

EXAMEN DU BACCALAURÉAT SCIENCES & TECHNOLOGIES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SESSION DE RATTRAPAGE 2026

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2 : Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3 : Calcul des probabilités	2,5 points
Exercice 4 : Problème d'analyse, suites numériques et calcul intégral	11 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z .
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice

1

SESSION DE RATRAPAGE 2026

3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 0, 1) \quad \text{et} \quad C(-2, -2, 4).$$

Soit (P) le plan d'équation

$$x + y - 2z + 12 = 0.$$

- 1 - a) Montrer que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. 0,25 pt
 b) Dédire que les plans (P) et (OAB) sont parallèles. 0,25 pt
 c) Vérifier que

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (OC) . 0,25 pt

- d) Vérifier que $C \in (P)$ et montrer que la droite (OC) est orthogonale au plan (P) . 0,5 pt

- 2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$, tangente au plan (P) au point C , et coupée par le plan (OAB) suivant un cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 4\sqrt{3}$.

- a) Vérifier que $\Omega \in (OC)$ et déduire que $a = b$ et $c = -2a$. 0,5 pt
 b) Montrer que $O\Omega = |a|\sqrt{6}$. 0,25 pt
 c) Vérifier que $d(\Omega, (P)) = |a + 2|\sqrt{6}$. 0,25 pt
 d) Montrer que $a = 1$ (remarquer que $\Omega C^2 - \Omega O^2 = 48$), puis déduire les coordonnées de Ω et le rayon R de la sphère (S) . 0,75 pt

Exercice

2

SESSION DE RATRAPAGE 2026

3,5 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = \sqrt{3} + i, \quad b = \bar{a}, \quad c = 2\sqrt{3}.$$

- 1 - a) Montrer que

$$\frac{a - c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

0,5 pt

- b) Écrire le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique. 0,25 pt

- 2 - Soit R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - a) + a.$$

- a) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. 0,5 pt
 b) Montrer que $R(O) = C$. 0,5 pt

0,5 pt

2,5 pts

0,25 pt

Exercice

4

SESSION DE RATRAPAGE 2026

11 pts

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{2x} - 1.$$

- 1 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$. 0,25 pt
 b) Vérifier que $g(x) < 0$ sur $] -\infty, 0[$ et que $g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. 0,5 pt
 2 - Montrer que

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} |g(x)| dx = \frac{9}{8}.$$

0,75 pt

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 - Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. 0,25 pt
 2 - a) Montrer que f est une fonction paire. 0,5 pt
 b) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 0,5 pt
 3 - a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,5 pt
 b) Déduire que la droite (Δ') d'équation $y = -x - \ln 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pt
 4 - a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}.$$

0,75 pt

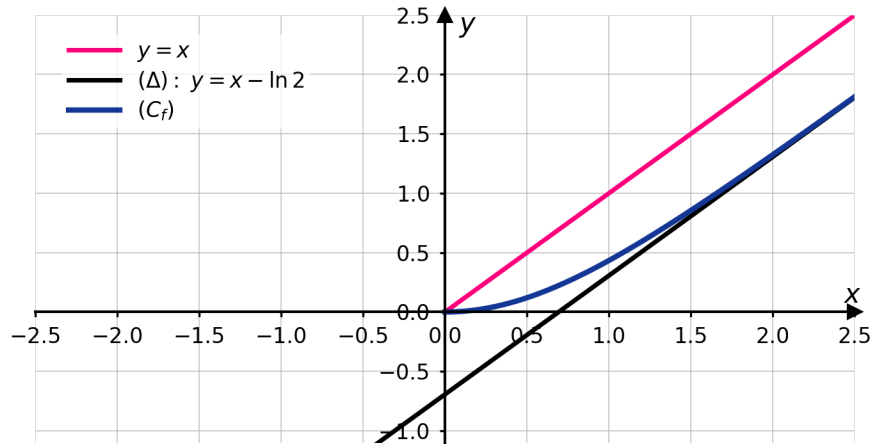
- b) Déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ (on peut utiliser la question 1 de la Partie I). 0,5 pt

- 5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. 0,5 pt
 b) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \leq x$. 0,5 pt
 c) Étudier la position de la courbe (C_f) et de la droite (Δ) sur l'intervalle $[0, +\infty[$. 0,5 pt
 d) Déduire que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2.$$

0,5 pt

6 - Le graphique ci-dessous représente la courbe (C_f) de la fonction f sur $[0, +\infty[$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



- a) Reproduire le graphique ci-dessus, puis tracer dans le même repère la droite (Δ') et compléter la courbe (C_f) de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty, 0]$. **0,5 pt**
- b) Soit $\mathcal{A}$, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que

$$0 \leq \mathcal{A} \leq \ln 2.$$

0,5 pt

7 - Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

- a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.) **0,5 pt**
- b) Vérifier que

$$\varphi^{-1}\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \ln 2.$$

0,25 pt

- c) Montrer que φ^{-1} est dérivable en $\ln \left(\frac{5}{4}\right)$ et que

$$(\varphi^{-1})'\left(\ln \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{3}.$$

0,5 pt

Partie III

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$u_0 = \ln 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout entier naturel n .

1 - Montrer par récurrence que

$$0 \leq u_n \leq \ln 2,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5 pt

2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 5.b de la Partie II.)

0,5 pt

3 - En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,75 pt

FIN DU SUJET