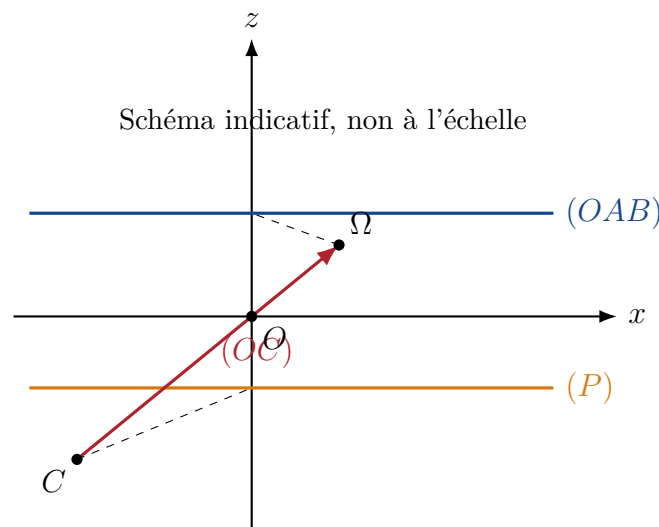


GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Session de rattrapage 2026

Exercice renuméroté et entièrement corrigé

Plans parallèles, droite orthogonale, sphère tangente
et section plane circulaire



Correction avec toutes les étapes de démonstration

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Première partie : plans et droite orthogonale	3
1.1	Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$	3
1.2	Parallélisme des plans (P) et (OAB)	4
1.3	Représentation paramétrique de la droite (OC)	5
1.4	Appartenance de C à (P) et orthogonalité	6
2	Deuxième partie : étude de la sphère	6
2.1	Position du centre Ω	6
2.2	Calcul de la distance $O\Omega$	7
2.3	Distance du centre Ω au plan (P)	8
2.4	Détermination de a , du centre et du rayon	9

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

on considère les points

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 0, 1), \quad C(-2, -2, 4).$$

Soit (P) le plan d'équation

$$x + y - 2z + 12 = 0.$$

1 - a) Montrer que

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

b) Dédurre que les plans (P) et (OAB) sont parallèles.

c) Vérifier que

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de la droite (OC) .

d) Vérifier que $C \in (P)$ et montrer que la droite (OC) est orthogonale au plan (P) .

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$, tangente au plan (P) au point C , et coupée par le plan (OAB) suivant un cercle (Γ) de centre O et de rayon

$$r = 4\sqrt{3}.$$

a) Vérifier que $\Omega \in (OC)$, puis déduire que

$$a = b \quad \text{et} \quad c = -2a.$$

b) Montrer que

$$O\Omega = |a|\sqrt{6}.$$

c) Vérifier que

$$d(\Omega, (P)) = |a + 2|\sqrt{6}.$$

d) Montrer que $a = 1$, en utilisant

$$\Omega C^2 - \Omega O^2 = 48,$$

puis déduire les coordonnées de Ω et le rayon R de la sphère (S) .

Rappel de cours

Dans un repère orthonormé :

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Un vecteur normal au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est

$$(A, B, C).$$

Deux plans sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Une droite est orthogonale à un plan lorsque son vecteur directeur est colinéaire à un vecteur normal du plan.

1 Première partie : plans et droite orthogonale

1.1 Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

Les coordonnées des vecteurs sont obtenues en soustrayant les coordonnées de l'origine $O(0, 0, 0)$:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{OB} = (2, 0, 1).$$

Calculons leur produit vectoriel :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons suivant la première ligne :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0)\vec{i} - (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2)\vec{j} + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 2)\vec{k}.$$

Calculons chaque coefficient :

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1,$$

$$-(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -(1 - 2) = 1,$$

$$1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Vérification

Vérifions que ce vecteur est bien orthogonal aux deux vecteurs du plan (OAB) .

Avec

$$\vec{n} = (1, 1, -2),$$

on a

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 + 1 - 2 = 0,$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien normal au plan (OAB) .

Conclusion

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

1.2 Parallélisme des plans (P) et (OAB)

Le plan (P) a pour équation

$$x + y - 2z + 12 = 0.$$

Un vecteur normal à (P) est donc

$$\vec{n}_P = (1, 1, -2).$$

D'après la question précédente,

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1, 1, -2).$$

Ce vecteur est un vecteur normal au plan (OAB) . Ainsi, les deux plans ont exactement le même vecteur normal.

Ils sont donc parallèles.

On peut même déterminer l'équation du plan (OAB) . Comme ce plan passe par O , son équation est de la forme

$$x + y - 2z = 0.$$

Le plan (P) , lui, a pour équation

$$x + y - 2z + 12 = 0.$$

Les deux équations ont les mêmes coefficients devant x, y, z , mais des constantes différentes. Les plans sont donc parallèles et distincts.

Conclusion

$$(P) \parallel (OAB).$$

1.3 Représentation paramétrique de la droite (OC)

La droite (OC) passe par l'origine $O(0, 0, 0)$ et par

$$C(-2, -2, 4).$$

Un vecteur directeur de (OC) est

$$\overrightarrow{OC} = (-2, -2, 4).$$

On remarque que

$$(-2, -2, 4) = -2(1, 1, -2).$$

Le vecteur

$$\vec{u} = (1, 1, -2)$$

est donc également un vecteur directeur de la droite (OC) .

Une représentation paramétrique de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ est

$$\begin{cases} x = 0 + t, \\ y = 0 + t, \\ z = 0 - 2t \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vérification

Pour $t = 0$, on obtient

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) = O.$$

Pour $t = -2$, on obtient

$$(x, y, z) = (-2, -2, 4) = C.$$

La droite représentée passe bien par O et C .

Conclusion

$$(OC) : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4 Appartenance de C à (P) et orthogonalité

Pour vérifier que $C(-2, -2, 4)$ appartient au plan (P) , remplaçons x, y, z dans l'équation du plan :

$$x + y - 2z + 12 = -2 - 2 - 2 \cdot 4 + 12.$$

Donc

$$-2 - 2 - 8 + 12 = 0.$$

Ainsi,

$$C \in (P).$$

D'autre part, un vecteur directeur de (OC) est

$$\vec{u} = (1, 1, -2).$$

Un vecteur normal à (P) est

$$\vec{n}_P = (1, 1, -2).$$

Les deux vecteurs sont identiques, donc colinéaires. Par conséquent, la droite (OC) est orthogonale au plan (P) .

Conclusion

$$C \in (P) \quad \text{et} \quad (OC) \perp (P).$$

2 Deuxième partie : étude de la sphère

2.1 Position du centre Ω

La sphère (S) est tangente au plan (P) au point C .

Rappel de cours

Lorsqu'une sphère est tangente à un plan au point C , le rayon $[\Omega C]$ est perpendiculaire au plan au point de tangence. Ainsi,

$$(\Omega C) \perp (P).$$

Nous avons déjà montré que la droite (OC) est perpendiculaire au plan (P) et qu'elle passe par C .

Par un point donné C , il existe une seule droite perpendiculaire à un plan donné. Par conséquent, la droite (ΩC) est la même que la droite (OC) .

Donc

$$\Omega \in (OC).$$

La représentation paramétrique de (OC) est

$$(x, y, z) = (t, t, -2t).$$

Comme

$$\Omega(a, b, c) \in (OC),$$

il existe un réel t tel que

$$a = t, \quad b = t, \quad c = -2t.$$

En prenant $t = a$, on obtient

$$b = a \quad \text{et} \quad c = -2a.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Omega(a, a, -2a)}.$$

Conclusion

$$\boxed{\Omega \in (OC), \quad a = b, \quad c = -2a.}$$

2.2 Calcul de la distance $O\Omega$

On a

$$O(0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \Omega(a, a, -2a).$$

La distance $O\Omega$ vaut

$$O\Omega = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2 + (-2a-0)^2}.$$

Donc

$$O\Omega = \sqrt{a^2 + a^2 + 4a^2} = \sqrt{6a^2}.$$

Or

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Ainsi,

$$O\Omega = |a|\sqrt{6}.$$

Point important

Il ne faut pas écrire directement $\sqrt{a^2} = a$, car a peut être négatif. La relation correcte est

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Conclusion

$$O\Omega = |a|\sqrt{6}.$$

2.3 Distance du centre Ω au plan (P)

La formule de la distance d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est

$$d(M, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ici,

$$\Omega(a, a, -2a)$$

et

$$(P) : x + y - 2z + 12 = 0.$$

Ainsi,

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|a + a - 2(-2a) + 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}}.$$

Calculons le numérateur :

$$a + a - 2(-2a) + 12 = 2a + 4a + 12 = 6a + 12 = 6(a + 2).$$

Le dénominateur vaut

$$\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}.$$

Donc

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|6(a+2)|}{\sqrt{6}}.$$

Comme

$$|6(a+2)| = 6|a+2|,$$

on obtient

$$d(\Omega, (P)) = \frac{6|a+2|}{\sqrt{6}} = |a+2|\sqrt{6}.$$

Conclusion

$$d(\Omega, (P)) = |a+2|\sqrt{6}.$$

2.4 Détermination de a , du centre et du rayon

Le plan (OAB) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de centre O et de rayon

$$r = 4\sqrt{3}.$$

Comme O est le centre de la section circulaire, O est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (OAB) .

Dans le triangle rectangle formé par :

- le centre de la sphère Ω ,
- le centre du cercle de section O ,
- un point quelconque M du cercle (Γ) ,

on a

$$\Omega M^2 = \Omega O^2 + OM^2.$$

Or

$$\Omega M = R$$

est le rayon de la sphère, et

$$OM = r = 4\sqrt{3}.$$

Donc

$$R^2 = \Omega O^2 + r^2.$$

D'autre part, puisque la sphère est tangente au plan (P) au point C ,

$$R = \Omega C.$$

Ainsi,

$$\Omega C^2 = \Omega O^2 + r^2.$$

Par conséquent,

$$\Omega C^2 - \Omega O^2 = r^2.$$

Or

$$r^2 = (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48.$$

On retrouve bien la relation indiquée :

$$\Omega C^2 - \Omega O^2 = 48.$$

Calculons maintenant chaque terme en fonction de a .

Nous avons

$$\Omega(a, a, -2a), \quad C(-2, -2, 4).$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{C\Omega} = (a + 2, a + 2, -2a - 4).$$

Comme

$$-2a - 4 = -2(a + 2),$$

on obtient

$$\Omega C^2 = (a + 2)^2 + (a + 2)^2 + [-2(a + 2)]^2.$$

Donc

$$\Omega C^2 = (a + 2)^2 + (a + 2)^2 + 4(a + 2)^2 = 6(a + 2)^2.$$

De plus,

$$\Omega O^2 = 6a^2.$$

La relation devient

$$6(a+2)^2 - 6a^2 = 48.$$

Divisons par 6 :

$$(a+2)^2 - a^2 = 8.$$

Développons :

$$a^2 + 4a + 4 - a^2 = 8.$$

Donc

$$4a + 4 = 8.$$

Ainsi,

$$4a = 4, \quad \boxed{a = 1}.$$

Comme

$$\Omega(a, a, -2a),$$

on en déduit

$$\boxed{\Omega(1, 1, -2)}.$$

Enfin, le rayon de la sphère est

$$R = \Omega C.$$

En utilisant

$$\Omega C^2 = 6(a+2)^2,$$

avec $a = 1$, on obtient

$$R^2 = 6(1+2)^2 = 6 \cdot 9 = 54.$$

Donc

$$R = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Le rayon étant une longueur, on retient naturellement la valeur positive :

$$R = 3\sqrt{6}.$$

Vérification

La formule de la distance de Ω au plan (P) donne aussi

$$d(\Omega, (P)) = |1 + 2|\sqrt{6} = 3\sqrt{6}.$$

Or la sphère est tangente à (P) , donc son rayon doit être égal à cette distance. Le résultat est parfaitement cohérent.

Conclusion

$$a = 1, \quad \Omega(1, 1, -2), \quad R = 3\sqrt{6}.$$

Bilan général

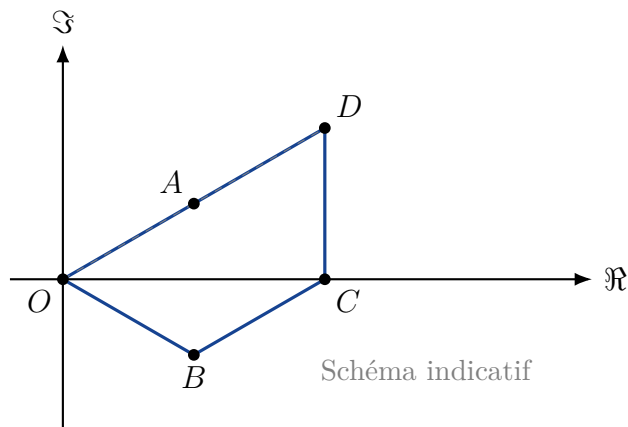
Question	Résultat
Produit vectoriel	$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1, 1, -2)$
Plans	$(P) \parallel (OAB)$
Droite (OC)	$x = t, y = t, z = -2t$
Position de C et orthogonalité	$C \in (P)$ et $(OC) \perp (P)$
Centre de la sphère	$\Omega(a, a, -2a)$
Distance $O\Omega$	$ a \sqrt{6}$
Distance de Ω à (P)	$ a + 2 \sqrt{6}$
Valeur de a	$a = 1$
Centre final	$\Omega(1, 1, -2)$
Rayon de la sphère	$R = 3\sqrt{6}$

NOMBRES COMPLEXES

Session de rattrapage 2026

Exercice renuméroté et entièrement corrigé

Forme trigonométrique, rotation complexe,
alignement et trapèze isocèle



Correction avec toutes les étapes de démonstration

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Calcul du quotient $\frac{a-c}{a}$	3
2	Forme trigonométrique	4
3	Nature de la transformation R	5
4	Image de l'origine par R	5
5	Calcul de l'abscisse d du point $D = R(B)$	6
5.1	Alignement des points O , A et D	7
6	Calcul de $\frac{c-b}{d}$	8
7	Démonstration de l'égalité $OB = DC$	9
8	Nature du quadrilatère $OBCD$	9

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct

$$(O, \vec{u}, \vec{v}),$$

on considère les points A , B et C d'affixes respectives

$$a = \sqrt{3} + i, \quad b = \bar{a}, \quad c = 2\sqrt{3}.$$

1 - a) Montrer que

$$\frac{a - c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Écrire le nombre complexe

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sous forme trigonométrique.

2 - Soit R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - a) + a.$$

a) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

b) Montrer que $R(O) = C$.

3 - Soit D le point d'affixe d tel que $R(B) = D$.

a) Montrer que

$$d = 2\sqrt{3} + 2i,$$

puis déduire que les points A , D et O sont alignés.

b) Montrer que

$$\frac{c - b}{d} = \frac{1}{2}.$$

c) Montrer que

$$OB = DC.$$

d) Déduire que le quadrilatère $OBCD$ est un trapèze isocèle.

Rappel de cours

Dans le plan complexe :

— si M a pour affixe z_M et N pour affixe z_N , alors

$$\overrightarrow{MN} \text{ a pour affixe } z_N - z_M;$$

— la distance MN est

$$MN = |z_N - z_M|;$$

— deux vecteurs non nuls d'affixes u et v sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{u}{v} \in \mathbb{R};$$

— une transformation de la forme

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

est la rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ .

1 Calcul du quotient $\frac{a - c}{a}$

Nous avons

$$a = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad c = 2\sqrt{3}.$$

Ainsi,

$$a - c = \sqrt{3} + i - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i.$$

Donc

$$\frac{a - c}{a} = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}.$$

Pour simplifier ce quotient, nous multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\overline{\sqrt{3} + i} = \sqrt{3} - i.$$

Ainsi,

$$\frac{a - c}{a} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}.$$

Calculons le dénominateur :

$$(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) = (\sqrt{3})^2 - i^2 = 3 - (-1) = 4.$$

Calculons maintenant le numérateur :

$$(-\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i).$$

En développant :

$$(-\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (-\sqrt{3})(-i) + i\sqrt{3} + i(-i).$$

Donc

$$-3 + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - i^2.$$

Comme

$$-i^2 = 1,$$

on obtient

$$-3 + 1 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Par conséquent,

$$\frac{a - c}{a} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4}.$$

En divisant chaque terme par 4,

$$\frac{a - c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion

$$\boxed{\frac{a - c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2 Forme trigonométrique

Considérons

$$z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculons son module :

$$|z_0| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Donc

$$|z_0| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Nous cherchons maintenant un argument θ tel que

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le cosinus est négatif et le sinus est positif : l'angle appartient au deuxième quadrant.

L'angle usuel correspondant est

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$z_0 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Comme son module vaut 1, sa forme trigonométrique est

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

On peut également écrire, sous forme exponentielle,

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

3 Nature de la transformation R

La transformation R est donnée par

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - a) + a.$$

Soustrayons a des deux côtés :

$$z' - a = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - a).$$

Cette relation est exactement de la forme

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega),$$

avec

$$\omega = a \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Comme

$$\left| e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| = 1,$$

la transformation conserve les distances au point d'affixe a , et multiplie les directions par un angle $2\pi/3$.

Le point d'affixe a est le point A .

Conclusion

$$R \text{ est la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3}.$$

4 Image de l'origine par R

Le point O a pour affixe

$$z = 0.$$

Son image $R(O)$ a pour affixe

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(0 - a) + a.$$

Donc

$$z' = -ae^{i\frac{2\pi}{3}} + a = a(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}).$$

D'après la question précédente,

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,

$$1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$z' = (\sqrt{3} + i) \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Développons :

$$z' = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2} + \frac{3i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les termes imaginaires s'annulent :

$$-\frac{3i}{2} + \frac{3i}{2} = 0.$$

Les termes réels donnent

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Ainsi,

$$z' = 2\sqrt{3} = c.$$

L'image de O est donc le point d'affixe c , c'est-à-dire C .

Conclusion

$$R(O) = C.$$

5 Calcul de l'affixe d du point $D = R(B)$

Comme

$$b = \bar{a},$$

on a

$$b = \sqrt{3} - i.$$

La relation définissant la rotation donne

$$d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b - a) + a.$$

Calculons

$$b - a = (\sqrt{3} - i) - (\sqrt{3} + i) = -2i.$$

Donc

$$d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(-2i) + a.$$

Or

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}(-2i) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2i).$$

Développons :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2i) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(-2i).$$

Le premier terme vaut

$$i.$$

Le second terme vaut

$$-\sqrt{3}i^2 = \sqrt{3}.$$

Donc

$$e^{i\frac{2\pi}{3}}(-2i) = \sqrt{3} + i.$$

Par conséquent,

$$d = (\sqrt{3} + i) + (\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Conclusion

$$d = 2\sqrt{3} + 2i.$$

5.1 Alignement des points O , A et D

Nous avons

$$a = \sqrt{3} + i$$

et

$$d = 2\sqrt{3} + 2i.$$

On remarque immédiatement que

$$d = 2a.$$

Donc

$$\frac{d}{a} = 2 \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$, d'affixes respectives a et d , sont donc colinéaires.

De plus, le coefficient 2 est positif : les points A et D sont situés sur la même demi-droite issue de O , et

$$OD = 2OA.$$

Conclusion

O, A et D sont alignés.

6 Calcul de $\frac{c-b}{d}$

Nous avons

$$c = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{3} - i, \quad d = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Calculons

$$c - b = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - i).$$

Donc

$$c - b = \sqrt{3} + i.$$

Or

$$\sqrt{3} + i = a$$

et

$$d = 2a.$$

Ainsi,

$$\frac{c-b}{d} = \frac{a}{2a}.$$

Comme $a \neq 0$, on simplifie :

$$\frac{c-b}{d} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion

$$\frac{c-b}{d} = \frac{1}{2}.$$

Point important

Le nombre $c - b$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$, tandis que d est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OD}$, puisque l'affixe de O vaut 0.

La relation

$$c - b = \frac{1}{2}d$$

signifie donc

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

7 Démonstration de l'égalité $OB = DC$

La distance OB vaut

$$OB = |b|.$$

Comme

$$b = \sqrt{3} - i,$$

on obtient

$$OB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Calculons maintenant la distance DC .

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est

$$c - d.$$

Or

$$c - d = 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 2i) = -2i.$$

Donc

$$DC = |c - d| = |-2i| = 2.$$

Ainsi,

$$OB = 2 \quad \text{et} \quad DC = 2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{OB = DC.}$$

8 Nature du quadrilatère $OBCD$

D'après la question 3.b,

$$\frac{c - b}{d} = \frac{1}{2}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$c - b = \frac{1}{2}d.$$

Or :

$$c - b$$

est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$, et

$$d$$

est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OD}$.

Donc

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de même sens. Ainsi,

$$(BC) \parallel (OD).$$

Le quadrilatère $OBCD$ possède donc une paire de côtés opposés parallèles : c'est un trapèze.

D'autre part, nous avons montré que

$$OB = DC.$$

Dans le trapèze $OBCD$, les côtés non parallèles sont précisément

$$[OB] \quad \text{et} \quad [DC].$$

Ils ont la même longueur. Par définition, le trapèze est donc isocèle.

Conclusion

$OBCD$ est un trapèze isocèle.

Bilan général

Question	Résultat
Quotient complexe	$\frac{a-c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Forme trigonométrique	$\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i2\pi/3}$
Transformation R	Rotation de centre A , d'angle $2\pi/3$
Image de O	$R(O) = C$
Affixe de D	$d = 2\sqrt{3} + 2i = 2a$
Alignement	O, A, D sont alignés
Rapport vectoriel	$\frac{c-b}{d} = \frac{1}{2}$
Longueurs	$OB = DC = 2$
Nature de $OBCD$	Trapèze isocèle

CALCUL DES PROBABILITÉS

Session de rattrapage 2026

Exercice renuméroté et entièrement corrigé

Tirages successifs sans remise,
probabilité conditionnelle et variable aléatoire

Blanche 0

Blanche 0

Blanche 1

Blanche 1

Noire 0

Noire 1

Correction avec toutes les étapes de démonstration

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Description précise de l'urne	3
2	Calcul de $\mathbb{P}(A)$	3
3	Calcul de $\mathbb{P}(B)$	4
4	Calcul de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B \mid A)$	5
5	Loi de probabilité de la variable aléatoire X	6
5.1	Calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$	7
5.2	Calcul de $\mathbb{P}(X = 2)$	7
5.3	Calcul de $\mathbb{P}(X = 1)$	8
6	Calcul de l'espérance $\mathbb{E}(X)$	8

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

Une urne contient quatre boules blanches numérotées

$$0, 0, 1, 1$$

et deux boules noires numérotées

$$0, 1.$$

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »,

B : « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 2 ».

1 - a) Montrer que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}.$$

b) Montrer que

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}.$$

2 - Montrer que la probabilité de B sachant que A est réalisé vaut

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{1}{7}.$$

3 - On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la somme des nombres portés par les deux boules tirées.

a) Compléter la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$			

b) Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = 1.$$

Rappel de cours

Comme les deux boules sont tirées successivement et sans remise, nous pouvons travailler de deux manières équivalentes :

— avec les couples ordonnés : il y a

$$6 \times 5 = 30$$

issues équiprobables ;

— avec les couples non ordonnés : il y a

$$\binom{6}{2} = 15$$

paires équiprobables.

Dans cette correction, nous utiliserons surtout les paires non ordonnées, car elles rendent les calculs plus courts. Nous vérifierons parfois les résultats avec les couples ordonnés.

1 Description précise de l'urne

Pour distinguer les boules qui portent le même numéro, notons :

$$B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, B_1^{(1)}, B_1^{(2)}$$

les quatre boules blanches, et

$$N_0, N_1$$

les deux boules noires.

Ainsi, l'urne contient exactement six boules.

Un tirage de deux boules sans remise correspond à une paire parmi les six boules, donc le nombre total de paires équiprobables est

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Point important

Même lorsque deux boules ont la même couleur et portent le même numéro, elles restent deux objets physiques distincts. Par exemple, les deux boules blanches numérotées 0 doivent être distinguées dans le dénombrement.

2 Calcul de $\mathbb{P}(A)$

L'événement A est réalisé lorsque les deux boules tirées sont de même couleur.

Il y a deux possibilités disjointes :

$$A = (\text{deux blanches}) \cup (\text{deux noires}).$$

Nombre de paires de deux boules blanches

Il y a quatre boules blanches. Le nombre de façons d'en choisir deux est

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Nombre de paires de deux boules noires

Il y a deux boules noires. Le nombre de façons de les choisir toutes les deux est

$$\binom{2}{2} = 1.$$

Le nombre total de paires favorables à A est donc

$$6 + 1 = 7.$$

Comme il y a 15 paires équiprobables,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}.$$

Vérification

Avec des tirages ordonnés :

deux blanches : $4 \times 3 = 12$,

deux noires : $2 \times 1 = 2$.

Il y a donc 14 couples ordonnés favorables sur 30, d'où

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

Conclusion

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}}.$$

3 Calcul de $\mathbb{P}(B)$

L'événement B est réalisé lorsque la somme des deux numéros tirés vaut 2.

Les seuls numéros présents dans l'urne sont 0 et 1. La seule manière d'obtenir une somme égale à 2 est donc

$$1 + 1 = 2.$$

Il faut donc tirer deux boules portant le numéro 1.

Combien y a-t-il de boules numérotées 1 dans l'urne ?

$$B_1^{(1)}, \quad B_1^{(2)}, \quad N_1.$$

Il y en a exactement trois.

Le nombre de paires de boules numérotées 1 est alors

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Comme le nombre total de paires est 15,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Vérification

Avec des tirages ordonnés, le premier 1 peut être choisi de 3 façons et le second parmi les 2 boules restantes portant le numéro 1 :

$$3 \times 2 = 6.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Conclusion

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}}.$$

4 Calcul de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B \mid A)$

Par définition,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

à condition que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, ce qui est bien le cas puisque

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15} > 0.$$

Déterminons maintenant $A \cap B$.

Pour que B soit réalisé, il faut tirer deux boules portant le numéro 1.

Pour que A soit réalisé en même temps, ces deux boules doivent aussi être de même couleur.

Parmi les trois boules numérotées 1, il y a :

$$B_1^{(1)}, \quad B_1^{(2)}, \quad N_1.$$

La seule paire de même couleur est

$$\{B_1^{(1)}, B_1^{(2)}\}.$$

Il y a donc une seule paire favorable à $A \cap B$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{15}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}}.$$

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse :

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{15} \times \frac{15}{7} = \frac{1}{7}.$$

Conclusion

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{7}.$$

5 Loi de probabilité de la variable aléatoire X

La variable aléatoire X est la somme des deux numéros tirés.

Comme chaque boule porte soit 0, soit 1, les valeurs possibles de X sont

$$0, \quad 1, \quad 2.$$

Dans l'urne, il y a exactement :

3 boules numérotées 0,

et

3 boules numérotées 1.

En effet, les zéros sont

$$B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, N_0,$$

et les uns sont

$$B_1^{(1)}, B_1^{(2)}, N_1.$$

5.1 Calcul de $\mathbb{P}(X = 0)$

Pour avoir $X = 0$, il faut tirer deux zéros :

$$0 + 0 = 0.$$

Il y a trois boules portant le numéro 0. Le nombre de paires de deux zéros est

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

5.2 Calcul de $\mathbb{P}(X = 2)$

Pour avoir $X = 2$, il faut tirer deux uns :

$$1 + 1 = 2.$$

Comme il y a trois boules portant le numéro 1,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Ce résultat est identique à $\mathbb{P}(B)$, puisque l'événement B est exactement l'événement $\{X = 2\}$.

5.3 Calcul de $\mathbb{P}(X = 1)$

Pour avoir $X = 1$, il faut tirer un zéro et un un :

$$0 + 1 = 1.$$

Il y a 3 choix pour la boule portant 0 et 3 choix pour la boule portant 1.

Le nombre de paires correspondantes est donc

$$3 \times 3 = 9.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

On pouvait également utiliser la somme des probabilités :

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2),$$

d'où

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Conclusion

La loi de probabilité de X est

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Vérification

La somme des probabilités doit être égale à 1 :

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

La loi obtenue est donc cohérente.

6 Calcul de l'espérance $\mathbb{E}(X)$

Pour une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots$, l'espérance est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Ici,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2).$$

En remplaçant les probabilités :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5}.$$

Calculons terme par terme :

$$0 \times \frac{1}{5} = 0,$$

$$1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5},$$

$$2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = 0 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{5} = 1.$$

Conclusion

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1.}$$

Vérification

On peut aussi raisonner par symétrie.

Chaque tirage individuel porte un numéro 0 ou 1. Comme l'urne contient autant de zéros que de uns, la moyenne du numéro d'une boule tirée vaut

$$\frac{0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

La somme de deux tirages a donc pour espérance

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Cela confirme le résultat précédent.

Bilan général

Question	Résultat
Nombre total de paires	$\binom{6}{2} = 15$
Même couleur	$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{15}$
Somme égale à 2	$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$
Intersection	$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{15}$
Probabilité conditionnelle	$\mathbb{P}(B A) = \frac{1}{7}$
Loi de X	$\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ pour 0, 1, 2
Espérance	$\mathbb{E}(X) = 1$

PROBLÈME D'ANALYSE

Partie I - Session de rattrapage 2026

Exercice renuméroté et entièrement corrigé

Étude du signe de $g(x) = e^{2x} - 1$
et calcul d'une intégrale contenant une valeur absolue

Correction avec toutes les étapes de démonstration

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Résolution de l'équation $g(x) = 0$	2
2	Étude du signe de g	3
2.1	Cas $x < 0$	3
2.2	Cas $x > 0$	4
3	Calcul de $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} g(x) dx$	5
3.1	Calcul de la première intégrale	5
3.2	Calcul de la deuxième intégrale	6
3.3	Somme des deux intégrales	7
4	Deuxième méthode de vérification	8

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

1 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$g(x) = 0.$$

b) Vérifier que

$$g(x) < 0 \quad \text{sur }]-\infty, 0[$$

et que

$$g(x) > 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

2 - Montrer que

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx = \frac{9}{8}.$$

Rappel de cours

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

$$e^u > 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R},$$

$$e^u = 1 \iff u = 0,$$

et la fonction

$$u \mapsto e^u$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On utilisera également

$$e^{\ln a} = a \quad (a > 0),$$

ainsi que

$$e^{-\ln a} = \frac{1}{a}.$$

1 Résolution de l'équation $g(x) = 0$

Nous devons résoudre

$$g(x) = 0.$$

Comme

$$g(x) = e^{2x} - 1,$$

l'équation devient

$$e^{2x} - 1 = 0.$$

Ajoutons 1 aux deux membres :

$$e^{2x} = 1.$$

Or

$$e^u = 1 \iff u = 0.$$

En prenant

$$u = 2x,$$

on obtient

$$2x = 0.$$

Ainsi,

$$x = 0.$$

Vérification

Pour $x = 0$,

$$g(0) = e^{2 \cdot 0} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

La valeur trouvée vérifie bien l'équation.

Conclusion

L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution :

$$\boxed{x = 0}.$$

2 Étude du signe de g

Nous étudions

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

2.1 Cas $x < 0$

Si

$$x < 0,$$

alors

$$2x < 0.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante,

$$2x < 0 \implies e^{2x} < e^0.$$

Or

$$e^0 = 1.$$

Donc

$$e^{2x} < 1.$$

En soustrayant 1,

$$e^{2x} - 1 < 0.$$

Ainsi,

$$g(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in]-\infty, 0[.$$

2.2 Cas $x > 0$

Si

$$x > 0,$$

alors

$$2x > 0.$$

La croissance stricte de l'exponentielle donne

$$e^{2x} > e^0 = 1.$$

Donc

$$e^{2x} - 1 > 0.$$

Ainsi,

$$g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

Au point $x = 0$, nous avons déjà trouvé

$$g(0) = 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Conclusion

et

$$g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty, 0[$$

$$g(x) > 0 \text{ sur }]0, +\infty[.$$

3 Calcul de $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx$

Nous devons calculer

$$I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx.$$

Méthode et idée directrice

Une valeur absolue dépend du signe de l'expression qu'elle contient.

La fonction g change de signe en 0, qui appartient à l'intervalle

$$[-\ln 2, \ln 2],$$

car $\ln 2 > 0$.

Il faut donc couper l'intégrale au point 0.

D'après l'étude du signe :

$$g(x) < 0 \quad \text{sur } [-\ln 2, 0[,$$

donc

$$|g(x)| = -g(x) = 1 - e^{2x} \quad \text{sur } [-\ln 2, 0].$$

De même,

$$g(x) > 0 \quad \text{sur }]0, \ln 2],$$

donc

$$|g(x)| = g(x) = e^{2x} - 1 \quad \text{sur } [0, \ln 2].$$

Par conséquent,

$$I = \int_{-\ln 2}^0 (1 - e^{2x}) dx + \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 1) dx.$$

Nous allons calculer séparément ces deux intégrales.

3.1 Calcul de la première intégrale

Posons

$$I_1 = \int_{-\ln 2}^0 (1 - e^{2x}) dx.$$

Une primitive de 1 est x .

Une primitive de e^{2x} est

$$\frac{1}{2}e^{2x},$$

car

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} = e^{2x}.$$

Ainsi, une primitive de $1 - e^{2x}$ est

$$x - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Donc

$$I_1 = \left[x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-\ln 2}^0.$$

Cela signifie

$$I_1 = \left(0 - \frac{1}{2}e^0 \right) - \left(-\ln 2 - \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} \right).$$

Calculons chaque terme.

D'abord,

$$e^0 = 1,$$

donc

$$0 - \frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}.$$

Ensuite,

$$e^{-2\ln 2} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$-\ln 2 - \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} = -\ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\ln 2 - \frac{1}{8}.$$

Par conséquent,

$$I_1 = -\frac{1}{2} - \left(-\ln 2 - \frac{1}{8} \right).$$

Donc

$$I_1 = -\frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{8}.$$

Or

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{4}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}.$$

Ainsi,

$$\boxed{I_1 = \ln 2 - \frac{3}{8}}.$$

3.2 Calcul de la deuxième intégrale

Posons

$$I_2 = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 1) dx.$$

Une primitive de $e^{2x} - 1$ est

$$\frac{1}{2}e^{2x} - x.$$

Donc

$$I_2 = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^{\ln 2}.$$

Ainsi,

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - 0 \right).$$

Calculons

$$e^{2 \ln 2} = e^{\ln(2^2)} = 4.$$

Donc

$$\frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 - \ln 2 = 2 - \ln 2.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$I_2 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$I_2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

3.3 Somme des deux intégrales

Nous avons

$$I = I_1 + I_2.$$

Donc

$$I = \left(\ln 2 - \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{3}{2} - \ln 2 \right).$$

Les termes en $\ln 2$ s'annulent :

$$\ln 2 - \ln 2 = 0.$$

Il reste

$$I = -\frac{3}{8} + \frac{3}{2}.$$

Écrivons

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{8}.$$

Ainsi,

$$I = -\frac{3}{8} + \frac{12}{8} = \frac{9}{8}.$$

Conclusion

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx = \frac{9}{8}.$$

4 Deuxième méthode de vérification

Nous pouvons vérifier le résultat par un changement de variable dans la première intégrale.

On a

$$I = \int_{-\ln 2}^0 (1 - e^{2x}) dx + \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 1) dx.$$

Dans la première intégrale, posons

$$x = -t.$$

Alors

$$dx = -dt.$$

Lorsque

$$x = -\ln 2,$$

on a

$$t = \ln 2.$$

Lorsque

$$x = 0,$$

on a

$$t = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{-\ln 2}^0 (1 - e^{2x}) dx = \int_{\ln 2}^0 (1 - e^{-2t})(-dt).$$

Donc

$$\int_{-\ln 2}^0 (1 - e^{2x}) dx = \int_0^{\ln 2} (1 - e^{-2t}) dt.$$

En renommant t en x ,

$$I = \int_0^{\ln 2} [1 - e^{-2x} + e^{2x} - 1] dx.$$

Les constantes 1 et -1 s'annulent :

$$I = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - e^{-2x}) dx.$$

Une primitive est

$$\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Donc

$$I = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^{\ln 2}.$$

En $x = \ln 2$,

$$\frac{1}{2}e^{2\ln 2} + \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}.$$

En $x = 0$,

$$\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^0 = 1.$$

Ainsi,

$$I = \frac{17}{8} - 1 = \frac{17}{8} - \frac{8}{8} = \frac{9}{8}.$$

Cette deuxième méthode confirme le résultat.

Bilan général

Question	Résultat
Solution de $g(x) = 0$	$x = 0$
Signe sur $] - \infty, 0[$	$g(x) < 0$
Valeur en 0	$g(0) = 0$
Signe sur $]0, +\infty[$	$g(x) > 0$
Première partie de l'intégrale	$I_1 = \ln 2 - \frac{3}{8}$
Deuxième partie de l'intégrale	$I_2 = \frac{3}{2} - \ln 2$
Valeur finale	$\frac{9}{8}$

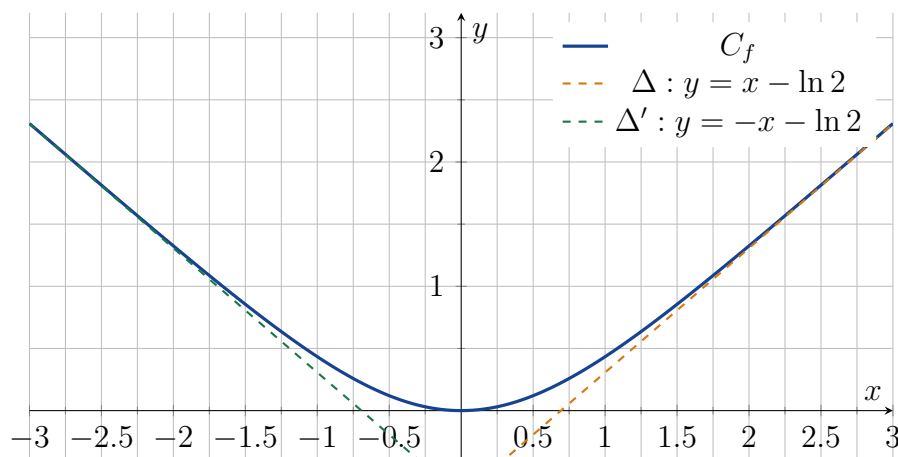
PROBLÈME D'ANALYSE

Partie II - Questions 1 à 5

Session de rattrapage 2026

Étude complète de la fonction

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$



Correction avec le maximum d'étapes et d'explications

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Domaine de définition	3
2	Parité de la fonction	4
3	Limites en $+\infty$ et en $-\infty$	5
3.1	Limite en $+\infty$	5
3.2	Limite en $-\infty$	6
4	Asymptotes obliques	7
4.1	Asymptote au voisinage de $+\infty$	7
4.2	Asymptote au voisinage de $-\infty$	8
5	Calcul de la dérivée	10
6	Variations de f	11
7	Résolution de l'équation $f(x) = x$	12
8	Démonstration de $f(x) \leq x$ sur $[0, +\infty[$	13
9	Position de (C_f) par rapport à (Δ)	15
10	Encadrement de $f(x) - (x - \ln 2)$	16

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}).$$

1 - Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2 - a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

puis en déduire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

3 - a) Montrer que la droite (Δ) , d'équation

$$y = x - \ln 2,$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) Déduire que la droite (Δ') , d'équation

$$y = -x - \ln 2,$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

4 - a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}},$$

où

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

b) Déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$.

5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$f(x) = x.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) \leq x.$$

c) Étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

d) Dédurre que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2.$$

Rappel de cours

On utilisera les propriétés suivantes :

$$e^u > 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R},$$

$$\ln v \text{ est défini si et seulement si } v > 0,$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a > 0, b > 0),$$

$$\ln(e^u) = u,$$

et la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

1 Domaine de définition

La fonction est donnée par

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Les deux premiers termes

$$x \quad \text{et} \quad -\ln 2$$

sont définis pour tout réel x .

La seule contrainte possible vient du logarithme

$$\ln(1 + e^{-2x}).$$

Pour que ce logarithme soit défini, il faut

$$1 + e^{-2x} > 0.$$

Or, pour tout réel x ,

$$e^{-2x} > 0.$$

Donc

$$1 + e^{-2x} > 1 > 0.$$

La condition est toujours vérifiée.

Conclusion

La fonction f est définie pour tout réel :

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2 Parité de la fonction

Pour montrer que f est paire, nous devons vérifier les deux conditions suivantes :

- le domaine D_f est symétrique par rapport à 0 ;
- pour tout $x \in D_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

La première condition est satisfaite puisque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Calculons maintenant $f(-x)$:

$$f(-x) = -x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2(-x)}).$$

Donc

$$f(-x) = -x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

L'expression obtenue ne ressemble pas encore directement à $f(x)$. Nous allons transformer le terme

$$1 + e^{2x}.$$

On factorise par e^{2x} :

$$1 + e^{2x} = e^{2x} (e^{-2x} + 1) = e^{2x} (1 + e^{-2x}).$$

Ainsi,

$$\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x} (1 + e^{-2x})].$$

En utilisant

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

on obtient

$$\ln(1 + e^{2x}) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Or

$$\ln(e^{2x}) = 2x.$$

Donc

$$\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

En remplaçant dans $f(-x)$, on trouve

$$f(-x) = -x - \ln 2 + 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Ainsi,

$$f(-x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Cette expression est exactement $f(x)$. Par conséquent,

$$f(-x) = f(x).$$

Conclusion

f est une fonction paire.

La courbe (C_f) est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

3.1 Limite en $+\infty$

Lorsque

$$x \rightarrow +\infty,$$

on a

$$-2x \rightarrow -\infty.$$

Par conséquent,

$$e^{-2x} \rightarrow 0.$$

Donc

$$1 + e^{-2x} \rightarrow 1.$$

Par continuité du logarithme en 1,

$$\ln(1 + e^{-2x}) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Le terme x tend vers $+\infty$, tandis que les deux autres termes restent bornés et tendent respectivement vers $-\ln 2$ et 0.

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

3.2 Limite en $-\infty$

Comme f est paire,

$$f(x) = f(-x).$$

Lorsque

$$x \rightarrow -\infty,$$

on a

$$-x \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$f(x) = f(-x) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}.$$

Vérification

On peut aussi vérifier directement la limite en $-\infty$.

Écrivons

$$1 + e^{-2x} = e^{-2x}(1 + e^{2x}).$$

Alors

$$\ln(1 + e^{-2x}) = -2x + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc

$$f(x) = x - \ln 2 - 2x + \ln(1 + e^{2x}),$$

soit

$$f(x) = -x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$e^{2x} \rightarrow 0,$$

donc

$$\ln(1 + e^{2x}) \rightarrow 0,$$

et

$$-x \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,

$$f(x) \rightarrow +\infty.$$

4 Asymptotes obliques

4.1 Asymptote au voisinage de $+\infty$

La droite (Δ) a pour équation

$$y = x - \ln 2.$$

Pour vérifier qu'elle est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$, nous étudions la différence

$$f(x) - (x - \ln 2).$$

On a

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Donc

$$f(x) - (x - \ln 2) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) - x + \ln 2.$$

Les termes x et $-x$, ainsi que $-\ln 2$ et $+\ln 2$, s'annulent :

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$e^{-2x} \rightarrow 0,$$

donc

$$\ln(1 + e^{-2x}) \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \ln 2)] = 0.$$

Conclusion

La droite

$$\Delta : y = x - \ln 2$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4.2 Asymptote au voisinage de $-\infty$

La droite proposée est

$$\Delta' : y = -x - \ln 2.$$

Nous calculons

$$f(x) - (-x - \ln 2).$$

On obtient

$$f(x) + x + \ln 2 = 2x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Cette forme n'est pas immédiatement exploitable lorsque $x \rightarrow -\infty$. Nous transformons le loga-

rithme :

$$1 + e^{-2x} = e^{-2x}(1 + e^{2x}).$$

Ainsi,

$$\ln(1 + e^{-2x}) = -2x + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc

$$f(x) - (-x - \ln 2) = 2x - 2x + \ln(1 + e^{2x}).$$

Par conséquent,

$$f(x) - (-x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x}).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$,

$$e^{2x} \rightarrow 0,$$

donc

$$\ln(1 + e^{2x}) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - \ln 2)] = 0.$$

Conclusion

La droite

$$\Delta' : y = -x - \ln 2$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Point important

La parité de f permet aussi de comprendre ce résultat géométriquement : puisque (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'asymptote Δ à droite se transforme en l'asymptote Δ' à gauche.

5 Calcul de la dérivée

La fonction est

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

La dérivée de x vaut 1, et la dérivée de la constante $-\ln 2$ vaut 0.

Pour le dernier terme, posons

$$u(x) = 1 + e^{-2x}.$$

Alors

$$u'(x) = -2e^{-2x}.$$

La dérivée de $\ln u(x)$ est

$$\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = 1 + \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Donc

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Mettons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $e^{2x} > 0$:

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Or, dans la Partie I,

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

Donc

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}.$$

6 Variations de f

Pour tout réel x ,

$$1 + e^{2x} > 0.$$

Le dénominateur de $f'(x)$ est donc toujours strictement positif.

Par conséquent, le signe de $f'(x)$ est exactement le signe de

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

D'après la Partie I :

$$g(x) < 0 \quad \text{si } x < 0,$$

$$g(0) = 0,$$

$$g(x) > 0 \quad \text{si } x > 0.$$

Donc

$$f'(x) < 0 \quad \text{sur }]-\infty, 0[,$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur

$$]-\infty, 0]$$

et strictement croissante sur

$$[0, +\infty[.$$

Calculons la valeur minimale :

$$f(0) = 0 - \ln 2 + \ln(1 + e^0).$$

Donc

$$f(0) = -\ln 2 + \ln 2 = 0.$$

Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 $+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Conclusion

f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$

et

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus,

$$f(0) = 0$$

est le minimum global de f .

7 Résolution de l'équation $f(x) = x$

Nous résolvons

$$f(x) = x.$$

En remplaçant $f(x)$,

$$x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = x.$$

Soustrayons x aux deux membres :

$$-\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = 0.$$

Donc

$$\ln(1 + e^{-2x}) = \ln 2.$$

La fonction logarithme est injective sur $]0, +\infty[$. Par conséquent,

$$1 + e^{-2x} = 2.$$

Donc

$$e^{-2x} = 1.$$

Or

$$e^u = 1 \iff u = 0.$$

Ainsi,

$$-2x = 0,$$

d'où

$$x = 0.$$

Vérification

$$f(0) = 0,$$

donc $x = 0$ vérifie bien $f(x) = x$.

Conclusion

$$S = \{0\}.$$

8 Démonstration de $f(x) \leq x$ sur $[0, +\infty[$

Soit

$$x \geq 0.$$

Alors

$$-2x \leq 0.$$

La fonction exponentielle étant croissante,

$$e^{-2x} \leq e^0 = 1.$$

Donc

$$1 + e^{-2x} \leq 2.$$

Comme le logarithme est croissant,

$$\ln(1 + e^{-2x}) \leq \ln 2.$$

En soustrayant $\ln 2$,

$$-\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) \leq 0.$$

En ajoutant x ,

$$x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) \leq x.$$

Or le membre de gauche est $f(x)$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \leq x \quad \text{pour tout } x \geq 0.}$$

L'égalité a lieu lorsque

$$e^{-2x} = 1,$$

c'est-à-dire uniquement lorsque

$$x = 0.$$

Donc

$$f(x) < x \quad \text{pour tout } x > 0.$$

9 Position de (C_f) par rapport à (Δ)

La droite (Δ) a pour équation

$$y = x - \ln 2.$$

Pour comparer (C_f) et (Δ) , étudions

$$f(x) - (x - \ln 2).$$

Nous avons déjà obtenu

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}).$$

Pour tout réel x ,

$$e^{-2x} > 0.$$

Donc

$$1 + e^{-2x} > 1.$$

La fonction logarithme étant strictement croissante,

$$\ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0.$$

Ainsi,

$$f(x) - (x - \ln 2) > 0.$$

Donc

$$f(x) > x - \ln 2.$$

En particulier, sur $[0, +\infty[$, la courbe (C_f) est strictement au-dessus de la droite (Δ) .

Conclusion

(C_f) est située strictement au-dessus de (Δ) sur $[0, +\infty[$.

La courbe s'approche de (Δ) par au-dessus lorsque $x \rightarrow +\infty$.

10 Encadrement de $f(x) - (x - \ln 2)$

Nous avons

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}).$$

Soit $x \geq 0$.

Comme

$$e^{-2x} > 0,$$

on a

$$1 + e^{-2x} > 1.$$

Donc

$$\ln(1 + e^{-2x}) \geq 0.$$

Ainsi,

$$f(x) - (x - \ln 2) \geq 0.$$

D'autre part, pour $x \geq 0$,

$$e^{-2x} \leq 1.$$

Donc

$$1 + e^{-2x} \leq 2.$$

Par croissance du logarithme,

$$\ln(1 + e^{-2x}) \leq \ln 2.$$

Finalement,

$$0 \leq \ln(1 + e^{-2x}) \leq \ln 2.$$

En revenant à l'expression de départ,

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2 \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Point important

À $x = 0$,

$$f(0) - (0 - \ln 2) = \ln 2,$$

donc la borne supérieure est atteinte.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) - (x - \ln 2) \rightarrow 0,$$

mais la valeur 0 n'est jamais atteinte pour un réel fini, car

$$\ln(1 + e^{-2x}) > 0.$$

Bilan général

Question	Résultat
Domaine	$D_f = \mathbb{R}$
Parité	f est paire
Limites	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$
Asymptote en $+\infty$	$\Delta : y = x - \ln 2$
Asymptote en $-\infty$	$\Delta' : y = -x - \ln 2$
Dérivée	$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}} = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}$
Variations	Décroissante sur $] -\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$
Minimum	$f(0) = 0$
Équation $f(x) = x$	$x = 0$
Comparaison avec $y = x$	$f(x) \leq x$ pour $x \geq 0$
Position par rapport à Δ	(C_f) au-dessus de Δ
Encadrement	$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2$

Dédution de l'asymptote au voisinage de $-\infty$

Question

On sait déjà que :

f est une fonction paire,

et que la droite

$$(\Delta) : y = x - \ln 2$$

est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Déduire que la droite

$$(\Delta') : y = -x - \ln 2$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Idée de la déduction

La fonction f est paire. Par conséquent, sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Il suffit donc de prendre la symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, de l'asymptote connue au voisinage de $+\infty$.

La droite connue est

$$(\Delta) : y = x - \ln 2.$$

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme tout point de coordonnées

$$(x, y)$$

en un point de coordonnées

$$(-x, y).$$

Autrement dit, dans l'équation de la droite, cette symétrie revient à remplacer x par $-x$.

Ainsi, l'image de la droite (Δ) est donnée par

$$y = (-x) - \ln 2.$$

Donc la droite symétrique de (Δ) par rapport à l'axe des ordonnées est

$$(\Delta') : y = -x - \ln 2.$$

Or :

$$f(-x) = f(x),$$

donc la branche de la courbe (C_f) située au voisinage de $-\infty$ est exactement la symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, de la branche située au voisinage de $+\infty$.

Puisque la branche droite de (C_f) se rapproche de la droite

$$y = x - \ln 2$$

lorsque $x \rightarrow +\infty$, sa branche symétrique se rapproche nécessairement de la droite

$$y = -x - \ln 2$$

lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Conclusion

Par parité de f , la courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La symétrique de l'asymptote

$$(\Delta) : y = x - \ln 2$$

est la droite

$$(\Delta') : y = -x - \ln 2.$$

On en déduit que

$$(\Delta') : y = -x - \ln 2$$

est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de

$$-\infty.$$

Pourquoi il s'agit bien d'une déduction

Ici, on ne refait pas un nouveau calcul de limite à partir de l'expression de f .

On utilise directement deux résultats déjà établis :

1. f est paire ;
2. (Δ) est asymptote en $+\infty$.

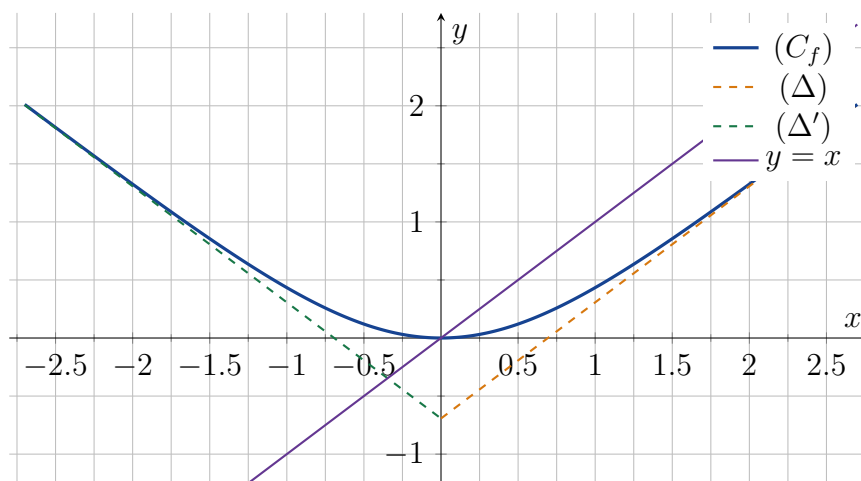
La conclusion découle alors de la symétrie de la courbe.

PROBLÈME D'ANALYSE

Partie II - Questions 6 et 7

Session de rattrapage 2026

Complétion graphique, encadrement d'une aire,
fonction réciproque et dérivée de la réciproque



Correction avec toutes les étapes de démonstration

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Complétion de la courbe sur $] - \infty, 0]$	3
1.1	Tracé de la droite (Δ')	3
1.2	Utilisation de la parité	4
1.3	Comportement à gauche	4
2	Encadrement de l'aire $\mathcal{A}$	5
3	Existence de la fonction réciproque	7
3.1	Injectivité	7
3.2	Détermination de l'image	7
4	Calcul d'une image par φ^{-1}	8
5	Dérivabilité de la fonction réciproque	10

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

On considère la fonction

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}),$$

et sa courbe représentative (C_f) .

6 - Le graphique donné représente la courbe (C_f) sur $[0, +\infty[$.

a) Reproduire le graphique, tracer dans le même repère la droite

$$(\Delta') : y = -x - \ln 2,$$

puis compléter la courbe (C_f) sur l'intervalle $] -\infty, 0]$.

b) Soit $\mathcal{A}$, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) , la droite

$$(\Delta) : y = x - \ln 2,$$

et les droites $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que

$$0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2.$$

7 - Soit φ la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} , définie sur un intervalle J à déterminer. L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.

b) Vérifier que

$$\varphi^{-1}\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \ln 2.$$

c) Montrer que φ^{-1} est dérivable en

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right),$$

et que

$$(\varphi^{-1})'\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{3}.$$

Résultats déjà établis

Les résultats précédemment établis sont :

f est paire,

$$f(0) = 0,$$

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}),$$

et, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2.$$

De plus,

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}}.$$

1 Complétion de la courbe sur $] - \infty, 0]$

1.1 Tracé de la droite (Δ')

La droite (Δ') a pour équation

$$y = -x - \ln 2.$$

Pour la tracer, il suffit de déterminer deux points.

Pour $x = 0$,

$$y = -\ln 2.$$

La droite passe donc par

$$A_0(0, -\ln 2).$$

Pour $x = -1$,

$$y = 1 - \ln 2.$$

Elle passe aussi par

$$A_1(-1, 1 - \ln 2).$$

On peut donc tracer (Δ') à l'aide de ces deux points.

1.2 Utilisation de la parité

La fonction f est paire, c'est-à-dire

$$f(-x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, cela signifie que la courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ainsi, la partie de (C_f) située sur $] -\infty, 0]$ s'obtient en prenant la symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, de la partie déjà donnée sur $[0, +\infty[$.

Concrètement, tout point

$$M(x, f(x))$$

de la branche droite donne le point symétrique

$$M'(-x, f(x))$$

sur la branche gauche.

Par exemple :

$$(0, f(0)) = (0, 0)$$

reste fixe ;

si la courbe passe par

$$(1, f(1)),$$

alors elle passe aussi par

$$(-1, f(1)).$$

1.3 Comportement à gauche

La droite (Δ') est l'asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

La branche gauche de la courbe se rapproche donc de

$$y = -x - \ln 2$$

lorsque

$$x \rightarrow -\infty.$$

Comme

$$f(x) - (-x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x}) > 0,$$

la courbe se trouve au-dessus de (Δ') , puis s'en rapproche lorsque $x \rightarrow -\infty$.

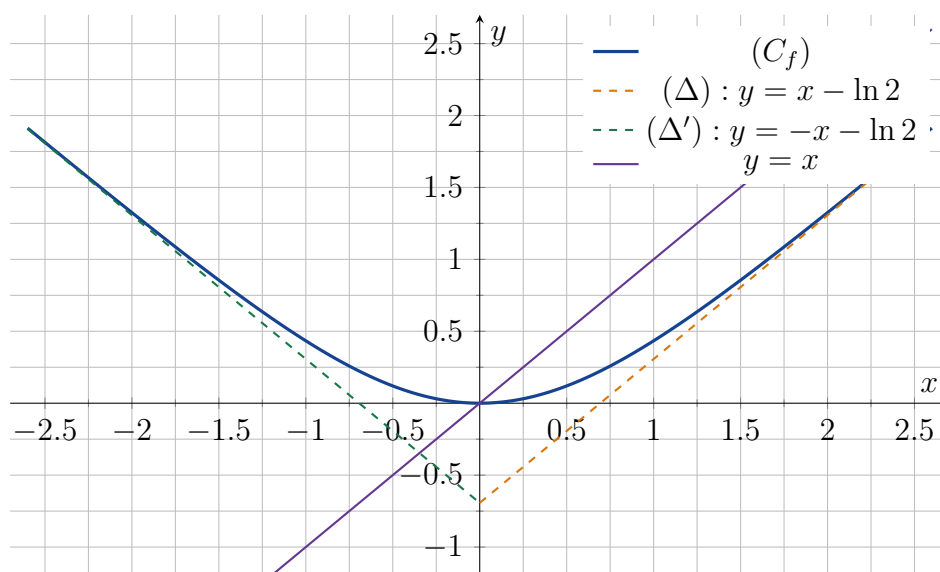
Conclusion

Pour compléter le graphique :

1. on trace la droite

$$\Delta' : y = -x - \ln 2;$$

2. on construit la symétrique de la branche droite de (C_f) par rapport à l'axe des ordonnées ;
3. la branche gauche ainsi obtenue est décroissante de $+\infty$ vers 0, et elle admet (Δ') comme asymptote au voisinage de $-\infty$.



2 Encadrement de l'aire $\mathcal{A}$

La partie considérée est délimitée :

- en haut par la courbe (C_f) ;
- en bas par la droite (Δ) ;
- à gauche par $x = 0$;
- à droite par $x = 1$.

Sur $[0, +\infty[$, nous avons montré que

$$f(x) \geq x - \ln 2.$$

Ainsi, l'aire est bien donnée par

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [f(x) - (x - \ln 2)] dx.$$

Or

$$f(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}).$$

Donc

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \ln(1 + e^{-2x}) dx.$$

Méthode et idée directrice

L'énoncé ne demande pas de calculer exactement cette intégrale. Il demande seulement de l'encadrer.

Nous utilisons donc directement l'encadrement déjà obtenu :

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2 \quad \text{pour } x \in [0, +\infty[.$$

En particulier, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2.$$

La propriété de conservation de l'ordre par intégration donne

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 [f(x) - (x - \ln 2)] dx \leq \int_0^1 \ln 2 dx.$$

Calculons les deux intégrales extrêmes :

$$\int_0^1 0 dx = 0,$$

et, puisque $\ln 2$ est une constante,

$$\int_0^1 \ln 2 dx = \ln 2 (1 - 0) = \ln 2.$$

Comme l'intégrale du milieu est précisément $\mathcal{A}$, on obtient

$$0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2.$$

Conclusion

$$0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2.$$

Point important

L'inégalité de gauche traduit simplement qu'une aire est positive.

L'inégalité de droite provient du fait que, sur une largeur égale à 1, l'écart vertical entre la courbe et la droite est toujours inférieur ou égal à $\ln 2$. L'aire est donc inférieure ou égale à celle d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur $\ln 2$.

3 Existence de la fonction réciproque

On définit

$$\varphi = f|_{[0, +\infty[}.$$

Cela signifie que

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Pour qu'une fonction admette une fonction réciproque, elle doit être bijective entre son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

3.1 Injectivité

La fonction f est strictement croissante sur

$$[0, +\infty[.$$

Sa restriction φ est donc elle aussi strictement croissante sur cet intervalle.

Toute fonction strictement monotone est injective.

Ainsi,

$$\varphi \text{ est injective sur } [0, +\infty[.$$

3.2 Détermination de l'image

La fonction φ est continue et strictement croissante sur

$$[0, +\infty[.$$

On a

$$\varphi(0) = f(0) = 0,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Par continuité et stricte croissance,

$$\varphi([0, +\infty[) = [0, +\infty[.$$

Posons donc

$$J = [0, +\infty[.$$

La fonction φ est bijective de

$$[0, +\infty[$$

vers

$$J = [0, +\infty[.$$

Conclusion

$$\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\text{ est bijective.}$$

Elle admet donc une fonction réciproque

$$\varphi^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[.$$

4 Calcul d'une image par φ^{-1}

Nous devons vérifier que

$$\varphi^{-1}\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \ln 2.$$

Méthode et idée directrice

Pour montrer que

$$\varphi^{-1}(y) = x,$$

il suffit de vérifier que

$$\varphi(x) = y.$$

Ici, il suffit donc de calculer

$$\varphi(\ln 2).$$

Comme $\ln 2 > 0$, cette valeur appartient au domaine de φ .

On a

$$\varphi(\ln 2) = f(\ln 2).$$

En utilisant la définition de f ,

$$f(\ln 2) = \ln 2 - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2\ln 2}).$$

Les deux premiers termes s'annulent :

$$\ln 2 - \ln 2 = 0.$$

Calculons

$$e^{-2\ln 2}.$$

On a

$$-2\ln 2 = \ln(2^{-2}) = \ln \frac{1}{4}.$$

Donc

$$e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$f(\ln 2) = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

Donc

$$f(\ln 2) = \ln \frac{5}{4}.$$

Ainsi,

$$\varphi(\ln 2) = \ln \frac{5}{4}.$$

En appliquant la fonction réciproque aux deux membres,

$$\varphi^{-1}\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \ln 2.$$

Conclusion

$$\varphi^{-1}\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \ln 2.$$

5 Dérivabilité de la fonction réciproque

Résultats déjà établis

Soit une fonction φ bijective et dérivable en un point a , avec

$$\varphi'(a) \neq 0.$$

Alors sa fonction réciproque est dérivable en

$$b = \varphi(a),$$

et

$$(\varphi^{-1})'(b) = \frac{1}{\varphi'(a)}.$$

Autrement dit,

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(a)) = \frac{1}{\varphi'(a)}.$$

Nous savons que

$$\varphi(\ln 2) = \ln \frac{5}{4}.$$

Ainsi,

$$a = \ln 2 \quad \text{et} \quad b = \ln \frac{5}{4}.$$

Calculons maintenant

$$\varphi'(\ln 2).$$

Comme φ est la restriction de f ,

$$\varphi'(x) = f'(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

Or

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Donc

$$\varphi'(\ln 2) = \frac{e^{2 \ln 2} - 1}{1 + e^{2 \ln 2}}.$$

Nous avons

$$e^{2 \ln 2} = 4.$$

Ainsi,

$$\varphi'(\ln 2) = \frac{4 - 1}{1 + 4}.$$

Donc

$$\varphi'(\ln 2) = \frac{3}{5}.$$

En particulier,

$$\varphi'(\ln 2) \neq 0.$$

Le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque s'applique donc. La fonction φ^{-1} est dérivable en

$$\varphi(\ln 2) = \ln \frac{5}{4}.$$

Et

$$(\varphi^{-1})' \left(\ln \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{\varphi'(\ln 2)}.$$

Ainsi,

$$(\varphi^{-1})' \left(\ln \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{3/5}.$$

Diviser par $\frac{3}{5}$ revient à multiplier par son inverse :

$$\frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}.$$

Conclusion

La fonction φ^{-1} est dérivable en

$$\ln \frac{5}{4},$$

et

$$(\varphi^{-1})' \left(\ln \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{3}.$$

Vérification

La fonction φ est croissante, donc

$$\varphi'(\ln 2) = \frac{3}{5} > 0.$$

Sa réciproque est également croissante, et sa dérivée au point correspondant doit être positive.
Le résultat

$$\frac{5}{3} > 0$$

est donc cohérent.

Bilan général

Question	Résultat
Complétion de (C_f)	Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
Asymptote gauche	$\Delta' : y = -x - \ln 2$
Expression de l'aire	$\mathcal{A} = \int_0^1 [f(x) - (x - \ln 2)] dx$
Encadrement de l'aire	$0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2$
Intervalle J	$J = [0, +\infty[$
Bijection	$\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
Valeur de la réciproque	$\varphi^{-1} \left(\ln \frac{5}{4} \right) = \ln 2$
Dérivée de φ en $\ln 2$	$\varphi'(\ln 2) = \frac{3}{5}$
Dérivée de la réciproque	$(\varphi^{-1})' \left(\ln \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{3}$

PROBLÈME D'ANALYSE

Partie III - Suites numériques

Session de rattrapage 2026

Étude de la suite définie par

$$u_0 = \ln 2, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Correction avec le maximum d'étapes et d'explications

Niveau : Baccalauréat - Options PC et SVT

Table des matières

1	Encadrement de la suite par récurrence	3
1.1	Initialisation	3
1.2	Hérédité	3
1.3	Conclusion de la récurrence	5
2	Monotonie de la suite	5
2.1	Peut-on préciser si elle est strictement décroissante ?	6
3	Convergence de la suite	8
4	Détermination de la limite	9
5	Résolution directe de l'équation vérifiée par la limite	10

Exercice 1 - Énoncé entièrement réécrit

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$u_0 = \ln 2$$

et

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout entier naturel n , où

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

1 - Montrer par récurrence que

$$0 \leq u_n \leq \ln 2,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante. On peut utiliser la question 5.b de la Partie II.

3 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Résultats utiles des parties précédentes

Des parties précédentes, nous savons que :

$$f(0) = 0,$$

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

$$f(x) \leq x \quad \text{pour tout } x \geq 0,$$

et l'équation

$$f(x) = x$$

admet pour unique solution réelle

$$x = 0.$$

Nous aurons aussi besoin de la valeur

$$f(\ln 2) = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

Or

$$1 < \frac{5}{4} < 2,$$

donc, par croissance de $\ln$,

$$0 < \ln\left(\frac{5}{4}\right) < \ln 2.$$

1 Encadrement de la suite par récurrence

Nous voulons démontrer la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad 0 \leq u_n \leq \ln 2$$

pour tout entier naturel n .

Méthode et idée directrice

Une démonstration par récurrence comporte trois étapes :

1. l'initialisation ;
2. l'hérédité ;
3. la conclusion.

Dans l'hérédité, on suppose que u_n appartient à l'intervalle $[0, \ln 2]$, puis on utilise la croissance de f pour encadrer

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1.1 Initialisation

Pour $n = 0$, nous avons

$$u_0 = \ln 2.$$

Comme

$$\ln 2 > 0,$$

on obtient

$$0 \leq u_0 \leq \ln 2.$$

Plus précisément,

$$0 < \ln 2 = \ln 2.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

1.2 Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que

$$0 \leq u_n \leq \ln 2.$$

C'est l'hypothèse de récurrence.

Puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et que les trois nombres

$$0, \quad u_n, \quad \ln 2$$

appartiennent à cet intervalle, l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq \ln 2$$

entraîne

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 2).$$

Or

$$f(u_n) = u_{n+1}.$$

De plus,

$$f(0) = 0.$$

Calculons $f(\ln 2)$ avec toutes les étapes :

$$f(\ln 2) = \ln 2 - \ln 2 + \ln \left(1 + e^{-2 \ln 2}\right).$$

Les deux premiers termes s'annulent :

$$\ln 2 - \ln 2 = 0.$$

Ensuite,

$$e^{-2 \ln 2} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$f(\ln 2) = \ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \ln \left(\frac{5}{4}\right).$$

Ainsi,

$$0 \leq u_{n+1} \leq \ln \left(\frac{5}{4}\right).$$

Comme

$$\frac{5}{4} < 2,$$

et puisque la fonction logarithme est strictement croissante,

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) < \ln 2.$$

Par conséquent,

$$0 \leq u_{n+1} < \ln 2.$$

A fortiori,

$$0 \leq u_{n+1} \leq \ln 2.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

1.3 Conclusion de la récurrence

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire.

Par le principe de récurrence,

$$0 \leq u_n \leq \ln 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Point important

L'encadrement demandé est

$$0 \leq u_n \leq \ln 2.$$

Cependant, dès le rang 1, nous obtenons même l'encadrement plus précis

$$0 \leq u_n \leq \ln\left(\frac{5}{4}\right) < \ln 2 \quad (n \geq 1).$$

2 Monotonie de la suite

Nous devons comparer deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} \quad \text{et} \quad u_n.$$

D'après la question précédente,

$$u_n \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Or, dans la Partie II, nous avons démontré que

$$f(x) \leq x \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

Nous pouvons donc appliquer cette inégalité à

$$x = u_n.$$

Comme $u_n \geq 0$, on obtient

$$f(u_n) \leq u_n.$$

Mais, par définition de la suite,

$$f(u_n) = u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion

(u_n) est décroissante.

2.1 Peut-on préciser si elle est strictement décroissante ?

Nous savons que l'égalité

$$f(x) = x$$

n'a lieu que pour

$$x = 0.$$

Tant que $u_n > 0$, nous avons donc

$$f(u_n) < u_n,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} < u_n.$$

Nous allons vérifier que tous les termes sont strictement positifs.

Nous avons

$$u_0 = \ln 2 > 0.$$

Si $u_n > 0$, alors

$$e^{-2u_n} > 0,$$

donc

$$1 + e^{-2u_n} > 1,$$

et

$$\ln(1 + e^{-2u_n}) > 0.$$

Une manière plus directe consiste à utiliser la croissance stricte de f sur $[0, +\infty[$:

$$u_n > 0 \implies f(u_n) > f(0) = 0.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} > 0.$$

Par récurrence,

$$u_n > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Vérification

Les premiers termes confirment ce comportement :

$$u_0 = \ln 2 \approx 0,6931,$$

$$u_1 = f(\ln 2) = \ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,2231.$$

Donc

$$u_1 < u_0.$$

Conclusion

La suite est non seulement décroissante, mais même strictement décroissante :

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3 Convergence de la suite

Nous avons montré que :

(u_n) est décroissante,

et

$$u_n \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite est donc minorée par 0.

Résultats utiles des parties précédentes

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Par le théorème de convergence des suites monotones, la suite (u_n) converge.

Il existe donc un réel ℓ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Comme

$$0 \leq u_n \leq \ln 2,$$

le passage à la limite donne

$$0 \leq \ell \leq \ln 2.$$

4 Détermination de la limite

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme $u_n \rightarrow \ell$, la suite décalée (u_{n+1}) converge également vers ℓ :

$$u_{n+1} \rightarrow \ell.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est formée à partir de fonctions continues et que

$$1 + e^{-2x} > 0$$

pour tout réel x .

Ainsi,

$$f(u_n) \rightarrow f(\ell).$$

En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

nous obtenons

$$\ell = f(\ell).$$

La limite ℓ est donc une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

Or cette équation a été résolue dans la Partie II, et son unique solution est

$$x = 0.$$

Par conséquent,

$$\ell = 0.$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

5 Résolution directe de l'équation vérifiée par la limite

Pour rendre la conclusion entièrement autonome, résolvons à nouveau

$$\ell = f(\ell).$$

En remplaçant $f(\ell)$,

$$\ell = \ell - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2\ell}).$$

Soustrayons ℓ des deux côtés :

$$0 = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2\ell}).$$

Donc

$$\ln(1 + e^{-2\ell}) = \ln 2.$$

Comme $\ln$ est injective,

$$1 + e^{-2\ell} = 2.$$

Ainsi,

$$e^{-2\ell} = 1.$$

Or

$$e^t = 1 \iff t = 0.$$

Donc

$$-2\ell = 0,$$

et finalement

$$\ell = 0.$$

Cette résolution confirme le résultat.

Bilan général

Étape	Résultat
Terme initial	$u_0 = \ln 2$
Encadrement	$0 \leq u_n \leq \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Encadrement plus précis	$0 < u_n \leq \ln \left(\frac{5}{4} \right)$ pour $n \geq 1$
Comparaison de deux termes	$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$
Monotonie	(u_n) est strictement décroissante
Minoration	$u_n \geq 0$
Convergence	Suite décroissante et minorée
Équation de la limite	$\ell = f(\ell)$
Limite	$\boxed{\ell = 0}$