boule verte.

Ces trois catégories sont deux à deux disjointes.

Le nombre de tirages de trois boules blanches est

$$\binom{5}{3} = 10.$$

Le nombre de tirages de trois boules noires est

$$\binom{4}{3} = 4.$$

Le nombre de tirages contenant au moins une boule verte est

$$81.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B) &= 10 + 4 + 81 \\ &= 95.\end{aligned}$$

La probabilité est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \frac{95}{165} \\ &= \frac{19}{33}.\end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

Résultat

L'événement $A \cap B$ correspondrait à tirer trois boules vertes.

Or l'urne ne contient que deux boules vertes. Ainsi,

$$A \cap B = \emptyset$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{14}{165} + \frac{27}{55} \\ &= \frac{14}{165} + \frac{81}{165} \\ &= \frac{95}{165} \\ &= \frac{19}{33}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{19}{33}}.$$

Synthèse finale

L'urne contient

$$11$$

boules au total.

Le nombre total de tirages simultanés de trois boules est

$$\binom{11}{3} = 165.$$

Pour l'événement A , les trois boules doivent être soit toutes blanches, soit toutes noires :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{10 + 4}{165} \\ &= \frac{14}{165}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{14}{165}}.$$

Pour l'événement contraire de B , aucune boule ne doit être verte. Les trois boules sont alors choisies parmi les neuf boules non vertes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}) &= \frac{\binom{9}{3}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{84}{165} \\ &= \frac{28}{55}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 1 - \frac{28}{55} \\ &= \frac{27}{55}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}.$$

Enfin, $A \cap B$ est impossible, car il faudrait tirer trois boules vertes, alors que l'urne n'en contient que deux.

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \\ &= \frac{14}{165} + \frac{81}{165} \\ &= \frac{95}{165} \\ &= \frac{19}{33}. \end{aligned}$$

Résultats définitifs

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{165}$$

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{28}{55}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{27}{55}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{19}{33}$$

Exercice 3 : Probabilités

Question 3 : Loi d'une variable aléatoire

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données de l'exercice

Une urne contient cinq boules blanches, quatre boules noires et deux boules vertes.

Le nombre total de boules est donc

$$5 + 4 + 2 = 11.$$

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

Comme le tirage est simultané, l'ordre n'intervient pas. Le nombre total de tirages possibles est donc

$$\begin{aligned}\text{Card}(\Omega) &= \binom{11}{3} \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 165.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Card}(\Omega) = 165}.$$

Énoncé

On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

3.a. Copier et compléter le tableau représentant la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$			

3.b. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{6}{11}.$$

3.a. Loi de probabilité de la variable aléatoire X

1. Valeurs possibles de X

La variable aléatoire X compte le nombre de boules vertes tirées parmi les trois boules choisies.

L'urne contient seulement deux boules vertes. Il est donc impossible d'obtenir trois boules vertes.

Ainsi, X peut prendre les valeurs

$$\boxed{0, 1, 2}.$$

2. Calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$

L'événement $\{X = 0\}$ signifie que le tirage ne contient aucune boule verte.

On choisit donc :

- zéro boule verte parmi les deux ;
- trois boules non vertes parmi les neuf boules blanches ou noires.

Le nombre de cas favorables est

$$\binom{2}{0} \binom{9}{3}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \frac{\binom{2}{0} \binom{9}{3}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{1 \times 84}{165} \\ &= \frac{84}{165} \\ &= \frac{28}{55}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = \frac{28}{55}}.$$

3. Calcul de $\mathbb{P}(X = 1)$

L'événement $\{X = 1\}$ signifie que le tirage contient exactement une boule verte.

Il faut donc choisir :

- une boule verte parmi les deux ;

— deux boules non vertes parmi les neuf.

Le nombre de tirages favorables est

$$\binom{2}{1} \binom{9}{2}.$$

Calculons chaque combinaison :

$$\binom{2}{1} = 2$$

et

$$\begin{aligned} \binom{9}{2} &= \frac{9 \times 8}{2} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\binom{2}{1} \binom{9}{2} = 2 \times 36 = 72.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{\binom{2}{1} \binom{9}{2}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{72}{165}. \end{aligned}$$

Simplifions par 3 :

$$\frac{72}{165} = \frac{24}{55}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \frac{24}{55}}.$$

4. Calcul de $\mathbb{P}(X = 2)$

L'événement $\{X = 2\}$ signifie que le tirage contient exactement deux boules vertes.

Il faut donc choisir :

— les deux boules vertes parmi les deux ;

— une boule non verte parmi les neuf.

Le nombre de tirages favorables est

$$\binom{2}{2} \binom{9}{1}.$$

Or

$$\binom{2}{2} = 1$$

et

$$\binom{9}{1} = 9.$$

Donc

$$\binom{2}{2} \binom{9}{1} = 1 \times 9 = 9.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{\binom{2}{2} \binom{9}{1}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{9}{165}. \end{aligned}$$

Simplifions par 3 :

$$\frac{9}{165} = \frac{3}{55}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{55}}.$$

5. Tableau de la loi de probabilité

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

Vérification

La somme des probabilités d'une loi doit être égale à 1.

Vérifions :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{28}{55} + \frac{24}{55} + \frac{3}{55} \\ &= \frac{28 + 24 + 3}{55} \\ &= \frac{55}{55} \\ &= 1.\end{aligned}$$

La loi de probabilité obtenue est donc cohérente.

Résultat

La loi de probabilité de X est

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

3.b. Calcul de l'espérance de X

Première méthode : utiliser la loi de probabilité

Rappel

Si une variable aléatoire discrète X prend les valeurs

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

alors son espérance est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

L'espérance représente la valeur moyenne de X lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Dans notre cas, X prend les valeurs 0, 1 et 2.

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2).$$

En remplaçant les probabilités par leurs valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} \\ &= 0 + \frac{24}{55} + \frac{6}{55} \\ &= \frac{30}{55}. \end{aligned}$$

Simplifions cette fraction par 5 :

$$\frac{30}{55} = \frac{6}{11}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{6}{11}}.$$

Point important

Dans le calcul de l'espérance, il faut multiplier chaque valeur possible de X par la probabilité correspondante.

Il ne faut donc pas seulement additionner les probabilités.

Deuxième méthode : utilisation d'indicatrices

Cette deuxième méthode permet de vérifier le résultat de manière conceptuelle.

Numérotons les trois positions du tirage par 1, 2 et 3.

Pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, définissons la variable indicatrice I_k par

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{si la boule occupant la position } k \text{ est verte,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre total de boules vertes tirées est alors

$$X = I_1 + I_2 + I_3.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) + \mathbb{E}(I_3).$$

Pour chaque position, la probabilité que la boule correspondante soit verte est égale à la proportion de boules vertes dans l'urne :

$$\mathbb{P}(I_k = 1) = \frac{2}{11}.$$

Comme I_k prend seulement les valeurs 0 et 1,

$$\mathbb{E}(I_k) = 0 \times \mathbb{P}(I_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(I_k = 1) = \frac{2}{11}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} \\ &= \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

On retrouve donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{6}{11}}.$$

Remarque

La variable X suit une loi hypergéométrique de paramètres

$$N = 11, \quad K = 2, \quad n = 3,$$

où :

- $N = 11$ est le nombre total de boules ;
- $K = 2$ est le nombre de boules vertes ;
- $n = 3$ est le nombre de boules tirées.

L'espérance d'une loi hypergéométrique est

$$\mathbb{E}(X) = n \frac{K}{N}.$$

Ici,

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times \frac{2}{11} = \frac{6}{11}.$$

Résultat

À partir de la loi de probabilité,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} \\ &= \frac{24}{55} + \frac{6}{55} \\ &= \frac{30}{55} \\ &= \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{6}{11}}.$$

Synthèse finale

Le nombre total de tirages est

$$\binom{11}{3} = 165.$$

Pour $X = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{\binom{2}{0}\binom{9}{3}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{84}{165} \\ &= \frac{28}{55}.\end{aligned}$$

Pour $X = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{9}{2}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{72}{165} \\ &= \frac{24}{55}.\end{aligned}$$

Pour $X = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{9}{1}}{\binom{11}{3}} \\ &= \frac{9}{165} \\ &= \frac{3}{55}.\end{aligned}$$

La loi de X est donc

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} \\ &= \frac{30}{55} \\ &= \frac{6}{11}.\end{aligned}$$

Résultats définitifs

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{28}{55}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{24}{55}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{55}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{6}{11}$$

Problème : Étude de fonctions

Partie I

Énoncé et correction complète et très détaillée

Énoncé

On considère les fonctions numériques g et h définies sur

$$]0, +\infty[$$

par

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

1.a. Calculer $g(1)$ et $h(1)$.

1.b. Résoudre l'équation

$$g(x) = 0$$

dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Le graphique fourni représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions g et h dans un même repère orthonormé.

2.a. Justifier graphiquement que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - g(x) < 0,$$

et que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) - g(x) > 0.$$

Correction détaillée

1.a. Calcul de $g(1)$ et de $h(1)$

Les fonctions sont définies par

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Pour calculer l'image de 1 par chacune de ces fonctions, il suffit de remplacer la variable x par le nombre 1 dans leurs expressions.

Calcul de $g(1)$

On a

$$g(x) = 1 - \ln x.$$

En prenant $x = 1$, il vient

$$g(1) = 1 - \ln 1.$$

Nous savons que

$$\ln 1 = 0.$$

En effet, par définition du logarithme népérien,

$$\ln 1 = 0$$

car

$$e^0 = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 - \ln 1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(1) = 1}.$$

Calcul de $h(1)$

On a

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

En prenant $x = 1$, on obtient

$$h(1) = 1^2 e^{1-1}.$$

Calculons séparément les différents facteurs.

Premièrement,

$$1^2 = 1.$$

Deuxièmement,

$$1 - 1 = 0.$$

Ainsi,

$$e^{1-1} = e^0.$$

Or

$$e^0 = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 h(1) &= 1^2 e^{1-1} \\
 &= 1 \times e^0 \\
 &= 1 \times 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{h(1) = 1}.$$

Interprétation graphique

Les deux fonctions prennent la même valeur en $x = 1$:

$$g(1) = h(1) = 1.$$

Cela signifie que les deux courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ passent toutes les deux par le point

$$I(1, 1).$$

Le point $I(1, 1)$ est donc un point d'intersection des deux courbes.

Résultat

$$\boxed{g(1) = 1}$$

et

$$\boxed{h(1) = 1}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{g(1) = h(1) = 1}.$$

Les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ se rencontrent donc au point

$$\boxed{I(1, 1)}.$$

1.b. Résolution de l'équation $g(x) = 0$

Nous devons résoudre, dans l'intervalle

$$]0, +\infty[,$$

l'équation

$$g(x) = 0.$$

Comme

$$g(x) = 1 - \ln x,$$

l'équation devient

$$1 - \ln x = 0.$$

Étape 1 : isoler le logarithme

À partir de

$$1 - \ln x = 0,$$

nous pouvons soustraire 1 aux deux membres :

$$-\ln x = -1.$$

En multipliant les deux membres par -1 , on obtient

$$\ln x = 1.$$

Ainsi,

$$g(x) = 0 \iff \ln x = 1.$$

Étape 2 : utiliser la définition du logarithme népérien

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Par conséquent,

$$\ln x = 1$$

équivalent à

$$x = e^1.$$

Or

$$e^1 = e.$$

Ainsi,

$$x = e.$$

Étape 3 : vérifier que la solution appartient au domaine

La fonction g est définie sur

$$]0, +\infty[.$$

Or

$$e > 0.$$

Donc

$$e \in]0, +\infty[.$$

La valeur $x = e$ est donc bien admissible.

Étape 4 : vérification directe

Vérifions la solution dans l'équation initiale :

$$g(e) = 1 - \ln(e).$$

Or

$$\ln(e) = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} g(e) &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La valeur $x = e$ est bien solution.

Rappel

Pour tout réel $x > 0$ et tout réel a ,

$$\ln x = a \iff x = e^a.$$

Ici, avec $a = 1$,

$$\ln x = 1 \iff x = e.$$

Résultat

$$g(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0$$

$$\iff \ln x = 1$$

$$\iff x = e.$$

L'ensemble des solutions dans $]0, +\infty[$ est donc

$$S = \{e\}.$$

Interprétation graphique

Résoudre $g(x) = 0$ revient graphiquement à chercher l'abscisse du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_g)$ avec l'axe des abscisses.

La courbe $(\mathcal{C}_g)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

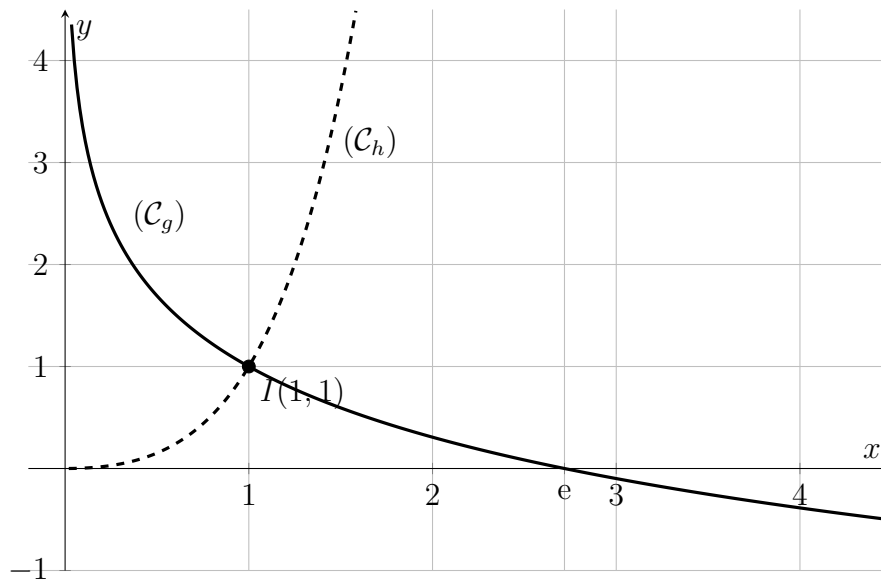
$$x = e.$$

Le point d'intersection est donc

$$E(e, 0).$$

Représentation graphique des deux fonctions

Le graphique suivant permet de visualiser les positions relatives des deux courbes autour du point d'intersection $I(1, 1)$.



Point important

La question 2.a demande une justification **graphique**. Il faut donc comparer la hauteur des deux courbes pour une même abscisse x .

Pour une abscisse fixée :

- si (C_h) est située en dessous de (C_g) , alors

$$h(x) < g(x);$$

- si (C_h) est située au-dessus de (C_g) , alors

$$h(x) > g(x).$$

2.a. Comparaison graphique de $h(x)$ et de $g(x)$

Nous devons justifier graphiquement les deux affirmations suivantes :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - g(x) < 0,$$

et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) - g(x) > 0.$$

Étape 1 : rappeler la signification d'une différence

Pour deux nombres réels u et v , on a :

$$u - v < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u < v,$$

et

$$u - v > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u > v.$$

En appliquant cette propriété à

$$u = h(x) \quad \text{et} \quad v = g(x),$$

on obtient :

$$h(x) - g(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) < g(x),$$

et

$$h(x) - g(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) > g(x).$$

Il suffit donc de comparer graphiquement les ordonnées des deux courbes $(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

Étape 2 : étude graphique sur l'intervalle $]0, 1[$

Considérons un réel quelconque

$$x \in]0, 1[.$$

Pour cette même abscisse x , on observe sur le graphique que la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est située strictement en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

L'ordonnée du point de $(\mathcal{C}_h)$ d'abscisse x est $h(x)$.

L'ordonnée du point de $(\mathcal{C}_g)$ d'abscisse x est $g(x)$.

Comme $(\mathcal{C}_h)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_g)$, on a

$$h(x) < g(x).$$

En soustrayant $g(x)$ aux deux membres, on obtient

$$h(x) - g(x) < 0.$$

Cette observation est valable pour toute abscisse x appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - g(x) < 0}.$$

Interprétation graphique

Sur l'intervalle $]0, 1[$:

$(\mathcal{C}_h)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_g)$.

Cela se traduit algébriquement par

$$h(x) < g(x),$$

puis par

$$h(x) - g(x) < 0.$$

Étape 3 : situation au point $x = 1$

Nous avons déjà calculé

$$g(1) = 1$$

et

$$h(1) = 1.$$

Donc

$$h(1) = g(1).$$

Par conséquent,

$$h(1) - g(1) = 0.$$

Graphiquement, cela signifie que les deux courbes se coupent au point

$$I(1, 1).$$

Ainsi,

$$\boxed{h(1) - g(1) = 0}.$$

Point important

Les inégalités demandées sont strictes uniquement sur les intervalles ouverts

$$]0, 1[\quad \text{et} \quad]1, +\infty[.$$

Le nombre 1 n'appartient à aucun de ces deux intervalles.

En effet, en $x = 1$, la différence n'est ni strictement négative ni strictement positive : elle est nulle.

Étape 4 : étude graphique sur l'intervalle $]1, +\infty[$

Considérons maintenant un réel quelconque

$$x \in]1, +\infty[.$$

Pour cette même abscisse x , le graphique montre que la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est située strictement au-dessus de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

L'ordonnée de $(\mathcal{C}_h)$ est donc supérieure à l'ordonnée de $(\mathcal{C}_g)$.

Ainsi,

$$h(x) > g(x).$$

En soustrayant $g(x)$ aux deux membres, on obtient

$$h(x) - g(x) > 0.$$

Cette observation étant valable pour tout réel $x > 1$, on conclut que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) - g(x) > 0.$$

Interprétation graphique

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$:

$(\mathcal{C}_h)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$.

Cela se traduit par

$$h(x) > g(x),$$

puis par

$$h(x) - g(x) > 0.$$

Étape 5 : tableau récapitulatif

Les informations graphiques obtenues peuvent être résumées dans le tableau suivant :

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
Position de $(\mathcal{C}_h)$ par rapport à $(\mathcal{C}_g)$	$(\mathcal{C}_h)$ en dessous de $(\mathcal{C}_g)$	$(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_g)$ se coupent	$(\mathcal{C}_h)$ au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$
$h(x) - g(x)$	$-$	0	$+$

On peut également présenter uniquement le signe de la différence :

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$h(x) - g(x)$	$-$	0	$+$

Résultat

D'après le graphique :

- sur $]0, 1[$, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est strictement située en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, donc

$$h(x) < g(x),$$

d'où

$$h(x) - g(x) < 0;$$

- en $x = 1$, les deux courbes se coupent au point $I(1, 1)$, donc

$$h(1) - g(1) = 0;$$

— sur $]1, +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est strictement située au-dessus de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, donc

$$h(x) > g(x),$$

d'où

$$h(x) - g(x) > 0.$$

Finalement,

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - g(x) < 0$$

et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) - g(x) > 0.$$

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 1.a

On a

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 - \ln 1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} h(1) &= 1^2 e^{1-1} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(1) = h(1) = 1}.$$

Question 1.b

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff 1 - \ln x = 0 \\ &\iff \ln x = 1 \\ &\iff x = e. \end{aligned}$$

Comme $e > 0$, cette valeur appartient bien au domaine de définition.

Par conséquent,

$$\boxed{S = \{e\}}.$$

Question 2.a

D'après le graphique, sur l'intervalle $]0, 1[$, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est strictement située en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_g)$. Par conséquent,

$$h(x) < g(x),$$

donc

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad h(x) - g(x) < 0}.$$

Au point d'abscisse 1, les deux courbes se coupent au point $I(1, 1)$. Ainsi,

$$h(1) = g(1)$$

et donc

$$h(1) - g(1) = 0.$$

Enfin, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C}_h)$ est strictement située au-dessus de la courbe $(\mathcal{C}_g)$. Ainsi,

$$h(x) > g(x),$$

donc

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad h(x) - g(x) > 0}.$$

Synthèse finale

Les résultats obtenus sont :

$$\boxed{g(1) = 1}$$

et

$$\boxed{h(1) = 1}.$$

Les deux courbes se coupent donc au point

$$\boxed{I(1, 1)}.$$

L'équation $g(x) = 0$ possède dans $]0, +\infty[$ l'unique solution

$$\boxed{x = e}.$$

Enfin, la position relative des deux courbes donne le tableau de signe :

x	$]0, 1[$	$]1, +\infty[$
$h(x) - g(x)$	$-$	$+$

Autrement dit,

$$h(x) - g(x) < 0 \quad \text{pour } 0 < x < 1$$

et

$$h(x) - g(x) > 0 \quad \text{pour } x > 1.$$

Problème : Étude de fonctions

Partie I – Questions 2.b, 2.c et 2.d

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

On considère les fonctions g et h définies sur l'intervalle

$$]0, +\infty[$$

par

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Dans les questions précédentes, on a établi que

$$g(1) = h(1) = 1$$

et que l'équation

$$g(x) = 0$$

admet pour unique solution

$$x = e.$$

On a également observé graphiquement que

$$h(x) < g(x) \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[$$

et que

$$h(x) > g(x) \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

Énoncé

2.b. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e g(x) dx = e - 2.$$

2.c. Vérifier que la fonction

$$H : x \mapsto e^{x-1} (x^2 - 2x + 2)$$

est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$, puis calculer

$$\int_0^1 h(x) dx.$$

2.d. Calculer l'aire du domaine hachuré sur le graphique précédent, en unité d'aire.

Correction détaillée

2.b. Calcul de $\int_1^e g(x) dx$

Nous devons calculer

$$\int_1^e g(x) dx.$$

Comme

$$g(x) = 1 - \ln x,$$

on obtient

$$\int_1^e g(x) dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_1^e (1 - \ln x) dx = \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx.$$

Nous devons donc calculer séparément les deux intégrales.

Étape 1 : calcul de $\int_1^e 1 dx$

Une primitive de la fonction constante $x \mapsto 1$ est la fonction $x \mapsto x$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^e 1 dx &= [x]_1^e \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_1^e 1 dx = e - 1}.$$

Étape 2 : calcul de $\int_1^e \ln x dx$ par intégration par parties

L'énoncé demande d'utiliser une intégration par parties.

Rappel

Si u et v sont deux fonctions dérivables, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

On peut retenir la formule sous la forme

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Pour calculer

$$\int_1^e \ln x dx,$$

nous choisissons

$$u(x) = \ln x$$

et

$$v'(x) = 1.$$

Ce choix est naturel, car la dérivée de $\ln x$ est simple.

On a

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Comme

$$v'(x) = 1,$$

nous pouvons prendre

$$v(x) = x.$$

Le tableau de choix est donc

$$\begin{array}{c|c} u(x) = \ln x & v'(x) = 1 \\ \hline u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = x \end{array}$$

La formule d'intégration par parties donne

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx.$$

Pour tout $x > 0$,

$$x \times \frac{1}{x} = 1.$$

Ainsi,

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx.$$

Étape 3 : calcul du terme de bord

Calculons

$$[x \ln x]_1^e.$$

Par définition,

$$[x \ln x]_1^e = e \ln(e) - 1 \ln(1).$$

Or

$$\ln(e) = 1$$

et

$$\ln(1) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}[x \ln x]_1^e &= e \times 1 - 1 \times 0 \\ &= e.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{[x \ln x]_1^e = e}.$$

D'autre part,

$$\int_1^e 1 \, dx = e - 1.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= e - (e - 1) \\ &= e - e + 1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}.$$

Étape 4 : retour à l'intégrale de g

Nous avons

$$\int_1^e g(x) \, dx = \int_1^e 1 \, dx - \int_1^e \ln x \, dx.$$

En utilisant les deux résultats précédents,

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x) \, dx &= (e - 1) - 1 \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\int_1^e g(x) \, dx = e - 2}.$$

Vérification

Une primitive de la fonction g peut s'écrire

$$G(x) = 2x - x \ln x.$$

En effet,

$$\begin{aligned}G'(x) &= 2 - (\ln x + 1) \\ &= 1 - \ln x \\ &= g(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x) dx &= G(e) - G(1) \\ &= (2e - e \ln e) - (2 - \ln 1) \\ &= (2e - e) - (2 - 0) \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat demandé.

Résultat

Par intégration par parties,

$$\int_1^e \ln x dx = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x) dx &= \int_1^e (1 - \ln x) dx \\ &= (e - 1) - 1 \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_1^e g(x) dx = e - 2}.$$

2.c. Vérification d'une primitive de h et calcul de $\int_0^1 h(x) dx$

On considère la fonction

$$H(x) = e^{x-1} (x^2 - 2x + 2).$$

Nous devons vérifier que H est une primitive de

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Cela signifie que nous devons montrer que

$$H'(x) = h(x)$$

pour tout $x > 0$.

Étape 1 : identifier un produit de deux fonctions

La fonction H est le produit des deux fonctions

$$u(x) = e^{x-1}$$

et

$$v(x) = x^2 - 2x + 2.$$

Ainsi,

$$H(x) = u(x)v(x).$$

Rappel

La dérivée d'un produit est donnée par

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Il faut donc dériver chacun des deux facteurs, puis appliquer cette formule.

Étape 2 : calcul de la dérivée de e^{x-1}

La dérivée de la fonction

$$x \mapsto e^{x-1}$$

est

$$(e^{x-1})' = (x-1)'e^{x-1}.$$

Or

$$(x-1)' = 1.$$

Donc

$$\boxed{\left(e^{x-1}\right)' = e^{x-1}}.$$

Étape 3 : calcul de la dérivée de $x^2 - 2x + 2$

On a

$$\left(x^2 - 2x + 2\right)' = 2x - 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(x^2 - 2x + 2\right)' = 2x - 2}.$$

Étape 4 : application de la formule du produit

D'après la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(e^{x-1}\right)' \left(x^2 - 2x + 2\right) \\ &\quad + e^{x-1} \left(x^2 - 2x + 2\right)'. \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées par leurs expressions,

$$H'(x) = e^{x-1} \left(x^2 - 2x + 2\right) + e^{x-1}(2x - 2).$$

Le facteur e^{x-1} est commun aux deux termes. Nous pouvons le mettre en facteur :

$$H'(x) = e^{x-1} \left[x^2 - 2x + 2 + 2x - 2\right].$$

Simplifions l'expression entre crochets :

$$-2x + 2x = 0$$

et

$$2 - 2 = 0.$$

Il reste donc

$$x^2 - 2x + 2 + 2x - 2 = x^2.$$

Par conséquent,

$$H'(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Or

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Nous avons donc

$$\boxed{H'(x) = h(x)}.$$

Ainsi, H est bien une primitive de h sur $]0, +\infty[$.

Résultat

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} H'(x) &= e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + e^{x-1}(2x - 2) \\ &= e^{x-1}(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) \\ &= x^2 e^{x-1} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{H \text{ est une primitive de } h}.$$

Étape 5 : calcul de $\int_0^1 h(x) dx$

La fonction h est continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

En effet,

$$h(x) = x^2 e^{x-1}$$

est le produit d'un polynôme et d'une fonction exponentielle, qui sont continus sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\int_0^1 h(x) dx = H(1) - H(0).$$

Calculons séparément $H(1)$ et $H(0)$.

Calcul de $H(1)$ On a

$$H(1) = e^{1-1} (1^2 - 2 \times 1 + 2).$$

Calculons :

$$e^{1-1} = e^0 = 1$$

et

$$1^2 - 2 \times 1 + 2 = 1 - 2 + 2 = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H(1) &= 1 \times 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{H(1) = 1}.$$

Calcul de $H(0)$ On a

$$H(0) = e^{0-1} (0^2 - 2 \times 0 + 2).$$

Calculons :

$$e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

et

$$0^2 - 2 \times 0 + 2 = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{1}{e} \times 2 \\ &= \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{H(0) = \frac{2}{e}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= H(1) - H(0) \\ &= 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}}.$$

On peut également écrire

$$1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$

Comme

$$e > 2,$$

cette quantité est strictement positive, ce qui est cohérent puisque

$$h(x) = x^2 e^{x-1} \geq 0$$

sur $[0, 1]$.

Vérification

Une intégrale d'une fonction positive doit être positive.

Or

$$e \simeq 2,718.$$

Donc

$$\frac{2}{e} \simeq 0,736$$

et

$$1 - \frac{2}{e} \simeq 0,264 > 0.$$

Le résultat est donc cohérent.

Résultat

Comme $H' = h$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x) dx &= H(1) - H(0) \\ &= 1 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}}.$$

2.d. Calcul de l'aire du domaine hachuré

Nous devons interpréter précisément le domaine hachuré représenté sur le graphique.

D'après le dessin, ce domaine est limité :

- par l'axe des abscisses ;
- par la courbe $(\mathcal{C}_h)$ entre les abscisses 0 et 1 ;
- par la courbe $(\mathcal{C}_g)$ entre les abscisses 1 et e.

Les deux courbes se rencontrent au point

$$I(1, 1),$$

car

$$g(1) = h(1) = 1.$$

La courbe $(\mathcal{C}_g)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e, car

$$g(e) = 0.$$

La courbe $(\mathcal{C}_h)$ rencontre l'axe des abscisses à l'origine puisque

$$h(0) = 0^2 e^{-1} = 0.$$

Le domaine hachuré est donc constitué de deux parties :

1. la partie située sous la courbe $(\mathcal{C}_h)$ entre 0 et 1 ;
2. la partie située sous la courbe $(\mathcal{C}_g)$ entre 1 et e.

Interprétation géométrique

L'aire totale est la somme des deux aires :

$$\mathcal{A} = \underbrace{\int_0^1 h(x) dx}_{\text{aire sous } (\mathcal{C}_h)} + \underbrace{\int_1^e g(x) dx}_{\text{aire sous } (\mathcal{C}_g)}.$$

Étape 1 : vérifier que les fonctions sont positives sur les intervalles concernés

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x^2 \geq 0$$

et

$$e^{x-1} > 0.$$

Ainsi,

$$h(x) = x^2 e^{x-1} \geq 0.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 h(x) dx$$

représente donc bien l'aire située entre $(\mathcal{C}_h)$ et l'axe des abscisses.

Pour tout $x \in [1, e]$, on a

$$1 \leq x \leq e.$$

Comme la fonction logarithme est croissante,

$$0 = \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e = 1.$$

Donc

$$1 - \ln x \geq 0.$$

Ainsi,

$$g(x) \geq 0 \quad \text{sur } [1, e].$$

L'intégrale

$$\int_1^e g(x) dx$$

représente donc bien une aire géométrique positive.

Étape 2 : utilisation des résultats précédents

Nous avons obtenu

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}$$

et

$$\int_1^e g(x) dx = e - 2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 h(x) dx + \int_1^e g(x) dx \\ &= \left(1 - \frac{2}{e}\right) + (e - 2). \end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 - \frac{2}{e} + e - 2 \\ &= e - 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e}}.$$

Étape 3 : autres écritures possibles

On peut mettre l'expression au même dénominateur :

$$e - 1 - \frac{2}{e} = \frac{e^2 - e - 2}{e}.$$

Or

$$e^2 - e - 2 = (e - 2)(e + 1).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A} = \frac{(e - 2)(e + 1)}{e}.$$

Les deux formes sont équivalentes :

$$\boxed{\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e} = \frac{(e - 2)(e + 1)}{e}}.$$

Étape 4 : valeur approchée

En utilisant

$$e \simeq 2,71828,$$

on obtient

$$\frac{2}{e} \simeq 0,73576.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\simeq 2,71828 - 1 - 0,73576 \\ &\simeq 0,98252.\end{aligned}$$

Donc l'aire du domaine hachuré est approximativement

$$\boxed{\mathcal{A} \simeq 0,983}$$

unité d'aire.

Point important

Il ne faut pas calculer

$$\int_0^1 (g(x) - h(x)) dx.$$

Cette intégrale représenterait l'aire située entre les deux courbes sur $[0, 1]$.

Or, sur le graphique fourni, le domaine hachuré est situé entre l'axe des abscisses et :

- la courbe de h sur $[0, 1]$;
- la courbe de g sur $[1, e]$.

L'aire demandée est donc bien

$$\int_0^1 h(x) dx + \int_1^e g(x) dx.$$

Résultat

Le domaine hachuré est formé de deux parties. Son aire vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 h(x) dx + \int_1^e g(x) dx \\ &= \left(1 - \frac{2}{e}\right) + (e - 2) \\ &= e - 1 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e}$$

unité d'aire.

Une valeur approchée est

$$\mathcal{A} \simeq 0,983$$

unité d'aire.

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 2.b

On a

$$\int_1^e g(x) dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx.$$

Effectuons une intégration par parties dans

$$\int_1^e \ln x dx$$

en posant

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx \\ &= e - (e - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_1^e g(x) dx &= (e - 1) - 1 \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\int_1^e g(x) dx = e - 2}.$$

Question 2.c

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} H'(x) &= e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + e^{x-1}(2x - 2) \\ &= e^{x-1}(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) \\ &= x^2 e^{x-1} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= H(1) - H(0) \\ &= 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

Question 2.d

Le domaine hachuré est situé sous la courbe de h sur $[0, 1]$ et sous la courbe de g sur $[1, e]$.

Son aire vaut donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 h(x) dx + \int_1^e g(x) dx \\ &= 1 - \frac{2}{e} + e - 2 \\ &= e - 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e}$$

unité d'aire.

Synthèse finale

Les résultats obtenus sont :

$$\int_1^e g(x) dx = e - 2$$

$$H'(x) = h(x)$$

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}$$

et

$$\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e}$$

unité d'aire.

Résultats définitifs

$$\int_1^e g(x) dx = e - 2$$

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e} \simeq 0,983$$

Problème – Partie II

Étude d'une fonction logarithmique et exponentielle

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données de l'exercice

On considère la fonction numérique f définie sur

$$]0, +\infty[$$

par

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Dans la partie précédente, les fonctions g et h ont été définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Énoncé

1.a. Vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

puis interpréter géométriquement ce résultat.

1.b. Vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

1.c. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

puis interpréter géométriquement ce résultat.

2.a. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Correction détaillée

1.a. Limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

Nous devons étudier

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right).$$

Pour cela, nous allons étudier séparément les deux termes

$$e^{x-1} \quad \text{et} \quad -\frac{\ln x}{x}.$$

Étape 1 : limite de e^{x-1}

Lorsque

$$x \rightarrow 0^+,$$

on a

$$x - 1 \rightarrow -1.$$

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = \frac{1}{e}}.$$

Ce premier terme possède donc une limite réelle finie.

Étape 2 : étude de $\frac{\ln x}{x}$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, nous savons que

$$\ln x \rightarrow -\infty$$

et que

$$x \rightarrow 0^+.$$

L'expression

$$\frac{\ln x}{x}$$

est donc le quotient d'un nombre qui tend vers $-\infty$ par un nombre strictement positif qui tend vers 0.

On s'attend donc à obtenir $-\infty$. Nous allons le justifier rigoureusement par un changement de variable.

Posons

$$t = \frac{1}{x}.$$

Lorsque

$$x \rightarrow 0^+,$$

on a

$$t \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$x = \frac{1}{t},$$

donc

$$\ln x = \ln \left(\frac{1}{t} \right) = -\ln t.$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{-\ln t}{1/t}.$$

Diviser par $\frac{1}{t}$ revient à multiplier par t , donc

$$\frac{\ln x}{x} = -t \ln t.$$

Or, lorsque $t \rightarrow +\infty$,

$$t \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \ln t \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$t \ln t \rightarrow +\infty,$$

d'où

$$-t \ln t \rightarrow -\infty.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty}.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty}.$$

Étape 3 : limite de f

Nous avons

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$e^{x-1} \rightarrow \frac{1}{e}$$

et

$$-\frac{\ln x}{x} \rightarrow +\infty.$$

La somme d'un terme qui tend vers un réel fini et d'un terme qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}.$$

Interprétation géométrique

La fonction f est définie uniquement pour $x > 0$.

Nous avons montré que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Cela signifie que, lorsque le point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ se rapproche de l'axe des ordonnées par la droite, son ordonnée devient arbitrairement grande.

Par conséquent, la droite d'équation

$$\boxed{x = 0}$$

est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

La courbe possède donc, au voisinage de 0^+ , une branche infinie qui monte vers $+\infty$ le long de l'axe des ordonnées.

Résultat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = \frac{1}{e}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}.$$

Géométriquement,

$$\boxed{x = 0}$$

est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1.b. Limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Nous devons calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right).$$

Étudions de nouveau séparément les deux termes.

Étape 1 : limite de e^{x-1}

Lorsque

$$x \rightarrow +\infty,$$

on a

$$x - 1 \rightarrow +\infty.$$

La fonction exponentielle tend vers $+\infty$ lorsque son argument tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty}.$$

On peut également écrire

$$e^{x-1} = \frac{e^x}{e}.$$

Comme

$$e^x \rightarrow +\infty$$

et que e est une constante strictement positive, on retrouve

$$e^{x-1} \rightarrow +\infty.$$

Étape 2 : limite de $\frac{\ln x}{x}$

Nous utilisons la limite classique

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}.$$

Cette limite traduit le fait que la fonction logarithme croît beaucoup plus lentement que la fonction affine $x \mapsto x$.

On peut également la justifier par la règle de l'Hôpital, lorsque cette règle est admise :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0}.$$

Étape 3 : limite de f

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$e^{x-1} \rightarrow +\infty$$

et

$$-\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Point important

Il n'y a aucune forme indéterminée ici.

Le premier terme tend vers $+\infty$, tandis que le deuxième terme tend vers 0.

La différence se comporte donc essentiellement comme

$$e^{x-1},$$

qui tend vers $+\infty$.

Résultat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

1.c. Limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Nous avons

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

En divisant toute l'expression par x , on obtient

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Nous allons étudier séparément les deux termes.

Étape 1 : limite de $\frac{e^{x-1}}{x}$

On peut écrire

$$\frac{e^{x-1}}{x} = \frac{1}{e} \frac{e^x}{x}.$$

Nous utilisons la limite classique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

En effet, la fonction exponentielle croît plus rapidement que toute fonction polynomiale, en particulier plus rapidement que la fonction $x \mapsto x$.

Comme $\frac{1}{e}$ est une constante strictement positive,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} = +\infty.$$

Vérification

On peut également écrire

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{xe^{-x}}.$$

Or

$$xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0^+.$$

Le réciproque d'une quantité strictement positive qui tend vers 0 tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty.$$

Étape 2 : limite de $\frac{\ln x}{x^2}$

Nous savons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Or

$$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$$

et

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Le produit tend donc vers 0 :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x^2} \right) = 0}.$$

Étape 3 : conclusion

Nous avons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{e^{x-1}}{x} \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}.$$

Interprétation géométrique

Nous avons obtenu simultanément

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Le quotient

$$\frac{f(x)}{x}$$

peut être interprété comme le coefficient directeur de la droite passant par l'origine O et par le point

$$M(x, f(x))$$

de la courbe.

Comme ce quotient tend vers $+\infty$, cette droite devient de plus en plus verticale lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On dit alors que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède, au voisinage de $+\infty$, une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

Ainsi, $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction

$$(Oy).$$

Il ne s'agit pas d'une asymptote oblique, car une asymptote oblique nécessiterait une limite finie de $\frac{f(x)}{x}$.

Résultat

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Or

$$\frac{e^{x-1}}{x} \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Géométriquement, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction

$$(Oy).$$

2.a. Calcul et mise sous forme de $f'(x)$

Nous devons montrer que, pour tout

$$x \in]0, +\infty[,$$

on a

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

On rappelle que

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Les fonctions

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}$$

ont été définies dans la partie précédente.

Étape 1 : dérivée de e^{x-1}

La fonction

$$x \mapsto e^{x-1}$$

est une fonction composée.

On utilise la formule

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Ici,

$$u(x) = x - 1,$$

donc

$$u'(x) = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(e^{x-1}\right)' = e^{x-1}}.$$

Étape 2 : dérivée de $\frac{\ln x}{x}$

Pour tout $x > 0$, posons

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$

On a

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

et

$$v'(x) = 1.$$

Rappel

La dérivée d'un quotient est donnée par

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

à condition que $v(x) \neq 0$.

Ici, $x > 0$, donc le dénominateur x est bien non nul.

Appliquons cette formule :

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (\ln x) \times 1}{x^2}.$$

Comme

$$\left(\frac{1}{x}\right)x = 1,$$

il vient

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Or

$$g(x) = 1 - \ln x.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{g(x)}{x^2}}.$$

Étape 3 : calcul de $f'(x)$

Comme

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x},$$

on a

$$f'(x) = (e^{x-1})' - \left(\frac{\ln x}{x}\right)'.$$

En utilisant les résultats précédents,

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Comme

$$g(x) = 1 - \ln x,$$

on obtient

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{g(x)}{x^2}.$$

Étape 4 : mise au même dénominateur

Nous voulons faire apparaître le dénominateur commun x^2 .

Pour tout $x > 0$,

$$e^{x-1} = \frac{x^2 e^{x-1}}{x^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 e^{x-1}}{x^2} - \frac{g(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Or

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

Par conséquent,

$$x^2 e^{x-1} = h(x).$$

On obtient finalement

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Cette égalité est valable pour tout

$$x \in]0, +\infty[.$$

Vérification

En remplaçant directement $h(x)$ et $g(x)$ par leurs expressions, le membre de droite devient

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - g(x)}{x^2} &= \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2}. \end{aligned}$$

Cette expression est exactement celle obtenue pour $f'(x)$.

L'identité est donc vérifiée.

Point important

Le dénominateur x^2 est strictement positif sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent, dans la suite de l'exercice, le signe de $f'(x)$ sera exactement le signe de

$$h(x) - g(x).$$

Les résultats graphiques obtenus dans la partie I permettront donc de déterminer les variations de f .

Résultat

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{h(x) - g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2} .}$$

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 1.a

Lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$e^{x-1} \rightarrow e^{-1}.$$

De plus, en posant $t = \frac{1}{x}$, on a $t \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{\ln x}{x} = -t \ln t \rightarrow -\infty.$$

Ainsi,

$$-\frac{\ln x}{x} \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}.$$

La droite

$$\boxed{x = 0}$$

est donc une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Question 1.b

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$e^{x-1} \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Question 1.c

On a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Or

$$\frac{e^{x-1}}{x} = \frac{1}{e} \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède donc, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) .

Question 2.a

Pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Comme

$$h(x) = x^2 e^{x-1}$$

et

$$g(x) = 1 - \ln x,$$

on obtient

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Synthèse finale

Les résultats obtenus sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

et la droite

$$x = 0$$

est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On a également

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

donc $(\mathcal{C}_f)$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Problème – Partie II

Variations de la fonction f et résolution d'une équation

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

On considère la fonction f définie sur

$$]0, +\infty[$$

par

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Dans la partie I, on a introduit les fonctions

$$g(x) = 1 - \ln x$$

et

$$h(x) = x^2 e^{x-1}.$$

On a établi graphiquement que

$$h(x) - g(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[$$

et que

$$h(x) - g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

De plus,

$$h(1) = g(1) = 1,$$

donc

$$h(1) - g(1) = 0.$$

Dans la question précédente, on a démontré que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Enfin, on a obtenu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

et

$$f(1) = 1.$$

Énoncé

2.b. Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.

On peut utiliser la question 2.a de la partie I.

2.c. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

3. Montrer que l'équation

$$f(x) = x$$

admet une solution α telle que

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2.$$

On donne

$$f(2) \approx 2,37$$

et

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,38.$$

Correction détaillée

2.b. Tableau de variations de la fonction f

Nous savons que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Pour déterminer les variations de f , il faut donc étudier le signe de $f'(x)$.

Étape 1 : étude du signe du dénominateur

Pour tout

$$x \in]0, +\infty[,$$

on a

$$x > 0.$$

Par conséquent,

$$x^2 > 0.$$

Ainsi, le dénominateur de

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$$

est toujours strictement positif.

Cela signifie que le signe de $f'(x)$ est exactement le signe du numérateur $h(x) - g(x)$.

Autrement dit,

$$\operatorname{sgn}(f'(x)) = \operatorname{sgn}(h(x) - g(x)).$$

Rappel

Si A est un réel et si $B > 0$, alors

$$\frac{A}{B}$$

a le même signe que A .

Ici,

$$B = x^2 > 0.$$

Par conséquent, le signe de $f'(x)$ est déterminé uniquement par le signe de $h(x) - g(x)$.

Étape 2 : signe de $f'(x)$ sur $]0, 1[$

D'après la question 2.a de la partie I,

$$h(x) - g(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.$$

Comme

$$x^2 > 0,$$

on obtient

$$\frac{h(x) - g(x)}{x^2} < 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1[.}$$

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur

$$]0, 1].$$

Étape 3 : valeur de $f'(1)$

On a

$$h(1) = g(1) = 1.$$

Donc

$$h(1) - g(1) = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{h(1) - g(1)}{1^2} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(1) = 0}.$$

Étape 4 : signe de $f'(x)$ sur $]1, +\infty[$

D'après la partie I,

$$h(x) - g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

Comme

$$x^2 > 0,$$

on obtient

$$\frac{h(x) - g(x)}{x^2} > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur

$$[1, +\infty[.$$

Étape 5 : calcul de la valeur de f au point critique

On a

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

En prenant $x = 1$, il vient

$$f(1) = e^{1-1} - \frac{\ln 1}{1}.$$

Or

$$e^{1-1} = e^0 = 1$$

et

$$\ln 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - \frac{0}{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(1) = 1}.$$

Étape 6 : rappel des limites aux bornes

Nous avons précédemment établi que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi :

- lorsque x part de 0^+ et augmente jusqu'à 1, la fonction f décroît de $+\infty$ jusqu'à 1 ;
- lorsque x augmente de 1 vers $+\infty$, la fonction f croît de 1 vers $+\infty$.

Étape 7 : tableau de signes de f'

x	0	1	$+\infty$
$h(x) - g(x)$	−	0	+
x^2	+	+	+
$f'(x)$	−	0	+

Le tableau de variations de f est alors :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Interprétation

La fonction f possède un minimum global au point d'abscisse 1.

La valeur minimale de f sur $]0, +\infty[$ est

$$f(1) = 1.$$

Ainsi,

$$\min_{x>0} f(x) = 1.$$

Le point

$$M(1, 1)$$

est le point le plus bas de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Comme

$$f'(1) = 0,$$

la tangente à la courbe en ce point est horizontale.

Résultat

La fonction f est :

strictement décroissante sur $]0, 1]$

et

strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Elle atteint en $x = 1$ son minimum global :

$$f(1) = 1.$$

Son tableau de variations est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

2.c. Démonstration de l'inégalité

Nous devons montrer que, pour tout $x > 0$,

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

La question demande de déduire cette inégalité du tableau de variations de f .

Étape 1 : utiliser le minimum de f

D'après le tableau de variations, la fonction f possède un minimum global en $x = 1$.

Ce minimum vaut

$$f(1) = 1.$$

Par conséquent, pour tout

$$x \in]0, +\infty[,$$

on a

$$f(x) \geq f(1).$$

Ainsi,

$$f(x) \geq 1.$$

Or

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

En remplaçant $f(x)$ par son expression, on obtient

$$e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1.$$

Étape 2 : isoler le terme exponentiel

À partir de

$$e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1,$$

ajoutons

$$\frac{\ln x}{x}$$

aux deux membres.

On obtient

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}}.$$

Étape 3 : étude du cas d'égalité

La fonction f atteint sa valeur minimale 1 uniquement au point $x = 1$, puisqu'elle est strictement décroissante avant 1, puis strictement croissante après 1.

Ainsi,

$$f(x) = 1$$

si et seulement si

$$x = 1.$$

Par conséquent, dans l'inégalité

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x},$$

l'égalité est réalisée pour

$$x = 1.$$

Vérifions :

$$e^{1-1} = e^0 = 1$$

et

$$1 + \frac{\ln 1}{1} = 1 + 0 = 1.$$

Donc

$$1 = 1.$$

Ainsi,

$$e^{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x} \iff x = 1.$$

Point important

L'inégalité demandée ne nécessite pas une nouvelle étude algébrique.
Elle découle directement du fait que la valeur minimale de f est égale à 1 :

$$f(x) \geq 1.$$

Il suffit ensuite de remplacer $f(x)$ par son expression.

Résultat

D'après le tableau de variations,

$$f(x) \geq f(1) = 1 \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Or

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Donc

$$e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1,$$

d'où

$$\forall x > 0, \quad e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

L'égalité a lieu uniquement pour

$$x = 1.$$

3. Existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$

Nous devons montrer que l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution α appartenant à l'intervalle

$$\left] \frac{3}{2}, 2 \right[.$$

La méthode naturelle consiste à transformer cette équation en une équation de la forme

$$\varphi(x) = 0$$

et à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Étape 1 : introduction d'une fonction auxiliaire

Définissons la fonction φ sur $]0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Alors

$$f(x) = x$$

équivalent à

$$f(x) - x = 0.$$

Autrement dit,

$$\boxed{f(x) = x \iff \varphi(x) = 0}.$$

La recherche d'une solution de l'équation $f(x) = x$ revient donc à chercher un zéro de la fonction φ .

Étape 2 : continuité de φ

La fonction f est définie par

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$:

- la fonction $x \mapsto e^{x-1}$ est continue ;
- la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue ;
- la fonction $x \mapsto x$ est continue et ne s'annule pas ;
- par conséquent, la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

est continue.

La fonction f est donc continue sur $]0, +\infty[$.

La fonction

$$x \mapsto x$$

est également continue.

Ainsi, leur différence

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

est continue sur $]0, +\infty[$.

En particulier, φ est continue sur l'intervalle fermé

$$\left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

$\varphi \text{ est continue sur } \left[\frac{3}{2}, 2\right].$

Étape 3 : signe de $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$

L'énoncé donne

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,38.$$

Par définition,

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}.$$

Or

$$\frac{3}{2} = 1,5.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{3}{2}\right) &\approx 1,38 - 1,5 \\ &\approx -0,12. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0.$

Cela signifie également que

$$f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}.$$

Étape 4 : signe de $\varphi(2)$

L'énoncé donne

$$f(2) \approx 2,37.$$

Ainsi,

$$\varphi(2) = f(2) - 2.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi(2) &\approx 2,37 - 2 \\ &\approx 0,37.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi(2) > 0}.$$

Cela signifie que

$$f(2) > 2.$$

Étape 5 : constatation du changement de signe

Nous avons obtenu

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

et

$$\varphi(2) > 0.$$

Ainsi,

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \times \varphi(2) < 0.$$

La fonction φ change donc de signe entre

$$\frac{3}{2}$$

et

$$2.$$

Étape 6 : application du théorème des valeurs intermédiaires

Rappel

Soit φ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$.

Si

$$\varphi(a)\varphi(b) < 0,$$

c'est-à-dire si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un réel $\alpha \in]a, b[$ tel que

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

La fonction φ est continue sur

$$\left[\frac{3}{2}, 2\right],$$

et

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < \varphi(2).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un réel

$$\alpha \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$$

tel que

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Or

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \alpha.$$

Ainsi,

$$f(\alpha) - \alpha = 0,$$

donc

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Par conséquent, l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution α vérifiant

$$\boxed{\frac{3}{2} < \alpha < 2}.$$

Interprétation

Résoudre

$$f(x) = x$$

revient graphiquement à chercher les points d'intersection entre :

— la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'équation

$$y = f(x);$$

— la droite d'équation

$$y = x.$$

Comme

$$f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}$$

et

$$f(2) > 2,$$

la courbe $(\mathcal{C}_f)$ se trouve :

- en dessous de la droite $y = x$ à l'abscisse $\frac{3}{2}$;
- au-dessus de la droite $y = x$ à l'abscisse 2.

Par continuité, les deux courbes doivent donc se couper pour une abscisse α comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

Point important

Le théorème des valeurs intermédiaires prouve ici l'existence d'au moins une solution dans l'intervalle

$$\left] \frac{3}{2}, 2 \right[.$$

À ce stade, il ne permet pas, à lui seul, d'affirmer que cette solution est unique. Pour démontrer l'unicité, il faudrait disposer d'une information supplémentaire, par exemple la stricte monotonie de la fonction

$$x \mapsto f(x) - x$$

sur l'intervalle considéré.

L'énoncé demande seulement de montrer que l'équation admet *une solution* dans cet intervalle.

Résultat

Posons

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

La fonction φ est continue sur

$$\left[\frac{3}{2}, 2 \right].$$

De plus,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \\ &\approx 1,38 - 1,5 \\ &\approx -0,12 < 0, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \varphi(2) &= f(2) - 2 \\ &\approx 2,37 - 2 \\ &\approx 0,37 > 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel

$$\alpha \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$$

tel que

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

avec

$$\boxed{\frac{3}{2} < \alpha < 2}.$$

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 2.b

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}.$$

Or

$$x^2 > 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ a le même signe que $h(x) - g(x)$.

D'après la partie I,

$$h(x) - g(x) < 0 \quad \text{sur }]0, 1[$$

et

$$h(x) - g(x) > 0 \quad \text{sur }]1, +\infty[.$$

De plus,

$$h(1) - g(1) = 0.$$

Donc

$$f'(x) < 0 \quad \text{sur }]0, 1[,$$

$$f'(1) = 0$$

et

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]1, +\infty[.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad f(1) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

le tableau de variations est

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		− 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Question 2.c

Le tableau de variations montre que f atteint son minimum en $x = 1$ et que

$$f(1) = 1.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$f(x) \geq 1.$$

Or

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Ainsi,

$$e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1,$$

d'où

$$e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Question 3

Posons

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

La fonction φ est continue sur

$$\left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

De plus,

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,38 - 1,5 = -0,12 < 0$$

et

$$\varphi(2) \approx 2,37 - 2 = 0,37 > 0.$$

Ainsi,

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \varphi(2) < 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel

$$\alpha \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$$

tel que

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Donc

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Par conséquent,

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2.$$

Synthèse finale

La fonction f est strictement décroissante sur

$$]0, 1]$$

puis strictement croissante sur

$$[1, +\infty[.$$

Elle atteint son minimum global au point

$$x = 1$$

et ce minimum vaut

$$f(1) = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) \geq 1}.$$

On en déduit

$$\boxed{\forall x > 0, \quad e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}}.$$

Enfin, l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution α vérifiant

$$\boxed{\frac{3}{2} < \alpha < 2}.$$

Problème – Partie II

Fonction réciproque et interprétation graphique

Énoncé et correction complète et très détaillée

Données et résultats précédents

On considère la fonction f définie sur

$$]0, +\infty[$$

par

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

On note φ la restriction de f à l'intervalle

$$[1, +\infty[.$$

Ainsi,

$$\varphi : [1, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$$

est définie par

$$\varphi(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}.$$

Dans les questions précédentes, on a montré que :

$$\varphi(1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty,$$

et que φ est continue et strictement croissante sur

$$[1, +\infty[.$$

Par conséquent, φ est une bijection de

$$[1, +\infty[$$

sur

$$J = [1, +\infty[.$$

Elle admet donc une fonction réciproque

$$\varphi^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[,$$

elle-même strictement croissante.

On a également montré que l'équation

$$f(x) = x$$

admet une solution α telle que

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2.$$

Comme $\alpha \geq 1$, on a

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

Ainsi, 1 et α sont deux points fixes de φ :

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

Énoncé

Le graphique donné représente la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ de la fonction φ et la droite (Δ) d'équation

$$y = x$$

dans un même repère orthonormé.

5.a. Justifier graphiquement que, pour tout

$$x \in [1, \alpha],$$

on a

$$\varphi(x) \leq x.$$

5.b. En déduire que, pour tout

$$x \in [1, \alpha],$$

on a

$$\varphi^{-1}(x) \geq x.$$

5.c. Reproduire la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ et tracer la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ de la fonction φ^{-1} dans un même repère orthonormé.

Correction détaillée

5.a. Comparaison graphique de $\varphi(x)$ et de x

Nous devons justifier graphiquement que

$$\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi(x) \leq x.$$

Étape 1 : interpréter les deux quantités à comparer

Pour une abscisse donnée x :

- le nombre $\varphi(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ d'abscisse x ;
- le nombre x est l'ordonnée du point de la droite (Δ) d'équation $y = x$, ayant la même abscisse x .

Comparer $\varphi(x)$ et x revient donc à comparer la hauteur de la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ et celle de la droite (Δ) pour une même abscisse.

Rappel

Pour une même abscisse x :

- si la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située au-dessous de la droite (Δ) , alors

$$\varphi(x) < x;$$

- si la courbe et la droite se coupent, alors

$$\varphi(x) = x;$$

- si la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située au-dessus de la droite (Δ) , alors

$$\varphi(x) > x.$$

Étape 2 : lecture du graphique sur $[1, \alpha]$

Le graphique montre que les courbes $(\mathcal{C}_\varphi)$ et (Δ) se coupent aux points

$$I(1, 1)$$

et

$$A(\alpha, \alpha).$$

En effet,

$$\varphi(1) = 1$$

et

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

Entre les abscisses 1 et α , la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située au-dessous de la droite (Δ) .

Ainsi, pour tout

$$x \in]1, \alpha[,$$

on a

$$\varphi(x) < x.$$

Aux deux extrémités :

$$\varphi(1) = 1$$

et

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

On peut donc regrouper les trois situations :

$$\begin{cases} \varphi(1) = 1, \\ \varphi(x) < x \quad \text{pour } 1 < x < \alpha, \\ \varphi(\alpha) = \alpha. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi(x) \leq x}.$$

Étape 3 : préciser les cas d'égalité

D'après le graphique, sur l'intervalle $[1, \alpha]$, les deux courbes se rencontrent uniquement pour

$$x = 1$$

et

$$x = \alpha.$$

Ainsi,

$$\varphi(x) = x$$

pour

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \alpha.$$

Pour tout

$$x \in]1, \alpha[,$$

l'inégalité est stricte :

$$\varphi(x) < x.$$

Interprétation graphique

Sur l'intervalle $[1, \alpha]$, la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ reste sous la première bissectrice $\Delta : y = x$.

On a donc

$$\varphi(x) \leq x.$$

Les deux courbes se coupent aux extrémités

$$(1, 1) \quad \text{et} \quad (\alpha, \alpha).$$

Résultat

D'après le graphique, la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située sous la droite (Δ) sur $[1, \alpha]$.

Par conséquent,

$$\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi(x) \leq x.$$

Plus précisément,

$$\varphi(x) < x \quad \text{pour } x \in]1, \alpha[$$

et

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

5.b. Comparaison de $\varphi^{-1}(x)$ et de x

Nous devons déduire de la question précédente que

$$\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi^{-1}(x) \geq x.$$

Cette question nécessite de manipuler soigneusement la fonction réciproque.

Étape 1 : montrer que $\varphi^{-1}(x)$ appartient à $[1, \alpha]$

Soit

$$x \in [1, \alpha].$$

Comme φ^{-1} est strictement croissante sur

$$[1, +\infty[,$$

on peut appliquer φ^{-1} à l'encadrement

$$1 \leq x \leq \alpha.$$

On obtient

$$\varphi^{-1}(1) \leq \varphi^{-1}(x) \leq \varphi^{-1}(\alpha).$$

Or

$$\varphi(1) = 1.$$

Par définition de la fonction réciproque,

$$\varphi^{-1}(1) = 1.$$

De même,

$$\varphi(\alpha) = \alpha,$$

donc

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha.$$

Ainsi,

$$1 \leq \varphi^{-1}(x) \leq \alpha.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi^{-1}(x) \in [1, \alpha]}.$$

Cette étape est essentielle, car elle permet d'utiliser l'inégalité obtenue à la question 5.a avec

$$\varphi^{-1}(x)$$

à la place de x .

Étape 2 : appliquer le résultat de la question 5.a

La question 5.a affirme que, pour tout

$$t \in [1, \alpha],$$

on a

$$\varphi(t) \leq t.$$

Nous venons de montrer que

$$\varphi^{-1}(x) \in [1, \alpha].$$

Nous pouvons donc choisir

$$t = \varphi^{-1}(x).$$

Il vient

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) \leq \varphi^{-1}(x).$$

Or, par définition d'une fonction réciproque,

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x.$$

Par conséquent,

$$x \leq \varphi^{-1}(x).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi^{-1}(x) \geq x}.$$

Étape 3 : cas d'égalité

Pour

$$x = 1,$$

on a

$$\varphi^{-1}(1) = 1.$$

Pour

$$x = \alpha,$$

on a

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha.$$

Pour

$$x \in]1, \alpha[,$$

l'inégalité obtenue à la question 5.a est stricte :

$$\varphi(t) < t.$$

En choisissant

$$t = \varphi^{-1}(x),$$

on obtient

$$x = \varphi(\varphi^{-1}(x)) < \varphi^{-1}(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi^{-1}(x) > x \quad \text{pour tout } x \in]1, \alpha[.}$$

Et aux extrémités,

$$\boxed{\varphi^{-1}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha.}$$

Méthode

Une manière rapide de retenir le raisonnement est la suivante.

Soit $x \in [1, \alpha]$ et posons

$$y = \varphi^{-1}(x).$$

Alors

$$\varphi(y) = x.$$

Comme $y \in [1, \alpha]$, la question 5.a donne

$$\varphi(y) \leq y.$$

Donc

$$x \leq y.$$

Or

$$y = \varphi^{-1}(x).$$

Ainsi,

$$x \leq \varphi^{-1}(x).$$

Interprétation graphique

La courbe de φ^{-1} est la symétrique de la courbe de φ par rapport à la droite $y = x$.

Sur $[1, \alpha]$, la courbe de φ est au-dessous de $y = x$.

Après symétrie, la courbe de φ^{-1} se trouve donc au-dessus de la droite $y = x$.

Cela correspond à l'inégalité

$$\varphi^{-1}(x) \geq x.$$

Résultat

Soit $x \in [1, \alpha]$.

Comme φ^{-1} est croissante et que

$$\varphi^{-1}(1) = 1, \quad \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha,$$

on a

$$\varphi^{-1}(x) \in [1, \alpha].$$

La question 5.a donne alors

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) \leq \varphi^{-1}(x).$$

Or

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi^{-1}(x) \geq x}.$$

L'inégalité est stricte sur $]1, \alpha[$.

5.c. Construction de la courbe de φ^{-1}

Nous devons reproduire la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ et tracer la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ de la fonction réciproque dans le même repère.

Étape 1 : rappeler la propriété de symétrie

Rappel

Les courbes représentatives d'une fonction bijective et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite

$$\Delta : y = x.$$

En effet, si un point

$$M(a, b)$$

appartient à la courbe de φ , alors

$$b = \varphi(a).$$

Cette égalité équivaut à

$$a = \varphi^{-1}(b).$$

Le point

$$M'(b, a)$$

appartient donc à la courbe de φ^{-1} .

Les points

$$M(a, b) \quad \text{et} \quad M'(b, a)$$

sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Ainsi, pour construire $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$, il suffit de prendre l'image de $(\mathcal{C}_\varphi)$ par la symétrie d'axe

$$\Delta : y = x.$$

Étape 2 : méthode de construction point par point

Pour construire la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$:

1. on trace d'abord la droite

$$\Delta : y = x;$$

2. on choisit plusieurs points sur la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$;

3. pour chaque point

$$M(a, \varphi(a)),$$

on place le point symétrique

$$M'(\varphi(a), a);$$

4. on relie régulièrement les points obtenus.

La courbe ainsi construite est $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$.

Étape 3 : points communs aux deux courbes

Les points de la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi})$ situés sur la droite $y = x$ sont inchangés par la symétrie.

Nous savons que

$$\varphi(1) = 1.$$

Le point

$$I(1, 1)$$

appartient donc à $(\mathcal{C}_{\varphi})$, à $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ et à la droite Δ .

De même,

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

Le point

$$A(\alpha, \alpha)$$

appartient également aux trois courbes.

Ainsi,

$$\boxed{I(1, 1) \text{ et } A(\alpha, \alpha)}$$

sont des points communs à $(\mathcal{C}_{\varphi})$ et $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$.

Étape 4 : position relative sur $[1, \alpha]$

D'après la question 5.a,

$$\varphi(x) \leq x \quad \text{sur } [1, \alpha].$$

La courbe $(\mathcal{C}_{\varphi})$ est donc sous la droite $y = x$ sur cet intervalle.

D'après la question 5.b,

$$\varphi^{-1}(x) \geq x \quad \text{sur } [1, \alpha].$$

La courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ est donc au-dessus de la droite $y = x$ sur cet intervalle.

Sur $]1, \alpha[$, on a plus précisément

$$\varphi(x) < x < \varphi^{-1}(x).$$

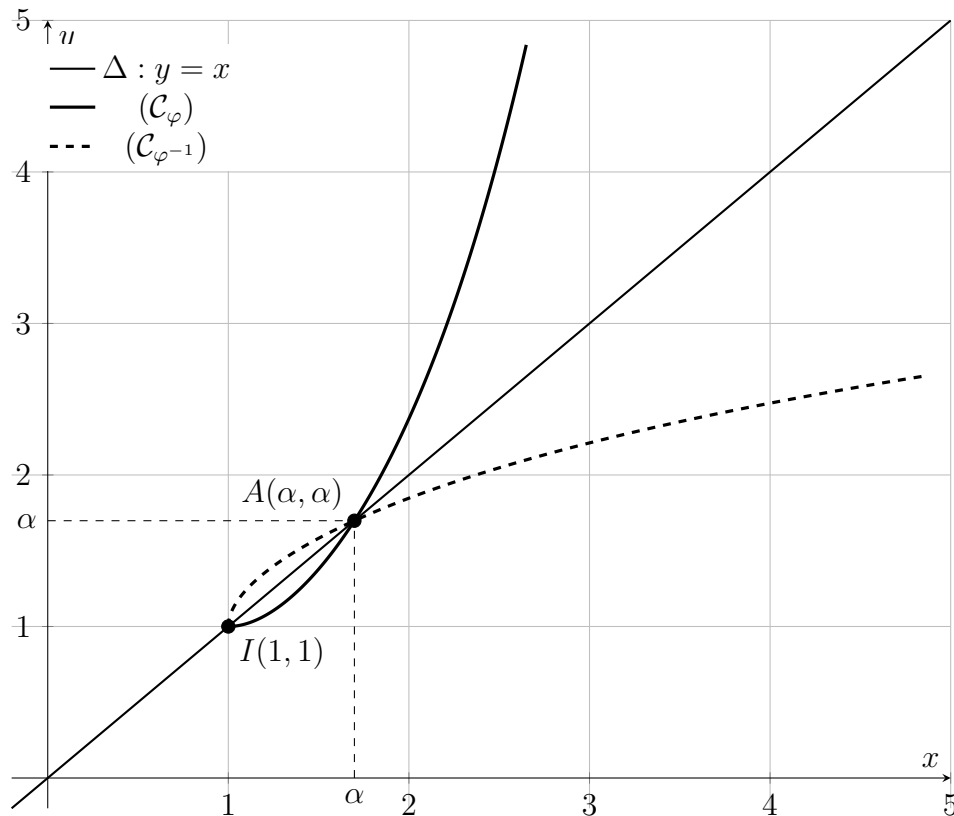
Après le point $A(\alpha, \alpha)$, la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi})$ passe au-dessus de la droite Δ . Sa symétrique $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ passe alors au-dessous de cette droite.

Représentation graphique de φ et de φ^{-1}

Dans le graphique suivant, la valeur

$$\alpha \simeq 1,698$$

est utilisée uniquement pour placer approximativement le point fixe $A(\alpha, \alpha)$.



Point important

La courbe de φ^{-1} n'est pas obtenue en changeant simplement $\varphi(x)$ en

$$\frac{1}{\varphi(x)}.$$

La notation φ^{-1} désigne la fonction réciproque, et non l'inverse multiplicatif.

Ainsi,

$$\varphi^{-1}(x) \neq \frac{1}{\varphi(x)}$$

en général.

La courbe de φ^{-1} est obtenue par symétrie de $(\mathcal{C}_\varphi)$ par rapport à la droite $y = x$.

Résultat

La courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ est la symétrique de la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ par rapport à la droite

$$\Delta: y = x.$$

Les deux courbes passent par les points fixes

$$I(1,1)$$

et

$$A(\alpha, \alpha).$$

Sur l'intervalle $[1, \alpha]$:

$$\varphi(x) \leq x$$

et

$$\varphi^{-1}(x) \geq x.$$

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 5.a

D'après le graphique, la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située au-dessous de la droite (Δ) d'équation $y = x$ pour tout

$$x \in [1, \alpha].$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi(x) \leq x}.$$

L'égalité est vérifiée pour

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = \alpha.$$

Question 5.b

Soit

$$x \in [1, \alpha].$$

Comme φ^{-1} est croissante et que

$$\varphi^{-1}(1) = 1, \quad \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha,$$

on a

$$\varphi^{-1}(x) \in [1, \alpha].$$

En appliquant le résultat de la question 5.a au nombre

$$\varphi^{-1}(x),$$

on obtient

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) \leq \varphi^{-1}(x).$$

Or

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi^{-1}(x) \geq x}.$$

Question 5.c

La courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ de la fonction réciproque est la symétrique de la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ par rapport à la droite

$$\boxed{y = x}.$$

Ainsi, chaque point

$$M(a, \varphi(a))$$

de $(\mathcal{C}_\varphi)$ donne le point symétrique

$$M'(\varphi(a), a)$$

de $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$.

Les points

$$(1, 1) \quad \text{et} \quad (\alpha, \alpha)$$

appartiennent aux deux courbes, car

$$\varphi(1) = 1$$

et

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

Synthèse finale

Sur l'intervalle $[1, \alpha]$, le graphique montre que

$$\boxed{\varphi(x) \leq x}.$$

Puisque φ^{-1} est croissante et fixe les nombres 1 et α , on en déduit que

$$\boxed{\varphi^{-1}(x) \geq x}$$

sur le même intervalle.

Plus précisément, pour tout

$$x \in]1, \alpha[,$$

on a

$$\boxed{\varphi(x) < x < \varphi^{-1}(x)}.$$

Enfin, les courbes $(\mathcal{C}_\varphi)$ et $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la droite

$$\boxed{\Delta : y = x}.$$

Elles possèdent les points communs

$$\boxed{(1, 1)}$$

et

$$\boxed{(\alpha, \alpha)}.$$

Problème – Partie III

Étude d'une suite définie à l'aide d'une fonction réciproque

Énoncé et correction complète et très détaillée

Rappels des parties précédentes

On considère la fonction

$$f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

On note φ la restriction de f à l'intervalle

$$[1, +\infty[.$$

Dans la partie II, on a montré que :

— φ est continue et strictement croissante sur

$$[1, +\infty[;$$

— φ réalise une bijection de

$$[1, +\infty[$$

sur

$$J = [1, +\infty[;$$

— sa fonction réciproque

$$\varphi^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$$

existe et est strictement croissante ;

— on a

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha) = \alpha,$$

où

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2;$$

— par conséquent,

$$\varphi^{-1}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha;$$

— pour tout $x \in [1, \alpha]$,

$$\varphi^{-1}(x) \geq x;$$

— plus précisément, pour tout $x \in]1, \alpha[$,

$$\varphi^{-1}(x) > x.$$

Énoncé

Soit la suite numérique (u_n) définie par

$$u_0 \in]1, \alpha[$$

et

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que

$$1 < u_n < \alpha$$

pour tout entier naturel n .

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On peut utiliser la question 5.b de la partie II.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Correction détaillée

1. Démonstration par récurrence de l'encadrement $1 < u_n < \alpha$

Nous voulons démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < \alpha.$$

Il s'agit d'une propriété qui dépend de l'entier n . Nous allons donc utiliser un raisonnement par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad 1 < u_n < \alpha.$$

Nous devons montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappel

Une démonstration par récurrence comporte trois étapes :

1. **Initialisation** : vérifier que la propriété est vraie au premier rang ;
2. **Hérédité** : supposer la propriété vraie à un rang n et montrer qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$;
3. **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Étape 1 : initialisation

Par hypothèse de l'énoncé,

$$u_0 \in]1, \alpha[.$$

Cela signifie exactement que

$$1 < u_0 < \alpha.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$

Étape 2 : hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire supposons que

$$1 < u_n < \alpha.$$

C'est l'hypothèse de récurrence.

Nous devons montrer que

$$1 < u_{n+1} < \alpha.$$

Or la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur

$$[1, +\infty[.$$

Nous pouvons donc appliquer φ^{-1} aux trois membres de l'encadrement

$$1 < u_n < \alpha.$$

Comme φ^{-1} est strictement croissante, le sens des inégalités est conservé :

$$\varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha).$$

Nous savons que

$$\varphi^{-1}(1) = 1,$$

car

$$\varphi(1) = 1.$$

De même,

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha,$$

car

$$\varphi(\alpha) = \alpha.$$

Enfin, par définition de la suite,

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

L'encadrement précédent devient donc

$$1 < u_{n+1} < \alpha.$$

Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

L'hérédité est démontrée.

$$\boxed{\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)}.$$

Étape 3 : conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < \alpha}.$$

Point important

L'utilisation de la stricte croissance de φ^{-1} est essentielle.

Si la fonction était seulement croissante, on pourrait seulement obtenir des inégalités larges. Ici, les inégalités restent strictes :

$$1 < u_{n+1} < \alpha.$$

Interprétation

L'intervalle

$$]1, \alpha[$$

est stable par la fonction φ^{-1} .

En effet, si un nombre appartient à $]1, \alpha[$, alors son image par φ^{-1} appartient encore à $]1, \alpha[$.

Comme $u_0 \in]1, \alpha[$, tous les termes de la suite restent enfermés dans cet intervalle.

Résultat

Par récurrence :

$$1 < u_0 < \alpha.$$

Si

$$1 < u_n < \alpha,$$

alors, puisque φ^{-1} est strictement croissante,

$$\varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha).$$

Or

$$\varphi^{-1}(1) = 1, \quad \varphi^{-1}(u_n) = u_{n+1}, \quad \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha.$$

Donc

$$1 < u_{n+1} < \alpha.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < \alpha}.$$

2. Monotonie de la suite (u_n)

Nous devons montrer que la suite (u_n) est croissante.

Cela signifie que nous devons vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Nous avons démontré à la question précédente que

$$1 < u_n < \alpha$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier,

$$u_n \in [1, \alpha].$$

Or la question 5.b de la partie II établit que

$$\forall x \in [1, \alpha], \quad \varphi^{-1}(x) \geq x.$$

Nous pouvons appliquer cette propriété au nombre $x = u_n$.

Ainsi,

$$\varphi^{-1}(u_n) \geq u_n.$$

Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est croissante.

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}.$$

Précision : la suite est même strictement croissante

Nous avons en réalité

$$u_n \in]1, \alpha[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, sur l'intervalle ouvert $]1, \alpha[$, la question 5.b donne l'inégalité stricte

$$\varphi^{-1}(x) > x.$$

En prenant

$$x = u_n,$$

on obtient

$$\varphi^{-1}(u_n) > u_n.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} > u_n.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est même strictement croissante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n}.$$

Rappel

Une suite (u_n) est :

— croissante si

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{pour tout } n;$$

— strictement croissante si

$$u_{n+1} > u_n \quad \text{pour tout } n.$$

Ici, l'encadrement strict

$$1 < u_n < \alpha$$

permet d'obtenir la stricte croissance.

Résultat

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \in]1, \alpha[.$$

D'après la question 5.b de la partie II,

$$\varphi^{-1}(u_n) > u_n.$$

Or

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

Ainsi,

$$\boxed{u_{n+1} > u_n}.$$

Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}.$$

3. Convergence et limite de la suite (u_n)

Nous devons montrer que la suite est convergente, puis déterminer sa limite.

Étape 1 : montrer que la suite est majorée

La première question a permis d'établir que

$$1 < u_n < \alpha$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier,

$$u_n < \alpha$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le réel α est donc un majorant de la suite (u_n) .

Ainsi,

$$(u_n) \text{ est majorée par } \alpha.$$

Étape 2 : appliquer le théorème de convergence monotone

Nous avons montré que :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (u_n) est majorée par α .

Nous pouvons donc utiliser le théorème de convergence des suites monotones.

Rappel

Toute suite croissante et majorée est convergente.

De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Par conséquent, la suite (u_n) est convergente.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

De plus, comme

$$1 < u_n < \alpha$$

pour tout n , on obtient au passage à la limite

$$1 \leq \ell \leq \alpha.$$

Nous allons maintenant déterminer précisément la valeur de ℓ .

Étape 3 : passage à la limite dans la relation de récurrence

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

Comme

$$u_n \rightarrow \ell,$$

la suite décalée (u_{n+1}) possède la même limite :

$$u_{n+1} \rightarrow \ell.$$

D'autre part, la fonction φ^{-1} est continue sur

$$[1, +\infty[.$$

En effet, la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est elle-même continue sur son intervalle de définition.

Nous pouvons donc passer à la limite dans

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

On obtient

$$\ell = \varphi^{-1}(\ell).$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de la fonction φ^{-1} .

$$\boxed{\varphi^{-1}(\ell) = \ell}.$$

Étape 4 : transformer l'équation obtenue

À partir de

$$\varphi^{-1}(\ell) = \ell,$$

appliquons la fonction φ aux deux membres.

On obtient

$$\varphi(\varphi^{-1}(\ell)) = \varphi(\ell).$$

Or

$$\varphi(\varphi^{-1}(\ell)) = \ell.$$

Ainsi,

$$\ell = \varphi(\ell).$$

Autrement dit, ℓ est également un point fixe de φ .

$$\boxed{\varphi(\ell) = \ell}.$$

Étape 5 : déterminer le point fixe correspondant

Sur l'intervalle

$$[1, \alpha],$$

nous savons que

$$\varphi(x) \leq x.$$

Plus précisément,

$$\varphi(x) < x \quad \text{pour tout } x \in]1, \alpha[,$$

et les égalités ont lieu aux extrémités :

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

Les seuls points fixes de φ dans l'intervalle $[1, \alpha]$ sont donc

$$1 \quad \text{et} \quad \alpha.$$

Par conséquent,

$$\ell \in \{1, \alpha\}.$$

Il reste à éliminer la possibilité $\ell = 1$.

Étape 6 : montrer que la limite ne peut pas être égale à 1

La suite est croissante. Par conséquent,

$$u_n \geq u_0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or

$$u_0 > 1.$$

Ainsi,

$$u_n \geq u_0 > 1$$

pour tout n .

En passant à la limite, on obtient

$$\ell \geq u_0 > 1.$$

Donc

$$\ell > 1.$$

La limite ne peut donc pas être égale à 1.

Comme

$$\ell \in \{1, \alpha\},$$

la seule possibilité restante est

$$\ell = \alpha.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}.$$

Point important

L'encadrement

$$1 < u_n < \alpha$$

ne suffit pas, à lui seul, à conclure que la limite est strictement supérieure à 1.

Le passage à la limite d'une inégalité stricte peut donner une inégalité large.

C'est pourquoi nous utilisons la croissance de la suite :

$$u_n \geq u_0 > 1.$$

On obtient alors

$$\ell \geq u_0 > 1,$$

ce qui permet d'éliminer rigoureusement la valeur $\ell = 1$.

Interprétation

La suite est construite par itérations successives de la fonction φ^{-1} :

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

Sur l'intervalle $]1, \alpha[$, la courbe de φ^{-1} est située au-dessus de la droite $y = x$.

Chaque nouveau terme est donc plus grand que le précédent.

Cependant, tous les termes restent inférieurs à α .

La suite monte progressivement vers le point fixe α , sans jamais le dépasser.

Résultat

La suite (u_n) est croissante et vérifie

$$u_n < \alpha$$

pour tout n .

Elle est donc croissante et majorée, donc convergente.

Posons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n),$$

on obtient

$$\ell = \varphi^{-1}(\ell),$$

donc

$$\varphi(\ell) = \ell.$$

Dans $[1, \alpha]$, les seuls points fixes de φ sont 1 et α .

Or

$$\ell \geq u_0 > 1.$$

Donc

$$\ell \neq 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\ell = \alpha}.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}.$$

Rédaction synthétique prête à recopier

Question 1

Montrons par récurrence que

$$1 < u_n < \alpha$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Par hypothèse,

$$u_0 \in]1, \alpha[,$$

donc

$$1 < u_0 < \alpha.$$

Hérédité :

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$1 < u_n < \alpha.$$

Comme φ^{-1} est strictement croissante,

$$\varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha).$$

Or

$$\varphi^{-1}(1) = 1, \quad \varphi^{-1}(u_n) = u_{n+1}$$

et

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha.$$

Ainsi,

$$1 < u_{n+1} < \alpha.$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < \alpha}.$$

Question 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \in]1, \alpha[.$$

D'après la question 5.b de la partie II,

$$\varphi^{-1}(u_n) \geq u_n.$$

Or

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

Donc

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}.$$

En réalité, comme $u_n \in]1, \alpha[$, on a même

$$u_{n+1} > u_n,$$

donc la suite est strictement croissante.

Question 3

La suite (u_n) est croissante et, d'après la question 1,

$$u_n < \alpha$$

pour tout n .

Elle est donc croissante et majorée. Elle est alors convergente.

Posons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

La fonction φ^{-1} étant continue,

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$$

donne, par passage à la limite,

$$\ell = \varphi^{-1}(\ell).$$

Ainsi,

$$\varphi(\ell) = \ell.$$

Dans l'intervalle $[1, \alpha]$, les seuls points fixes de φ sont 1 et α .

Or la suite est croissante, donc

$$u_n \geq u_0 > 1.$$

Par passage à la limite,

$$\ell \geq u_0 > 1.$$

Ainsi,

$$\ell \neq 1.$$

On en déduit que

$$\boxed{\ell = \alpha}.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}.$$

Synthèse finale

La suite est définie par

$$u_0 \in]1, \alpha[$$

et

$$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n).$$

On a démontré successivement que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < u_n < \alpha}$$

puis que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n}.$$

La suite est donc strictement croissante et majorée par α .

Elle est par conséquent convergente.

Sa limite est un point fixe de φ^{-1} , donc également de φ .

Comme la limite est strictement supérieure à 1, elle ne peut être que α .

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}.$$